Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

2º **Teste – 14 de Dezembro de 2011**

1. Considere o seguinte sistema de equações não lineares

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f_1(x,y) = x^3 - 3\,y - 1 = 0 \\ f_2(x,y) = 4\,x - y^3 - 2 = 0\,, \end{cases}$$

onde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x} = (x, y)$.

a) Trace as curvas $f_1(x,y) = 0$ e $f_2(x,y) = 0$ e localize aproximadamente todos os zeros do sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$. **[0.5]**

b) Mostre que o sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ tem uma e uma só solução no conjunto

$$D = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{3}{4} \right\}. \qquad [1.5]$$

2. Determine as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que a função $g(x) = a\,x + \frac{b}{x}$ seja a melhor aproximação mínimos quadrados de $f(x) = 4\,x^2$ no intervalo $[1, 2]$. **[2.0]**

3. Seja $I(f) = \int_0^3 f(x)\,dx$ e considere a seguinte fórmula de quadratura

$$Q(f) = \frac{3}{2}\,f(1) + \frac{3}{2}\,f(2)\,,$$

para a aproximação numérica de $I(f)$. Determine o grau de precisão da quadratura e obtenha uma expressão para o erro $I(f) - Q(f)$. Apresente a fórmula composta correspondente. **[2.0]**

4. Mostre que, na quadratura de Gauss-Legendre $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j\, f(x_j)$, os pesos $A_j, j = 0, \ldots, n$, são todos positivos. **[1.5]**

5. Considere o seguinte método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} & y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}\,(k_1 + 4\,k_2 + k_3)\,, \\ & k_1 = f(t_j, y_j)\,, \quad k_2 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}\,k_1\right)\,, \quad k_3 = f\Big(t_j + h, y_j - h\,k_1 + 2\,h\,k_2\Big)\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

a) Construa a tabela de Butcher associada ao método (1). Mostre que o método é consistente. Determine a ordem do método. O método é convergente? Justifique a sua resposta. **[1.5]**

b) Aproxime a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{1 + y^2(t)}\,, \quad t > 0 \\[2ex] y(0) = 0 \end{cases}$$

em $t = 2$ pelo método (1). Tome $h = 2$ e $y_0 = y(0)$. **[1.0]**