Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 3 (a entregar na aula prática da semana de 2/10/2006)

Esboce a região

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, \sqrt{1 - x^2 - y^2} < z < 2 - x^2 - y^2, \ x, y > 0\}$$

e escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int\int\int \, dx\, dy\, dz$ e da forma $\int\int\int \, dz\, dy\, dx$.

Resolução

A região S está contida no interior do cilindro de raio 1 ($x^2 + y^2 = 1$), entre a esfera de raio 1 ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) e o parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$.

A intersecção de $\overline{S}$ com o plano yOz é a região representada na Figura 1:

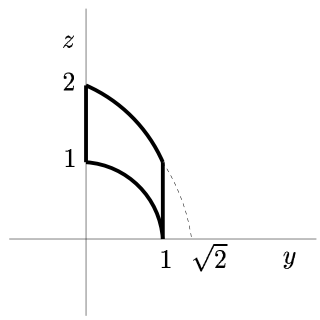

Figure 1:

O sólido S pode assim ser obtido a partir desta região do plano yOz por rotação de $\pi/2$ em torno do eixo Oz:

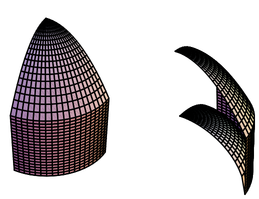

Figure 2:

Para obter uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int\int\int \, dx\, dy\, dz$ vamos começar por fazer cortes perpendiculares ao eixo Oz fazendo $z = const.$

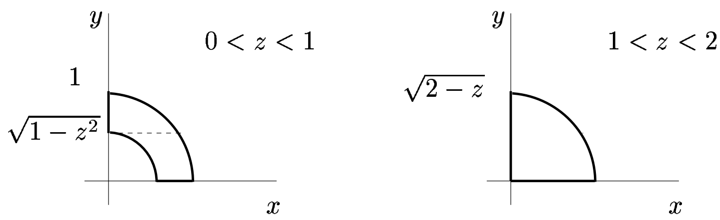

Figure 3:

Os cortes para $0 < z < 1$ são quartos de coroa circular limitados pela esfera e pelo cilindro enquanto que os cortes para $1 \leq z < 2$ são quartos de círculo limitados pelo parabolóide (ver Figura 3).

Nos cortes com $0 < z < 1$ temos que, para y entre $y = 0$ e $y = \sqrt{1-z^2}$, x varia entre $x = \sqrt{1-z^2-y^2}$ e $x = \sqrt{1-y^2}$, enquanto que, para y entre $y = \sqrt{1-z^2}$ e $y = 1$, x varia entre $x = 0$ e $x = \sqrt{1-y^2}$.

Nos cortes com $1 < z < 2$ temos que, para y entre $y = 0$ e $y = \sqrt{2-z}$, x varia entre $x = 0$ e $x = \sqrt{2-z-y^2}$.

Assim, a expressão obtida para o volume é:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx\, dy\, dz + \int_0^1 \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dx\, dy\, dz \\ + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} 1 \, dx\, dy\, dz \ .$$

Para obter uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int\int\int dz\, dy\, dx$ vemos facilmente que a projecção desta região no plano xOy é o quarto de circunferência de raio 1 representado na figura 4 e que, para (x, y) nesta região, z varia entre o seu valor na esfera ($z = \sqrt{1-x^2-y^2}$) e o seu valor no parabolóide ($z = 2 - x^2 - y^2$).

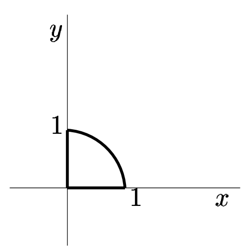

Figure 4:

Assim a expressão pretendida para o volume de S é:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} 1 \, dz\, dy\, dx \ .$$