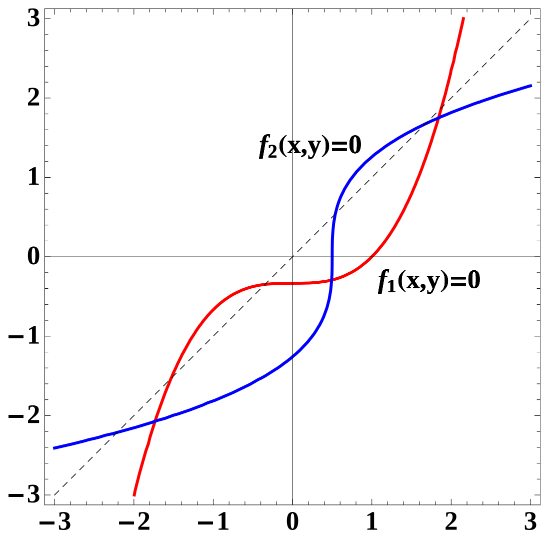
Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

2º **Teste – 14 de Dezembro de 2011 – Resolução**

1. a) Os gráficos



Além disso

$$\frac{x^3-1}{3} > x \quad \forall x > 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^3+2}{4} > y \quad \forall y > 2\,,$$

$$\frac{x^3-1}{3} < x \quad \forall x < -2 \qquad \text{e} \qquad \frac{y^3+2}{4} < y \quad \forall y < -2\,.$$

Portanto, o sistema de equações $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ tem três soluções. As soluções são, aproximadamente,

$$(x, y) \approx (-1.74, -2.08)\,, \qquad (x, y) \approx (0.494, -0.293)\,, \qquad (x, y) \approx (1.84, 1.75).$$

b) Temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

em que

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^3+2)/4 \\ (x^3-1)/3 \end{pmatrix}.$$

Seja $D = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 3/4\right\}$. O conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é fechado e convexo e a função $\mathbf{G}$ indefinidamente diferenciável em D. Mais, $\mathbf{G}(D) \subset D$ visto que

$$|g_1(x,y)| \leq \tfrac{1}{4}\left(|y|^3+2\right) \leq \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{155}{256} < \tfrac{3}{4} \qquad \forall \mathbf{x} \in D\,,$$

$$|g_2(x,y)| \leq \tfrac{1}{3}\left(|x|^3+1\right) \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{91}{192} < \tfrac{3}{4} \qquad \forall \mathbf{x} \in D\,.$$

Temos ainda

$$\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{4}\,y^2 \\ \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue-se que

$$\max_{\mathbf{x}\in D} \|\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\|_\infty = \max_{\mathbf{x}\in D}\ \max\left\{\frac{3}{4}\,|y|^2, |x|^2\right\} = \frac{9}{16} < 1\,,$$

ou seja, $\mathbf{G}$ é contractiva em D. Assim, as condições do teorema do ponto fixo são satisfeitas e o sistema não linear $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ admite uma e uma só solução em D.

2. A função $g(x) = a\,x + \frac{b}{x}$ é a melhor aproximação mínimos quadrados de $f(x) = 4\,x^2$ no intervalo $[1, 2]$ se e só se

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

onde

$$\varphi_0(x) = x\,, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{x}\,, \quad (q, p) = \int_1^2 q(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Obtém-se assim

$$\begin{pmatrix} 7/3 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

donde vem

$$g(x) = 9\,x - \frac{6}{x}\,.$$

3. Tem-se

$$Q(1) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 = \int_0^3 \mathrm{d}x = I(1)\,,$$

$$Q(x) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,2 = \frac{9}{2} = \int_0^3 x\,\mathrm{d}x = I(x)\,,$$

$$Q(x^2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,4 = \frac{15}{2} \neq 9 = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = I(x^2)\,,$$

ou seja, o grau de precisão da quadratura é 1. Por conseguinte, temos para o erro

$$E(f) := I(f) - Q(f) = \frac{E(x^2)}{2}\,f''(\xi)\,, \qquad \xi \in (0, 3)\,.$$

Portanto

$$E(f) = \frac{9 - 15/2}{2}\,f''(\xi) \; = \frac{3}{4}\,f''(\xi)\,.$$

A fórmula composta em n subintervalos ($2n$ nós de integração) é dada por

$$Q_n(f) = \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{1}{n} + j\,\frac{3}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n} + j\,\frac{3}{n}\right)\right)$$

Note-se que $Q(f)$ é a fórmula de Newton-Cotes aberta com 2 pontos.

4. A quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j\, f(x_j)$, onde os $n+1$ nós de integração $x_j, j = 0, \ldots, n$, são os zeros distintos do polinómio de Legendre P_{n+1}, tem grau de precisão $2n+1$.

Sejam

$$p_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)^2 \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \,,$$

onde os $x_i, j = 0, \ldots, n$, são os zeros de P_{n+1}. Tendo em conta que

$$p_k(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,, \qquad\qquad p_k(x_j) = \begin{cases} 0 \,, & \text{se } \ j \neq k \\ \displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)^2 > 0 \ , & \text{se } \ j = k \end{cases}$$

temos

$$I(p_k) = \int_{-1}^{1} p_k(x)\, \mathrm{d}x > 0 \,, \qquad Q_n(p_k) = \sum_{j=0}^{n} A_j\, p_k(x_j) = A_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)^2 \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \,.$$

Por outro lado, $I(p_k) = Q_n(p_k)$, visto que p_k é um polinómio de grau $2n$. Assim

$$A_k > 0 \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \,.$$

5. a) O método proposto é um método de Runge-Kutta explícito de 3 etapas em que

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = 1, \qquad a_{21} = \frac{1}{2},\ a_{31} = -1,\ a_{32} = 2,\ a_{ij} = 0\,,\ i \leq j\,, \qquad b_1 = \frac{1}{6},\ b_2 = \frac{4}{6},\ b_3 = \frac{1}{6}\,;$$

note-se que $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $i = 1, 2, 3$. A tabela de Butcher correspondente

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Temos $b_1 + b_2 + b_3 = 1$. Logo, o método é consistente. Além disso

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2} \,, \qquad b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3} \,, \qquad b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6} \,,$$

o que garante que a ordem (de consistência) do método é pelo menos 3.

Os métodos de Runge-Kutta explícitos são métodos de passo simples da forma geral

$$y_{j+1} = y_j + h\, \Phi(t_j, y_j; h) \,, \tag{1}$$

onde $\Phi(\cdot, \cdot; 0)$ é lipschitziana em relação à segunda variável. Suponha que $y_0 = y(t_0)$. Então o método (1) é convergente se e só se for consistente. Em particular, o método proposto é convergente.

b) Temos

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 2, \quad h = 2, \quad y_0 = 0, \quad y_1 \approx y(2), \quad f(t, y(t)) = \frac{t}{1 + y(t)^2} \ .$$

Assim

$$k_1 = f(t_0, y_0) = 0\,, \quad k_2 = f(t_0{+}1, y_0{+}k_1) = f(1, 0) = 1\,, \quad k_2 = f(t_0 + 2, y_0 - 2\,k_1{+}4\,k_2) = f(2, 4) = \frac{2}{17}\,.$$

Conclui-se que

$$y(2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{3}\left(k_1 + k_2 + k_3\right) = \frac{1}{3}\left(4 + \frac{2}{17}\right) = \frac{70}{51}\,.$$