Slide 10: Mas...

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$$ muda de sinal infinitas vezes (Littlewood 1914)

O mais pequeno valor de x conhecido para o qual isto sucede é $\sim 10^{347}$

Sabe-se que a função não troca de sinal antes de $x = 10^{14}$

Slide 11: $\left|\frac{1}{p^z}\right| = \frac{1}{p^{Re\,z}} < 1$ logo $\frac{1}{1-\frac{1}{p^z}} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \cdots$

$$\left(1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{3^{2z}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{5^{2z}}+\cdots\right)\cdots = 1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{2^{2z}}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{2^z3^z}+$$

$$= \zeta(z)$$

(pela propriedade distributiva e pelo Teorema Fundamental da aritmética que diz que cada n se pode escrever de forma única como um produto de potências de primos)

Note-se que se houver ∞s factores diferentes de 1, o produto é 0 e portanto não contribui para o resultado.

Por exemplo $\frac{1}{2^z}\cdot\frac{1}{3^z}\cdot\frac{1}{5^z}\cdots\cdots = 0.$

Slide 12 Suponhamos que $Re\,z > 1$. Então

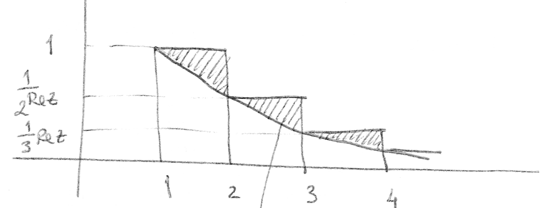
$$\int_1^{+\infty} t^{-z}\,dt = \left.\frac{t^{-z+1}}{-z+1}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-z} - \zeta(z) = \int_1^{\infty} t^{-z}\,dt - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} \left(t^{-z} - n^{-z}\right)dt}_{\phi_n(z)}$$

$|n^{-z}| = n^{-Re\,z}$

versus

$|t^{-z}| = t^{-Re\,z}$



área ~~[illegible]~~ muito mais pequena que a correspondente ao integral ou soma da série

$$|\phi_n(z)| \leq \int_n^{n+1} |t^{-z} - n^{-z}|\,dt$$

$$|t^{-z} - n^{-z}| = \left|\int_n^t -z\,s^{-z-1}\,ds\right| \leq |z| \int_n^t s^{-Re\,z-1}\,ds = \frac{|z|}{Re\,z}\left. s^{-Re(z)}\right|_t^n$$

$$= \frac{|z|}{Re\,z}\left(n^{-Re\,z} - t^{-Re\,z}\right) = |z|\, s^{-Re\,z-1}(t-n)$$ para algum $s \in \,]n,t[$ (pelo T. Lagrange

$$\leq |z|\, n^{-Re\,z-1}$$