Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

1º **Teste – 29 de Outubro de 2011 – Resolução**

1. a) Temos

$$p_{x_1,a_1}(a_1,a_2) = \frac{a_1}{x_1}\left(1+\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-a_2}}\right) = \frac{a_1}{x_1}\,\frac{\sqrt{a_1^2-a_2}+a_1}{\sqrt{a_1^2-a_2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-a_2}} = \frac{a_1}{x_1-a_1}$$

$$p_{x_1,a_2}(a_1,a_2) = \frac{a_2}{x_1}\left(-\frac{1}{2\sqrt{a_1^2-a_2}}\right) = -\,\frac{a_2}{2x_1(x_1-a_1)}$$

De ígual modo

$$p_{x_2,a_1}(a_1,a_2) = -\,\frac{a_1}{x_2-a_1}\,, \qquad p_{x_2,a_2}(a_1,a_2) = \frac{a_2}{2x_2(x_2-a_1)}$$

Tendo em conta que

$$\delta_{\tilde{x}_i} = p_{x_i,a_1}\,\delta_{\tilde{a}_1} + p_{x_i,a_2}\,\delta_{\tilde{a}_2}\,, \qquad i=1,2\,,$$

conclui-se que

$$|\delta_{\tilde{x}_i}| \le \frac{|a_1|}{|x_i-a_1|}\,|\delta_{\tilde{a}_1}| + \frac{|a_2|}{|2x_i\,(x_i-a_1)|}\,|\delta_{\tilde{a}_2}|\,, \qquad i=1,2\,.$$

b. (i) Quando $0 < a_2 < 1 < a_1$ e $a_2 \approx 0$, temos (note-se que $x_1 x_2 = a_2$)

$$x_1 \approx 2a_1\,, \qquad x_2 = a_2/x_1 \approx a_2/2a_1 \ll 1\,.$$

Assim

$$|p_{x_1,a_1}(a_1,a_2)| \approx 1\,, \qquad |p_{x_1,a_2}(a_1,a_2)| \approx 0$$

e o cálculo de x_1 é um problema bem condicionado. Temos ainda

$$|p_{x_2,a_1}(a_1,a_2)| \approx 1\,, \qquad |p_{x_2,a_2}(a_1,a_2)| \approx \frac{|a_1|}{|x_2-a_1|} \approx 1$$

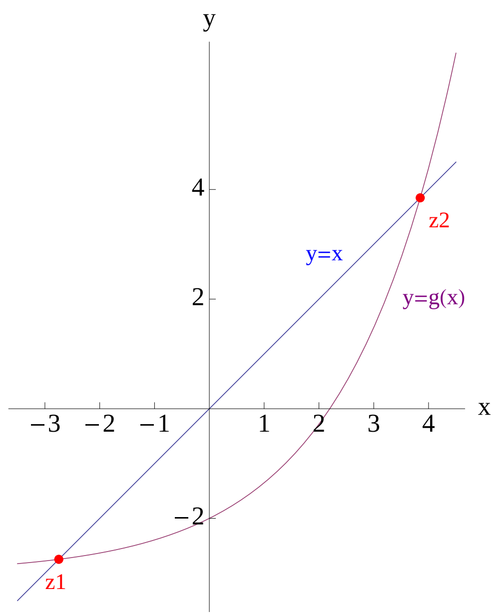
e o cálculo de x_2 é também um problema bem condicionado.

(ii) Se $0 < a_2 < a_1^2$ e $a_2 \approx a_1^2$, então $x_1 \approx x_2 \approx a_1$ pelo que

$$\lim_{a_2 \to a_1^2} |p_{x_i,a_j}(a_1,a_2)| = +\infty\,, \qquad i,j=1,2\,.$$

Neste caso ambos os problemas (o cálculo de x_1 e de x_2) são mal condicionados.

2. a) O gráfico



Temos $g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$g'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad g'(x) > 1\,, \quad \text{se} \ \ x > 2\ln 2\,, \qquad 0 < g'(x) < 1\,, \quad \text{se} \ \ x < 2\ln 2\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3\,, \qquad g(0) = -2 < 0\,, \qquad g(8\,\ln 2) = 13 > 8\,\ln 2\,.$$

Segue-se que a função g tem dois e apenas dois pontos fixos, i.e. pontos z_j tais que $z_j = g(z_j)$, $j = 1, 2$. Observando o gráfico podemos dizer que $z_1 \in [-3, -2]$ e $z_2 \in [3, 4]$.

b) Pelo gráfico verifica-se que o método do ponto fixo nunca converge para o ponto fixo z_2 pois $|g'(z_2)| > 1$.

Para a aproximação do ponto fixo z_1, considera-se o intervalo (fechado) $I = [a, b]$ com $a < z_1$ e $b < 2\,\ln 2$. Assim temos

$$g(a) \in (a, z_1)\,, \qquad g(b) \in (z_1, b)\,,$$

e, atendendo a que $g'(x) > 0 \ \ \forall x \in I$, obtém-se $g(I) \subset I$. Verifica-se ainda

$$\max_{x\in I} |g'(x)| = |g'(b)| < g'(2\,\ln 2) = 1\,.$$

Portanto, qualquer que seja $x_0 \in I$, o método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para o ponto fixo z_1 de g.

De facto, o método converge (para z_1) para qualquer aproximação inicial $x_0 < z_2$, visto que

$$z_1 = g(z_1) < g(x_n) = x_{n+1} < x_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,;$$

note-se que a função iteradora g é estritamente monótona crescente e que $g(x) < x \ \ \forall x \in (z_1, z_2)$. Conclui-se que a sucessão $\{x_n\}$ é estritamente monótona decrescente e inferiormente limitada por z_1; logo converge para z_1.

3. Tem-se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}e^{x/2} + 2^x \ln 2 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad f''(x) = \tfrac{1}{4}e^{x/2} + 2^x\,(\ln 2)^2 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = -1 < 0\,, \qquad f(1) = \sqrt{e} - 1 \approx 0.65 > 0\,.$$

Pelo teorema de Bolzano existe pelo menos uma solução $z \in (0,1)$ pois $f(0)f(1) < 0$. A unicidade resulta do teorema de Rolle visto que $f'(x) \neq 0\ \forall\, x \in [0,1]$.

As condições suficientes de convergência no intervalo $I = [a,b]$:

(i) $f(a)f(b) \leq 0$;

(ii) $f'(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in I$;

(iii) $f''(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in I$ ou $f''(x) \leq 0 \ \ \forall\, x \in I$;

(iv) $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a\,, \qquad \left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a\,.$

As condições (i) e (ii) já foram verificadas. Além disso

$$f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in I\,, \qquad \left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| = \frac{2}{1+\ln 4} < 1\,, \qquad \left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| \approx 0.29 < 1$$

Podemos então afirmar que, qualquer que seja $x_0 \in I$, o método de Newton converge para a solução única de $f(x) = 0$ em I.

Estimativa de erro

$$|z - x_{n+1}| = |e_{n+1}| \leq K\,|e_n|^2\,, \quad n = 0, 1, \dots\,, \qquad\qquad K = \frac{\max_{x\in I}|f''(x)|}{2\,\min_{x\in I}|f'(x)|}\,.$$

Escolhendo $x_0 = 0.5$, temos

$$|e_0| \leq 0.5\,, \qquad K = \frac{|f''(1)|}{2\,|f'(0)|} \approx 0.575\,, \qquad |e_1| \leq K\,|e_0|^2 \approx 0.144\,, \quad |e_2| \leq K\,|e_1|^2 \approx 0.0119\,,$$

$$|e_3| \leq K\,|e_2|^2 \approx 8.2 \cdot 10^{-5}\,, \qquad |e_4| \leq K\,|e_3|^2 \approx 3.8 \cdot 10^{-9}\ ,.$$

O erro relativo (tendo em conta que $z \in [0.5, 1]$)

$$|\delta_n| := \frac{|z - x_n|}{|z|} \leq 2\,|e_n| \qquad \Rightarrow \qquad |\delta_4| \leq 2\,|e_4| \lesssim 7.6 \cdot 10^{-9} < 10^{-5}\,.$$

$$x_0 = 0.5\,, \quad x_1 = 0.686011\,, \quad x_2 = 0.676116\,, \quad x_3 = 0.676086\,, \quad z \approx x_4 = 0.676086\,.$$

4. Seja

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Temos

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \beta & -2\alpha \\ -\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = \beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2 = (\beta-\alpha)\,(\beta+2\alpha)\,.$$

Portanto

$$\|A\|_1 = \max\Big\{|\alpha+\beta| + |\alpha|, |2\alpha| + |\beta|\Big\} = 2|\alpha| + |\beta|\,,$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{|\det(A)|}\ \max\Big\{|\beta| + |-\alpha|, |-2\alpha| + |\alpha+\beta|\Big\} = \frac{1}{|\det(A)|}\Big(2\,|\alpha| + |\beta|\Big)\,,$$

$$\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1\,\|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{|\det(A)|}\ \Big(2\,|\alpha| + |\beta|\Big)^2\,.$$

Se $\beta \approx \alpha$ e $\beta \approx -2\alpha$ então $\det(A) \approx 0$, ou seja $\mathrm{cond}_1(A) \gg 1$ e a matriz A é mal condicionada.

Tem-se ainda

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (2\beta+\alpha)\,\lambda + \det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2\beta + \alpha \pm \sqrt{(2\beta+\alpha)^2 - 4\det(A)}}{2}\,.$$

Atendendo a que

$$(2\beta+\alpha)^2 - 4\det(A) = 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2 - 4\beta^2 - 4\alpha\beta + 8\alpha^2 = 9\alpha^2\,,$$

temos

$$\lambda = \frac{2\beta + \alpha \pm 3\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \beta + 2\alpha \ \vee\ \lambda = \beta - \alpha\,.$$

Conclui-se que

$$\mathrm{cond}_\sigma(A) = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} = \frac{\max\{|\beta+2\alpha|, |\beta-\alpha|\}}{\min\{|\beta+2\alpha|, |\beta-\alpha|\}}\,.$$

b) Temos $\beta = 2\alpha > 0$. Portanto

$$A = \alpha\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz estritamente diagonal dominante por linhas o que garante que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convirjam para a solução única do sistema linear $Ax = b$, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

As matrizes de iteração

Jacobi : $$C_J = -\,D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\,2/3 \\ -\,1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel : $$C_{GS} = -\,(D+L)^{-1}\,U = -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\,2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Segue-se que

$$\det(C_J - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad r_\sigma(C_J) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577\,,$$

$$\det(C_{GS} - \lambda I) = \lambda\,(\lambda - \frac{1}{3}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \ \vee\ \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad r_\sigma(C_{GS}) = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

Visto que $r_\sigma(C_{GS}) < r_\sigma(C_J)$, o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente.