Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

1º Semestre 2001/2002

1º Teste - Todos os cursos

3 de Novembro de 2001

(3 val.) 1. a) Diga, justificando, se a função $f(z) = z^2|z|$ é analítica.

(3 val.) b) Seja $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$. Determine uma função harmónica conjugada v de u, e calcule a derivada da função

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)\,.$$

a)

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (x+iy)^2\,|x+iy| \\ &= \left(x^2 - y^2 + i2xy\right)\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Com

$$u(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad v(x,y) = 2xy\sqrt{x^2+y^2}$$

temos, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y\left(x^2-y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pelo que, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2-y^2\right) = 2xy^2 \\ y\left(x^2-y^2\right) = -2x^2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2-3y^2\right) = 0 \\ y\left(3x^2-y^2\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

Pelo que as equações de Cauchy Riemann não são satisfeitas para $(x, y) \neq (0, 0)$.[1] Então f não é diferenciável em nenhum aberto de $\mathbb{C}$, concluindo-se que não existe nenhum ponto onde f seja analítica.

b)Agora com $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ vamos determinar uma função v tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy \end{cases}$$

Integrando a primeira equação em ordem a y, obtemos

$$v = 2y - 3x^2 y + y^3 + g(x)$$

donde

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + g'(x),$$

portanto $g(x)$ é constante. Tomemos $g = 0$.

Uma função harmónica conjugada de u é

$$v = 2y - 3x^2 y + y^3$$

Sendo f uma função analítica, podemos calcular a sua derivada por

$$\begin{aligned} f'(x + iy) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= 2 - 3x^2 + 3y^2 - i\,6xy \end{aligned}$$

2. Considere a seguinte função:

$$f(z) = \frac{1 + z}{z^2 - z^4} + z^5 \sin\frac{1}{z^2}$$

definida para todos os valores de z em que esta expressão tem significado.

(2 val.) a) A função $f(z)$ tem uma série de Laurent convergente na região definida pela relação $0 < |z| < R$. Determine esta série e o valor máximo de R.

(3 val.) b) Classifique as singularidades de $f(z)$ e calcule os respectivos resíduos.

(2 val.) c) Seja C uma curva fechada e simples que não passa pelas singulari-

[1] As equações de Cauchy Riemann são satisfeitas para $(x, y) = (0, 0)$ porque

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 |z|}{z} = \lim_{z \to 0} z|z| = 0.$$

dades de $f(z)$. Determine todos os valores possíveis de

$$\oint_C f(z)\, dz.$$

a)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+z}{z^2(1-z^2)} + z^5 \sin\frac{1}{z^2} \\ &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} + z^5 \sin\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Para $0 < |z| < 1$, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} + z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-4n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-4n+3} \end{aligned}$$

Portanto (com $0 < |z| < 1$)

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-4n+3} + z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 + z + z^2 + 2z^3 + \sum_{n=4}^{\infty} z^n$$

Como $f(z)$ não é limitada em $z = 1$ temos que o valor máximo de R é de facto $R = 1$.

b)A expressão que define f faz sentido para $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ e representa uma função analítica nesse domínio como se pode concluir tendo em conta que a soma, multiplicação, divisão e composição de funções analíticas dá origem ainda a funções analíticas nos seus respectivos domínios. Pelo que $f(z)$ tem três singularidades isoladas respectivamente nos pontos $z = -1$, $z = 0$ e $z = 1$.

Em $z = -1$ temos uma singularidade removível pois

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -1} f(z) &= \lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} + z^5 \sin\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \sin 1, \end{aligned}$$

pelo que

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = 0$$

Em $z=0$ temos uma singularidade essencial, de acordo com a alínea anterior. Ainda utilizando a alínea anterior temos

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$$

Em $z=1$ temos um pólo de primeira ordem porque

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) &= \lim_{z\to 1} \left(\frac{-1}{z^2} + (z-1) z^5 \sin \frac{1}{z^2} \right) \\ &= -1 \neq 0, \end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = -1$$

c)Atendendo ao Teorema dos Resíduos e a que $\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = 0$, temos as seguintes hipóteses:

i)Se os pontos $z=0$ e $z=1$ se encontram no interior da região limitada pela curva C, então

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \left(-1 + \frac{5}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}$$

se C for percorrida no sentido positivo. Tendo o valor simétrico se C for percorrida no sentido negativo.

ii)Se o ponto $z=0$ se encontra no interior da região limitada pela curva C e $z=1$ no exterior, então

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \frac{5}{6} = \frac{5}{3}\pi i$$

se C for percorrida no sentido positivo. Tendo o valor simétrico se C for percorrida no sentido negativo.

iii)Se o ponto $z=1$ se encontra no interior da região limitada pela curva C e $z=0$ no exterior, então

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i (-1) = -2\pi i$$

se C for percorrida no sentido positivo. Tendo o valor simétrico se C for percorrida no sentido negativo.

iv)Se os pontos $z=0$ e $z=1$ se encontram no exterior da região limitada pela curva C, então

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

(4 val.) 3. Calcule o integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx \qquad \text{com } a>0.$$

Seja

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \quad \text{e} \quad \mathrm{Im} z > 0\}$$
$$I_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R \quad \text{e} \quad \mathrm{Im} z = 0\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} dz
\end{aligned}$$

onde o segmento I_R é percorrido do ponto $z=-R$ para o ponto $z=R$. Considerando a curva C_R percorrida do ponto do ponto $z=R$ para o ponto $z=-R$, considere-se Γ_R a concatenação destas curvas orientadas (Γ_R é portanto uma curva fechada orientada no sentido positivo). Temos então

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx &= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\left(\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} dz - \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} dz
\end{aligned}$$

porque[2] $\left(z^2+a^2\right)^3$ é um polinómio de grau $6 \geqslant 0+2$. Uma vez que a função

$$\frac{1}{(z^2+a^2)^3} = \frac{1}{(z+ia)^3(z-ia)^3}$$

[2] Ou (para $R>a$)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} dz\right| &\leqslant \int_{C_R} \left|\frac{1}{(z^2+a^2)^3}\right| |dz| \\
&\leqslant \int_{C_R} \frac{1}{\left(|z|^2-a^2\right)^3} |dz| = \\
&\leqslant \frac{1}{(R^2-a^2)^3}\int_{C_R} |dz| = \\
&\leqslant \frac{\pi R}{(R^2-a^2)^3}.
\end{aligned}$$

apenas tem singularidades nos pontos $z = ia$ e $z = -ia$; e apenas a primeira destas se encontra no interior da região limitada pela curva Γ_R (para $R > a$); temos pelo Teorema dos Resíduos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx &= \frac{1}{2} 2\pi i \mathrm{Res}_{z=ia} \frac{1}{(z^2+a^2)^3} \\
&= \pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to ia} \frac{d^2}{dz^2} \frac{(z-ia)^3}{(z^2+a^2)^3} \\
&= \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to ia} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z+ia)^3} \\
&= \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz} \frac{-3}{(z+ia)^4} \\
&= \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to ia} \frac{12}{(z+ia)^5} \\
&= \frac{6\pi i}{2^5 i a^5} \\
&= \frac{3\pi}{16a^5}
\end{aligned}$$

(3 val.) 4. Seja $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ e suponha que f é uma função não-constante analítica em U. Mostre que se existir uma sucessão $\{z_n\} \subset U$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = 0$$

então a origem é uma singularidade essencial de f.

Note bem que é insuficiente de mostrar a existência de uma função com essas propriedades.

De acordo com o Teorema de Laurent temos, para qualquer $z \in U$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

Podemos considerar que $f(z)$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Se esta singularidade fosse um pólo (de ordem $\mathbf{m}$) ou uma singularidade removível então, como f não é uma função constante igual a zero (caso em que todos os coeficientes a_n seriam nulos), existiria $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=-\mathbf{m}}^{+\infty} a_n z^n. \quad \text{com } a_{-\mathbf{m}} \neq 0.$$

Nestas condições teríamos

$$\lim_{z \to 0} z^{\mathbf{m}} f(z) = a_{-\mathbf{m}} \neq 0.$$

Mas se este limite existisse viria

$$\lim_{z \to 0} z^{\mathbf{m}} f(z) = \lim_{n \to \infty} z_n^{\mathbf{m}} f(z_n) = 0$$

contrariando a conclusão anterior. Então $z = 0$ é uma singularidade isolada de $f(z)$ que não é removível nem é um pólo; ou seja é uma singularidade essencial.