INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Slide 3: $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$

Fixando $\alpha > 1$ tem-se $\left| \frac{1}{n^z} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ para todo o $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente

em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$. Uma vez que limites uniformes podem ser trocados com

o integral ao longo de uma curva fechada conclui-se do Teorema de Morera que um limite

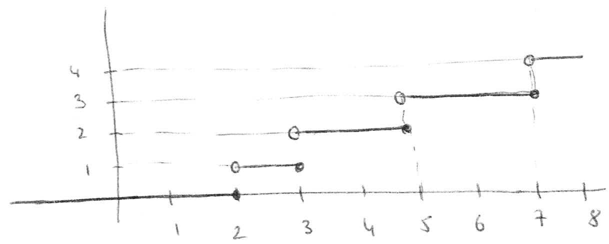
uniforme de funções holomorfas é holomorfa. Portanto

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{é holomorfa em } \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$$

Uma vez que α é arbitrário a expressão para ζ define uma função holomorfa em

$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$

Slide 6: Gráfico de $\pi(x)$:



É mais habitual enunciar a fórmula assintótica para $\pi(x)$ na forma

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Isto diz que a probabilidade de um número entre 0 e x ser primo é aproximadamente $\frac{1}{\log x}$. Por exemplo se $x = 10000$, cerca de $\frac{1}{\log 10000} \sim 10\%$ dos números ≤ 10000 são primos.

Exercício (usar a regra de Cauchy)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\log x}}{\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt} = 1$$

No entanto, a diferença entre $\frac{x}{\log x}$ e $\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$ tende para ∞ quando $x \to \infty$ e o integral logarítmico é uma aproximação muito melhor de $\pi(x)$.

Slide 8: Fórmula explícita para $\pi(x)$:

$$\pi_0(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\pi(x+h) + \pi(x-h)}{2} = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n})$$

com $f(x) = li(x) - \sum_{\rho \text{ zero não trivial}} li(x^\rho) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{\log t}{t(t^2-1)}\,dt$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } p^2 \mid n \text{ para algum primo } p \\ (-1)^{\#\text{ factores primos de } n} & \text{, caso contr}\ldots \end{cases}$$

$$li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$$