Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Matemática Computacional (Mestrado em Engenharia Física Tecnológica)

1º **Teste – 29 de Outubro de 2011**

1. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, a equação $x^2 - 2a_1 x + a_2 = 0$ tem duas soluções (reais ou complexas) tais que

$$x_1 = a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}\,, \qquad x_2 = a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}\,.$$

a) Relacione os erros relativos de x_1 e x_2 com os erros relativos de a_1 e a_2, isto é, obtenha as estimativas

$$|\delta_{\tilde{x}_i}| \leq \frac{|a_1|}{|x_i - a_1|}\,|\delta_{\tilde{a}_1}| + \frac{|a_2|}{|2x_i\,(x_i - a_1)|}\,|\delta_{\tilde{a}_2}|\,, \qquad i = 1, 2\,.$$ **[1.5]**

b) Analise o condicionamento do problema do cálculo de x_1 e x_2 nos casos em que

(i) $0 < a_2 < 1 < a_1$, $a_2 \approx 0$;

(ii) $0 < a_2 < a_1^2$, $a_2 \approx a_1^2$. **[1.5]**

2. Considere a função iteradora $g(x) = e^{x/2} - 3$.

a) Trace o gráfico da função g e localize aproximadamente os pontos fixos de g. **[0.5]**

b) Determine todos os valores iniciais $x_0 \in \mathbb{R}$ para os quais o método iterativo do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \ldots$ converge para um dos pontos fixos. **[1.5]**

3. Mostre que a equação $e^{x/2} - 3 + 2^x = 0$ tem uma e uma só solução $z \in \mathbb{R}$. Obtenha uma aproximação de z pelo método de Newton com um erro relativo inferior a 10^{-5}. Escolha a aproximação inicial de modo que as condições suficientes de convergência estejam satisfeitas. **[2.0]**

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Determine $\mathrm{cond}_1(A)$ e $\mathrm{cond}_\sigma(A)$ e mostre que a matriz A é mal condicionada para $\beta \approx \alpha$ e $\beta \approx -2\alpha$. **[1.5]**

b) Seja $\beta = 2\alpha > 0$. Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução única do sistema linear $Ax = b$, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$. Qual dos métodos converge mais rapidamente? **[1.5]**