Análise Matemática III
1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 8 (a entregar na aula prática da semana de 13/11/2006)

Considere o sistema

$$\begin{cases} u^2 + v = x - y \\ xu - yv = 2 \end{cases}$$

1. Mostre que este sistema determina (u, v) como funções de (x, y) de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, -1)$.
2. Calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 1)$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1)$.

Resolução:

a) Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x, y, u, v) = (u^2 + v - x + y, xu - yv - 2).$$

Trata-se de uma função de classe C^1 pelo que o Teorema da Função Implícita garante a existência de funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ desde que $F(1, 1, 1, -1) = (0, 0)$ e

$$\det \frac{\partial F}{\partial(u, v)}(1, 1, 1, -1) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{|(1,1,1,-1)} \neq 0.$$

Como

$$\det \begin{bmatrix} 2u & 1 \\ x & -y \end{bmatrix}_{|(1,1,1,-1)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3,$$

conclui-se que existe uma vizinhança V do ponto $(x, y) = (1, 1)$ e duas funções $u, v : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $u(1, 1) = 1$ e $v(1, 1) = -1$. Para além disso temos $F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = (0, 0)$ nessa vizinhança.

2.(b) Da equação $F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = (0, 0)$, derivando em ordem a y, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Calculando as derivadas no ponto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, -1)$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}(1,1,1,-1) + \frac{\partial F_1}{\partial u}(1,1,1,-1)\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) + \frac{\partial F_1}{\partial v}(1,1,1,-1)\frac{\partial v}{\partial y}(1,1) &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(1,1,1,-1) + \frac{\partial F_2}{\partial u}(1,1,1,-1)\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(1,1,1,-1)\frac{\partial v}{\partial y}(1,1) &= 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 1 + 2\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) + \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) &= 0 \\ 1 + \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) - \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) &= 0. \end{cases}$$

Obtemos assim o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

donde se conclui que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{3}.$$