Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Matemática Computacional
LMat, MEEC, MEFT, MEQ

Primeiro Teste

10 de Novembro de 2012

Justifique todas as respostas e apresente todos os cálculos que tiver que efetuar

1. Seja ϕ a função definida por $\phi(x) = \sqrt{1-x} - 1$, para $x \leq 1$.

   (a) Analise o condicionamento do problema do cálculo de $\phi(x)$ nos casos em que (i) $x \approx 0$ e (ii) $x \approx 1$ e $x < 1$. **[1.5]**

   (b) Proponha um algoritmo estável para o cálculo de $\phi(x)$ num sistema de ponto flutuante quando $x \approx 0$. **[1.5]**

2. Considere a equação

$$\phi(x) = x^3 - 1$$

   onde ϕ está definida na questão 1.

   (a) Mostre que a equação tem uma única solução real z e que esta pertence ao intervalo $[0, 1]$. **[1.0]**

   (b) Mostre que z é ponto fixo da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = 1 - x^6 \,.$$

   O método do ponto fixo com a função iteradora g poderá convergir para z, pelo menos localmente? **[1.5]**

   (c) Mostre que o método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{1 + 5x_n^6}{1 + 6x_n^5},\ n = 0, 1, 2, ...$$

   com iterada inicial $x_0 = 1$ pode ser usado para aproximar z. Qual a sua ordem de convergência? **[1.5]**

   (d) Utilize o método da alínea anterior para obter um valor aproximado de z com um erro inferior a 10^{-3}. **[1.5]**

3. Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $\|b\|_\infty \geq 1$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} .$$

   O vetor b foi perturbado, tendo a solução $\tilde{x}$ do sistema correspondente apresentado um resíduo $A\tilde{x} - b$ tal que $\|A\tilde{x} - b\|_\infty \leq 10^{-4}$. O que pode dizer sobre o erro relativo de $\tilde{x}$? **[1.5]**

Resolução

1. (a) Como
$$\phi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad (x<1),$$
o número de condição de ϕ dado por
$$p_\phi(x) = \frac{x}{2\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})} \quad (x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}).$$
(i) Atendendo a que $\lim_{x\to 0} p_\phi(x)$ é da forma $\frac{0}{0}$ podemos usar a regra de Cauchy para determinar o limite. De modo alternativo, escreve-se
$$p_\phi(x) = \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} = \frac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}},$$
pelo que $|p_\phi(x)| \approx 1$ quando $x \approx 0$ e o problema é bem condicionado.
(ii) Como
$$\lim_{x\to 1^-} |p_\phi(x)| = +\infty$$
conclui-se que se $x \approx 1$ e $x < 1$ então $|p_\phi(x)|$ é muito grande, pelo que neste caso, o problema é mal condicionado.

(b) Atendendo a que, para $x \approx 0$, se tem
$$\sqrt{1-x} \approx 1$$
devemos modificar a expressão de $\phi(x)$ de modo a evitar cancelamento subtrativo. Mais concretamente,
$$\phi(x) = \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{-x}{\sqrt{1-x}+1}$$
e podemos calcular $\phi(x)$ através do algoritmo
$$w_1 = 1-x, \quad w_2 = \sqrt{w_1}, \quad w_3 = w_2+1, \quad w_4 = -x/w_3\,,$$
onde não ocorre cancelamento subtrativo quando $x \approx 0$.

2. (a) Tem-se
$$\phi(x) = x^3 - 1 \wedge x \le 1 \Longleftrightarrow \sqrt{1-x} = x^3 \wedge x \le 1\,.$$
Como $\sqrt{1-x} \ge 0$ para todo o $x \le 1$ e $x^3 < 0$ se $x < 0$, a equação não tem raizes negativas.
A equação que pretendemos resolver pode-se escrever na forma $\psi(x) = 0$ com $\psi(x) := \sqrt{1-x} - x^3$ e, como já verificámos, basta procurar a solução no intervalo $[0,1]$. Tem-se
$$\psi(0) \times \psi(1) = -1 < 0$$
e portanto existe uma solução em $[0,1]$. Como
$$\psi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - 3x^2 < 0,\ \forall x < 1,$$
existe apenas uma raiz da equação.

(b) Tem-se

$$\phi(x) = x^3 - 1 \wedge x \in [0,1] \Longleftrightarrow \sqrt{1-x} = x^3 \wedge x \in [0,1] \Longleftrightarrow 1 - x = x^6 \wedge x \in [0,1]$$

$$\Longleftrightarrow x = 1 - x^6 \wedge x \in [0,1],$$

o que mostra que z é ponto fixo de g.
É fácil ver que $g'(x) = -6x^5$ e

$$|g'(x)| = 6x^5 > 1, \, \forall x > \sqrt[5]{\frac{1}{6}} = 0.698827$$

Uma vez que $\psi(0.698827)\psi(1) < 0$ tem-se $z \in]0.698827, 1[$ e $|g'(z)| > 1$, ou seja, z é ponto fixo repulsor de g. Logo, o método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$, nunca vai convergir para z, nem sequer localmente numa vizinhança de z (a menos que por acaso $x_k = z$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$).

(c) Começamos por mostrar que o método iterativo dado corresponde à aplicação do método de Newton à equação

$$x^6 + x - 1 = 0,$$

a qual é equivalente à equação $\sqrt{1-x} - x^3 = 0$ quando $x \in [0,1]$. De facto, com $f(x) := x^6 + x - 1$ a fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 + x_n - 1}{6x_n^5 + 1}$$

ou ainda, simplificando a expressão do segundo membro,

$$x_{n+1} = \frac{5x_n^6 + 1}{6x_n^5 + 1}.$$

A função $f(x) := x^6 + x - 1$ é de classe C^2 em $[0.75, 1]$ com

$$f'(x) = 6x^5 + 1\,,$$
$$f''(x) = 30x^4\,.$$

Tem-se

$$f(0.75)f(1) < 0$$

e é claro que

$$f'(x) > 0, \; f''(x) > 0, \; \forall x \in [0.75, 1].$$

Como $f(1) = 1 > 0$ tem-se ainda

$$f(1)f''(x) > 0, \; \forall x \in [0.75, 1]\,.$$

Assim, a função f e a iterada inicial $x_0 = 1$ satisfazem as quatro condições suficientes de convergência do método de Newton no intervalo $[0.75, 1]$[1]. Nestas condições garante-se também que o método de Newton tem convergência quadrática, uma vez que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^2} = \frac{|f''(z)|}{2|f'(z)|} > 0\,.$$

(d) Com $x_0 = 1$, obtemos:

$$x_1 = \frac{5x_0^6 + 1}{6x_0^5 + 1} = 0.857143, \qquad x_2 = \frac{5x_1^6 + 1}{6x_1^5 + 1} = 0.789952, \qquad x_3 = \frac{5x_2^6 + 1}{6x_2^5 + 1} = 0.778373\,.$$

Agora, atendendo a que f' é positiva e crescente em $[0.75, 1]$, vem

$$|z - x_3| \leq \frac{|f(x_3)|}{\min_{x\in[0.75,1]} |f'(x)|} \leq \frac{|f(x_3)|}{f'(0.75)} = 0.317183 \times 10^{-3} < 10^{-3}.$$

3. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{bmatrix} -3999 & 2000 \\ 2000 & -1000 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 5.999 \times 5999 = 3.5999 \times 10^4.$$

De $\|b\|_\infty \geq 1$ e $\|A\tilde{x} - b\|_\infty \leq 10^{-4}$ obtém-se

$$\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty = \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\|A\tilde{x} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 10^{-4}.$$

Recordando que

$$\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty \leq \text{cond}_\infty(A) \|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$$

vem

$$\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty \leq 3.5999 \times 10^4 \times 10^{-4} = 3.5999$$

pelo que o erro relativo de $\tilde{x}$ pode ser muito grande.

[1] Aqui também podemos usar o intervalo $[0, 1]$.