CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

TESTE 1A - 24 DE ABRIL DE 2010 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade de f em \mathbb{R}^2 .
- (b) Determine a direcção em que f cresce mais rapidamente no ponto (1,1).
- (c) Sendo $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma função diferenciável com g(1,0,2)=(1,1) e

$$Dg(1,0,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule $D(f \circ g)(1, 0, 2)$.

Resolução:

(a) As funções x e x^2+y^2 são contínuas uma vez que são polinómios. Como a raíz quadrada é contínua e o quociente de funções contínuas é contínua nos pontos onde o denominador não se anula conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Uma vez que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x,0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{ e } \quad \lim_{x \to 0^-} f(x,0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = -1$$

vemos que não existe o limite de f(x,y) quando (x,y) tende para zero, e portanto f não é contínua em (0,0).

(b) A direcção de maior crescimento é dada pelo gradiente da função no ponto. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e portanto a direcção pretendida é a do vector

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

(c) A função f é diferenciável no ponto (1,1) (uma vez que é o quociente de um polinómio pela composta da raíz quadrada com um polinómio e o denominador não se anula), logo, pela regra de derivação da função composta temos

$$D(f \circ g)(1,0,2) = Df(1,1)Dg(1,0,2)$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\right].$$

2. Seja $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função f=f(u,v) de classe C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(-1,0)=3$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,0)=2$. Sendo h a função definida por $h(x,y)=f(x^2-y,xy)$, calcule $\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,1)$.

Resolução: Pela regra da cadeia temos,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^2 - y, xy)(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2 - y, xy)x$$

e aplicando novamente a regra da cadeia temos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x^2 - y, xy)(2x) - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(x^2 - y, xy)y
+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x^2 - y, xy)(2x) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^2 - y, xy)y\right)x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2 - y, xy).$$

Substituindo (x, y) = (0, 1) temos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,1) = -\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(-1,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(-1,0) = -3 + 2 = -1$$

onde na segunda igualdade usámos o Lema de Schwarz (que se pode aplicar porque f é de classe C^2) para ver que $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(-1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-1,0) = 3$.

3. Mostre que o sistema de equações

$$x + y^3 - z^4 = 2$$
 e $z^2 + xz + xy = 5$.

define y e z como funções de x numa vizinhança do ponto (x,y,z)=(2,1,1). Calcule $\frac{dy}{dx}(2)$.

 ${f Resolução:}$ A função $F(x,y,z)=(x+y^3-z^4-2,z^2+xz+xy-5)$ é de classe C^1 uma vez que as suas componentes são polinómios. Temos F(2,1,1)=(0,0) logo (2,1,1) é uma solução do sistema. Sendo

$$\frac{\partial F}{\partial (y,z)} = \begin{bmatrix} 3y^2 & -4z^3 \\ x & 2z+x \end{bmatrix},$$

temos

$$\det \frac{\partial F}{\partial (y,z)}(2,1,1) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

O Teorema da função implícita garante então a existência de uma vizinhança do ponto (2,1,1) em que o sistema define y e z como funções de x ((y,z)=f(x)).

Derivando as equações em ordem a x obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1 + 3y^{2} \frac{dy}{dx} - 4z^{3} \frac{dz}{dx} = 0\\ 2z \frac{dz}{dx} + z + y + x(\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}) = 0 \end{cases}$$

Substituindo em x=2, y=1, z=1 temos

$$\begin{cases} 1 + 3\frac{dy}{dx}(2) - 4\frac{dz}{dx}(2) = 0\\ 2\frac{dz}{dx}(2) + 2 + 2(\frac{dz}{dx}(2) + \frac{dy}{dx}(2)) = 0 \end{cases}$$

Somando as equações e resolvendo em ordem a $\frac{dy}{dx}$ obtemos $\frac{dy}{dx}(2)=-\frac{3}{5}.$

Alternativamente, para (y, z) = f(x), temos

$$Df(2) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(2,1,1)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(2,1,1)$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

onde usámos o facto que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,1) = \begin{bmatrix} 1\\z+y \end{bmatrix}_{|_{(2,1,1)}} = \begin{bmatrix} 1\\2 \end{bmatrix}.$$

Como

$$Df(2) = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dx}(2) \\ \frac{dz}{dx}(2) \end{bmatrix},$$

conclui-se que $\frac{dy}{dx}(2) = -\frac{3}{5}$.

4. Determine e classifique os pontos de estacionariedade da função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 12.$

Resolução: Os pontos de estacionariedade são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem por soluções os pontos $(x,y)=(0,0),\ (0,2),\ (-1,1)$ e (1,1). A matriz Hessiana de f é

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{bmatrix}$$

e portanto $H(f)(0,0)=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ donde se vê que (0,0) é um ponto de máximo; $H(f)(0,2)=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ logo (0,2) é um ponto de mínimo; $H(f)(-1,1)=\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ tem determinante negativo logo (-1,1) é um ponto de sela; $H(f)(1,1)=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ tem determinante negativo donde se conclui que (1,1) é um ponto de sela.

5. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y > 0, \ z = \ln(x + 3y)\}.$$

- (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.
- (b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto (4, -1, 0).
- (c) Determine uma equação cartesiana do plano tangente a M em (4,-1,0).

Resolução:

(a) M é o gráfico da função $f\colon U\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\ln(x+3y)$ onde U é o aberto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x+3y>0\}$. Como f é de classe C^1 (é a composta da função logaritmo com um polinómio), conclui-se que M é uma variedade de dimensão 2. Alternativamente, considerando $\widetilde{U}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+3y>0\}$, temos que M é o conjunto de nível,

$$M = \{(x, y, z) \in \widetilde{U} : F(x, y, z) = 0\},\$$

da função $F:\widetilde{U}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 definida por $F(x,y,z)=z-\ln(x+3y)$. Como

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x+3y} & -\frac{3}{x+3y} & 1 \end{bmatrix},$$

conclui-se que a característica de DF é sempre 1 em todos os pontos de M (o vector $\left(-\frac{1}{x+3y},-\frac{3}{x+3y},1\right)$ nunca se anula) e então M é uma variedade diferenciável de dimensão 2 em R^3 .

(b) Considerando a função F da alínea anterior temos que espaço normal de M no ponto (4,-1,0) é gerado pelo vector $\nabla F=\left(-\frac{1}{x+3y},-\frac{3}{x+3y},1\right)$ nesse ponto. Isto é

$$T_{(4,-1,0)}M^{\perp} = \{a(-1,-3,1) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(-1,3,1)\}.$$

O espaço tangente nesse ponto é o complemento ortogonal do espaço anterior e portanto é definido pela equação $(-1,-3,1)\cdot(a,b,c)=0 \Leftrightarrow a=-3b+c$, ou seja,

$$T_{(4,-1,0)}M = \{(-3b+c,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b,c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(3,1,0),(1,0,1)\}.$$

(c) Uma vez que (-1,-3,1) é um vector perpendicular ao plano tangente e este passa pelo ponto (4,-1,0), temos que a equação cartesiana do plano tangente é

$$-(x-4) - 3(y+1) + z = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + z = -1.$$

6. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a 2 se anulam em (0,0). Mostre que se alguma das terceiras derivadas parciais de f em (0,0) não é nula então (0,0) é um ponto de sela de f.

Resolução: Dado um vector $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, seja $g_{\vec{v}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função C^∞ definida por

$$g_{\vec{v}}(t) = f(t\vec{v}) = f(tv_1, tv_2).$$

Note que $g_{\vec{v}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a restrição de f à recta que passa na origem na direcção do vector \vec{v} . O seu polinómio de Taylor de terceira ordem em torno da origem é

$$g_{\vec{v}}(0) + g'_{\vec{v}}(0) t + \frac{1}{2} g''_{\vec{v}}(0) t^2 + \frac{1}{3!} g'''_{\vec{v}}(0) t^3,$$

onde, usando a regra da cadeia e o Lema de Schwarz,

$$\begin{split} g_{\vec{v}}'(0) &= f(0,0) \\ g_{\vec{v}}'(0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t\vec{v})\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t\vec{v})\,v_2\right)_{|_{t=0}} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,v_2 = 0 \\ g_{\vec{v}}''(0) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t\vec{v})\,v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t\vec{v})\,v_1\,v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t\vec{v})\,v_2^2\right)_{|_{t=0}} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,v_1\,v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,v_2^2 = 0 \\ g_{\vec{v}}'''(0) &= \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t\vec{v})\,v_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(t\vec{v})\,v_1^2\,v_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(t\vec{v})\,v_1\,v_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t\vec{v})\,v_2^3\right)_{|_{t=0}} \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)\,v_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)\,v_1^2\,v_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0)\,v_1\,v_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)\,v_2^3. \end{split}$$

Se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ então, fazendo $\vec{v}=(1,0)$, temos que o polinómio de Taylor de terceira ordem da função $g_{\vec{v}}(t) = f(t,0)$ é

$$f(0,0) + \frac{t^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \right)$$

e portanto $g_{\vec{v}}$ tem um ponto de sela (ponto de inflexão) em t=0 e, consequentemente, f tem um ponto de sela em (0,0) (note que f(t,0)-f(0,0) tem sinais contrários para t > 0 e t < 0).

Da mesma forma, se $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \neq 0$ e fazendo $\vec{v}=(0,1)$, temos que o polinómio de Taylor de terceira ordem da função $g_{\vec{v}}(t) = f(0,t)$ é

$$f(0,0) + \frac{t^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) \right)$$

e portanto f tem um ponto de sela em (0,0) (note que f(0,t)-f(0,0) tem sinais contrários para t > 0 e t < 0)

Suponhamos então que $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=0$. Considerando $\vec{v}=(1,1)$ temos $g_{\vec{v}}(t)=f(t,t)$ com polinómio de Taylor de terceira ordem

$$f(0,0) + \frac{t^3}{2} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \right).$$

Concluímos que se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0$, a função $g_{\vec{v}}(t)$ tem um ponto de sela em t=0 e portanto (0,0) é novamente um ponto de sela de f. Se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 0$, repetindo o argumento anterior para $\vec{v}=(1,2)$ (i.e. $g_{\vec{v}}(t)=f(t,2t)$) vemos que, nesse caso, o polinómio de Taylor de $g_{\vec{v}}$ é

$$f(0,0) + \frac{t^3}{2} \left(2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + 4 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \right) = f(0,0) + t^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \right)$$

com $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) \neq 0$ pelo que novamente (0,0) é um ponto de sela de f.

Conclui-se então que (0,0) é necessariamente um ponto de sela a não ser que todas as derivadas parciais de ordem 3 de f se anulem.