Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

Resolução de Sistemas Lineares – Exercícios

1. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com inversa } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Calcule o número de condição:

a) associado à norma $\|\cdot\|_\infty$
b) associado à norma $\|\cdot\|_1$
c) associado ao raio espectral $r_\sigma(A)$

Mostre que $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A)$. Com o auxilio do *Mathematica* trace o gráfico do número $\text{cond}_1(A)$ em função do parâmetro a. Comente.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e verifique que } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & 0 & -\frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}$$

a) Calcule as normas$\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ da matriz A.
b) Calcule $\text{cond}_\infty(A)$ e $\text{cond}_1(A)$. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz.
c) E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

3. O sistema de equações lineares $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & wa \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} x^{(k)} + wb$$

a) Para que valores de a o método converge se $w = 1$?
b) Se $a = -1/2$ e $w = 1/2$ o método converge?

4. Considere um sistema de duas equações na forma geral

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seigel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.
b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução exacta do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|})$.
c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2, 1)$. Com base na alínea anterior determine um majorante para o erro do resultado obtido.
d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1+\cos(\theta) \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $Ax = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = (0, -212, 10^5)$.
b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iterada com $x^{(0)} = (10^5, 10^6, 0)$.
c) Ao fim de quantas iterações n é possível garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$.

6. Considere a matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

onde $0 < \beta < \alpha$.
a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o método de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.
b) Considere $\beta = 1,\ \alpha = 2$ e $b = (0, 0, 0)$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = (0, 0, 0)$.

(i) Mostre que se começar com $x^{(0)} = (0, 2, 1)$ ou outro vector qualquer, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que o raio espectral da matriz C associada ao método de Jacobi é 0)

(ii) Mostre que, se começar com $x^{(0)} = (0, 2, 1)$ e aplicar o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(1)} = (0, -2, -1)$, $x^{(2)} = (0, 2, 1)$, $x^{(3)} = (0, -2, -1), \ldots$ Verifique que $(0, 2, 1)$ é o vector próprio associado ao valor próprio -1.

7. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < \frac{4}{3}$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\omega = 0$?
b) Seja $\omega = \frac{1}{2}$ e $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.
c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

8. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.
b) Escreva o sistema na forma iterativa e calcule $x^{(2)}$, considerando o método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.
c) Determine um majorante para $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

9. Considere o método iterativo

$$x^{(k+1)} = C\, x^{(k)} + b, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad x^{(0)} \in \mathbb{R}^4, \tag{1}$$

com

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$, o método iterativo (1) converge para a solução do sistema linear $(I - C)\, x = b$.

b) Seja $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. Calcule as duas primeiras iteradas pelo método (1). Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

10. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um método iterativo da forma $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$. Identifique a matriz C e o vector d. Se $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ estime o erro $\|x - x^{(k)}\|_\infty$.