INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Slide 12 (cont):

Como antes, da convergência das séries de Dirichlet conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z)$ converge uniformemente em qualquer região da forma

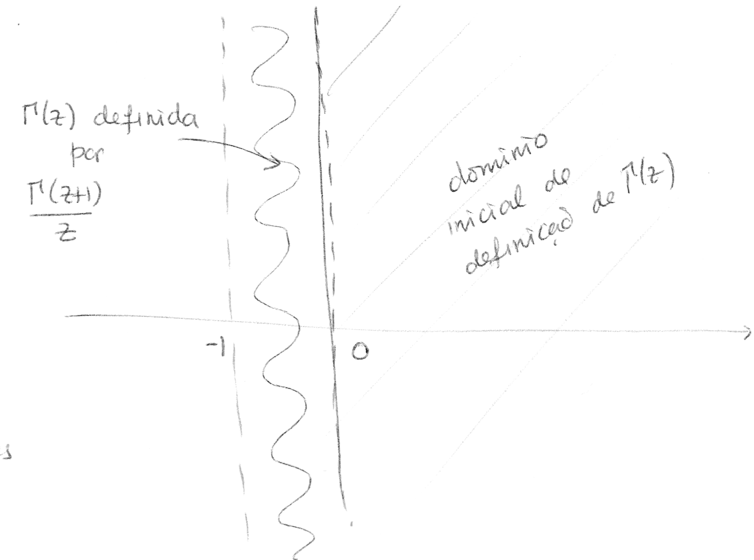
$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + 1 > \alpha\} \quad \text{com } \alpha > 1$$

e portanto a soma define uma função holomorfa

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z) \quad \text{na região} \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + 1 > 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

O prolongamento de uma função holomorfa é único porque duas funções holomorfas que coincidam num aberto do seu domínio são necessariamente iguais (porque os zeros das funções holomorfas não identicamente nulas são isolados).

Slide 13:



Para $z \sim 0$ a nova definição de $\Gamma(z)$ diz que

$$\Gamma(z) \sim \frac{\Gamma(1)}{z} = \frac{1}{z}$$

logo Γ tem um pólo simples em $z=0$ com resíduo 1.

Seguidamente podemos prolongar $\Gamma(z)$ à faixa $-2 < \operatorname{Re} z \leq 1$ pela equação $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$

Para $z \sim -1$ temos agora $\Gamma(z) \sim \frac{1}{-1}\Gamma(z+1) \sim -\frac{1}{z+1}$ logo Γ tem um polo de ordem 1 em $z=-1$ com resíduo -1.

Etc...

Conclusão: $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\} \to \mathbb{C}$

Slide 14:

A equação funcional permite prolongar $\zeta(z)$ a $\operatorname{Re} z \leq 0$: De facto se $\operatorname{Re} z < 1$ o termo direito da igualdade é um produto de funções holomorfas (notar que $\operatorname{Re}(1-z) > 0$ logo Γ e ζ são holomorfas em $1-z$, excepto ζ quando $z=0$ mas nesse ponto o polo simples de $\zeta(1-z)$ é cancelado pelo zero simples de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$)