Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Experimental (LMAC) – 1º Semestre de 2011/2012

2º Miniteste – Resolução

1. Temos

$$\frac{12}{7}=1+\frac{5}{7}=1+\frac{1}{7/5}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{5}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5/2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\;+\;\cfrac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-1=1+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\;+\;\cfrac{2}{\sqrt{3}+1}}}$$

Portanto

$$\frac{12}{7}=[1,1,2,2]\,,$$

$$\sqrt{3}=\left[1,\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right]=\left[1,1,2,\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right]=[1,1,2,1,2,1,2,\ldots]=[1,\{1,2\}]\,.$$

2. a) O programa `vonkettenbruch` recebe uma lista não vazia, atribui ao contador `k` o valor do comprimento da lista e enquanto `k` for superior a 1 substitui o (`k-1`)-ésimo elemento da lista pela soma do mesmo com o inverso do `k`-ésimo elemento e diminui o valor de `k` por 1. O programa devolve o primeiro elemento da nova lista.

b) Se o primeiro elemento da lista recebida for um inteiro não negativo e os outros forem inteiros positivos, o programa calcula o número racional a partir da sua fracção contínua (simples) dada pela lista recebida.

Assim (ver pergunta **1.**)

$$\texttt{vonkettenbruch}[\{\texttt{1,1,2,2}\}]=\frac{12}{7}$$

3.

```
listaFibo[n_Integer,f1_Integer,f2_Integer]/;n>=3:=
    Module[{k,fibo},
      fibo[1]:=f1;
      fibo[2]:=f2;
      fibo[k_Integer/;k>=3]:=fibo[k]=fibo[k-1]+fibo[k-2];
      Table[fibo[k],{k,n}]]
```

4. (a) Temos para $x, y > 0$, inteiros

$$x\,y = x + y \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)\,(y-1) = 1\,.$$

Logo

$$x - 1 = 1 \quad \wedge \quad y - 1 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2 \quad \wedge \quad y = 2\,.$$

(b) Dividindo por $xyz > 0$, tem-se

$$x^2\,y + y^2\,z + z^2\,x = x\,y\,z \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 1\,.$$

Supondo, sem perca de generalidade, que $x \geq y \geq z$, temos

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} > 1\,,$$

ou seja, não existem soluções inteiras positivas.

5. Temos

$$n = (r_k\, r_{k-1} \cdots r_1\, r_0)_{10} = r_k\, 10^k + r_{k-1}\, 10^{k-1} + \cdots + r_1\, 10^1 + r_0\, 10^0\,.$$

Note-se que $10 \equiv 1 \pmod 3$. Assim $10^k \equiv 1 \pmod 3 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$. Segue-se que

$$n \bmod 3 = \sum_{j=0}^{k} r_j \bmod 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \equiv \sum_{j=0}^{k} r_j \pmod 3\,.$$

Portanto n é divisível por 3 se e só se $\sum_{j=0}^{k} r_j$ for divisível por 3.