Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 5 (a entregar na aula prática da semana de 16/10/2006)

Considere a curva C dada pela intersecção de um parabolóide com um plano,

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2; \ 2x + z = 3\right\}.$$

a) Calcule a coordenada x_{CM} do centro de massa de C, sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma = \sqrt{1 + y^2}$.

b) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $f = (y, 0, 0)$ sobre um ponto material que percorre C uma vez no sentido horário (para um observador colocado no ponto $(0, 0, 10)$).

Resolução

a) Para encontrar uma representação paramétrica de C consideremos a sua projecção, $\widetilde{C}$, no plano Oxy,

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 3 - 2x \ \Leftrightarrow \ \widetilde{C} \ : \ (x + 1)^2 + y^2 = 4.$$

Esta projecção $\widetilde{C}$ é então uma circunferência de raio 2 com centro no ponto $(-1, 0)$. Uma representação paramétrica de $\widetilde{C}$ é dada por:

$$\widetilde{g} \ : \ \begin{cases} x & = & -1 + 2\cos(t) \\ y & = & 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

e uma representação paramétrica de C é dada por:

$$g \ : \ \begin{cases} x & = & -1 + 2\cos(t) \\ y & = & 2\,\mathrm{sen}(t) \\ z & = & 5 - 4\cos(t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi. \tag{1}$$

Assim $g'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)$ e

$$||g'(t)|| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + 16\,\mathrm{sen}^2(t)} = 2\sqrt{1 + 4\,\mathrm{sen}^2(t)}.$$

A massa M_C de C é então dada por

$$\begin{aligned} M_C = \int_C \sigma \ &= \ \int_0^{2\pi} \sigma(g(t)) \ ||g'(t)|| \ dt = \\ &= \ \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\,\mathrm{sen}^2(t)} \ 2\sqrt{1 + 4\,\mathrm{sen}^2(t)} \ dt = \\ &= \ 2\int_0^{2\pi} \left(1 + 4\,\mathrm{sen}^2(t)\right) \ dt = \\ &= \ 2\,[t]_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) \ dt = \\ &= \ 4\pi + [4t]_0^{2\pi} - 2\,\mathrm{sen}(2t)|_0^{2\pi} = \\ &= \ 12\pi. \end{aligned}$$

A coordenada x do centro de massa é

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{M_C}\int_C x\sigma = \\
&= \frac{1}{12\pi}\int_0^{2\pi}(-1+2\cos(t))\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2(t)}\;2\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2(t)}\;dt = \\
&= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}(-1+2\cos(t))\left(1+4\operatorname{sen}^2(t)\right)\;dt = \\
&= \frac{1}{6\pi}\left(-2\pi-2\int_0^{2\pi}(1-\cos(2t))\;dt+2\left[\operatorname{sen}(t)\right]_0^{2\pi}+\frac{8}{3}\left[\operatorname{sen}^3(t)\right]_0^{2\pi}\right) = \\
&= -1.
\end{aligned}$$

b) O sentido de g em (1) é o oposto do pretendido. Assim

$$\begin{aligned}
\oint_C f &= -\int_0^{2\pi} f(g(t))\cdot g'(t)\;dt = \\
&= -\int_0^{2\pi}(2\operatorname{sen}(t),0,0)\cdot(-2\operatorname{sen}(t),2\cos(t),4\operatorname{sen}(t))\;dt = \\
&= \int_0^{2\pi}4\operatorname{sen}^2(t)\;dt = 2\int_0^{2\pi}(1-\cos(2t))\;dt = \\
&= 4\pi-\left[\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{2\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$