Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 6 (a entregar na aula prática da semana de 23/10/2006)

a) Mostre que o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}\,,\, \frac{x}{1+x^2y^2} + y \right)$$

é um campo fechado em $\mathbb{R}^2$.

b) Justifique porque é que $\mathbf{F}$ é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, sem calcular explicitamente um potencial escalar. Obtenha depois um potencial escalar $\phi(x,y)$ para o campo $\mathbf{F}$.

c) Seja C o caminho que percorre no sentido anti-horário o arco da circunferência de raio 2 centrada na origem de $\mathbb{R}^2$ ligando os pontos $(2,0)$ e $(0,2)$. Calcule

$$\int_C (\mathbf{F}+\mathbf{G}) \,.\, d\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{G}$ é o campo vectorial $\mathbf{G}(x,y) = (xy, y^2)$.

Resolução

a) O domínio de $\mathbf{F}$ é obviamente $\mathbb{R}^2$ (note que $1 + x^2y^2 \neq 0$ para todos os pontos (x,y) em $\mathbb{R}^2$). Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{(1+x^2y^2).1 - x.2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{(1+x^2y^2).1 - y.2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Assim $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ e portanto $\mathbf{F}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$.

b) Pela alínea anterior, $\mathbf{F}$ é um campo fechado em $\mathbb{R}^2$, sendo $\mathbb{R}^2$ um domínio em estrela (e simplesmente conexo). Podemos então concluir que $\mathbf{F}$ é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$.

Um potencial escalar $\phi(x,y)$ para $\mathbf{F}$ tem de satisfazer duas condições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{(1+x^2y^2)} &\Rightarrow \quad \phi(x,y) &= \arctan(xy) + d(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{(1+x^2y^2)} + y &\Rightarrow \quad \phi(x,y) &= \arctan(xy) + y^2/2 + e(x), \end{aligned}$$

onde $d(y)$ e $e(x)$ são funções arbitrárias de classe C^1. Assim um potencial escalar ϕ é dado por:

$$\phi(x,y) = \arctan(xy) + y^2/2 + c,$$

com c uma constante arbitrária.

c) Sendo

$$\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \,.\, d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \,.\, d\mathbf{r},$$

vamos calcular cada termo separadamente. Usando o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha de campos gradiente, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} &= \phi(0,2) - \phi(2,0) \\ &= (\arctan(0) + 2 + c) - (\arctan(0) + 0 + c) = 2. \end{aligned}$$

Uma parametrização de C com o sentido anti-horário indicado é

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) & t \in [0, \pi/2] \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$$

Pela definição do integral de linha de um campo vectorial, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{G} \,.\, d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (4\cos(t)\sin(t))(-2\sin(t)) + (4\sin^2(t))(2\cos(t))\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-8\cos(t)\sin^2(t) + 8\cos(t)\sin^2(t))\, dt = 0. \end{aligned}$$

Concluindo, temos

$$\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \,.\, d\mathbf{r} = 2 + 0 = 2.$$