Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2008-2009
15/Novembro/2008
1º Teste

Álgebra Linear

1º Teste

MEMec, MEAer

Nome:
Número:
Curso:
Sala:

A prova que vai realizar tem a duração de **1 hora e 30 minutos** e está cotada para 10 valores. Na pergunta de escolha múltipla, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta em branco vale 0 e uma resposta errada vale -0.3 valores.

A resolução tem que ser feita neste conjunto de folhas, nos espaços apropriados. As duas últimas folhas estão em branco e, se precisar, pode utilizá-las.

O quadro seguinte destina-se à correcção da prova. Por favor, **não escreva nada!**

1 a)	7	
1 b)	5	
1 c)	8	
2 a)	5	
2 b)	7	
2 c)	13	
3 a)	3	
3 b)	3	
3 c)	3	
3 d)	6	
4 a)	3	
4 b)	3	
4 c)	3	
4 d)	3	
4 e)	3	
5)	10	
6 a)	5	
6 b)	10	

NOTA FINAL:

1) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & a^2 & 0 \\ 3 & a^2 & 0 \\ 0 & 5 & a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

onde a é um número real. Responda às perguntas seguintes **sem** calcular a matriz inversa de A.

(7) a) Determine os valores de a para os quais a matriz A é invertível.

(5) b) Nos casos em que A é invertível, calcule a entrada (23) da matriz A^{-1}.

(8) c) Para $a = -1$, determine a solução geral e o grau de indeterminação do sistema

$$(A+B)x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução

a) $\det A \neq 0$ para $a \neq 0$ e $a \neq 3$.

b) A entrada (23) da matriz $A^{-1} = [b_{ij}]$ é

$$b_{23} = (a^3(a-3))^{-1} C_{32} = (a^3(a-3))^{-1} \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

c)

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistema impossível.

---

2) Considere a expansão linear E do subconjunto S de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$S = \{(1,0,0,-1),\ (0,1,1,0),\ (2,-1,-1,-2)\}.$$

(5) a) O conjunto S é linearmente independente? Justifique.

(7) b) Determine uma base para E. Qual é a dimensão de E?

(13) c) Considere o subespaço $E + W$ de $\mathbb{R}^4$, sendo

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}.$$

Determine uma base para $E + W$. Qual é a dimensão de $E + W$?

Solução

a) S não é linearmente independente.

b) $B = \{(1,0,0,-1),(0,1,1,0)\}$, $\dim E = 2$.

c) $B_{E+W} = \{(1,0,0,-1),(0,1,1,0),(0,0,-1,-1),(0,0,0,-2)\}$, $\dim(E+W) = 4$.

3) Seja A uma matriz real e seja

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a forma reduzida de escada de linhas de A.

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(3) a) A característica da matriz A é .... 3.

(3) b) A dimensão do espaço das colunas de A é .... 3.

(3) c) O vector não nulo $v =$ .... $(0,0,0,1,4)$ pertence ao espaço das linhas de A.

(6) d) Uma base para o núcleo de A é .... $\{(-3,1,0,0,0),(0,0,2,-4,1)\}$

4) Seja A uma matriz real e suponha que a solução geral do sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(3) a) Se

$$x_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

então $x_1 - x_2$ é solução do sistema .... $Ax = 0$

(3) b) A natureza do sistema $A^T x = 0$ é .... possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a 1.

(3) c) A dimensão do espaço das linhas $L(A)$ da matriz A é .... 2.

(3) d) A dimensão do núcleo $N(A^T)$ da matriz A^T é .... 1.

(3) e) Se for possível reduzir A a uma matriz em escada de linhas sem nunca trocar linhas, a natureza do sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é .... impossível.

---

(10) **5)** Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz real quadrada de ordem 3 cujas entradas satisfazem as condições seguintes:

$$a_{ii} = 0 \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, 3$$
$$a_{ij} a_{kr} > 0 \qquad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad k \neq r$$

Considere as afirmações seguintes:

I) O determinante de A é sempre igual a zero

II) O cofactor-13 de A é nulo

III) Nenhuma entrada na diagonal da matriz AA^T é nula

IV) Se existe uma matriz B, não nula, tal que $AB = 0$, então A não é invertível

A lista completa de afirmações correctas é:

A) I e II B) III e IV C) I e III e IV D) II

Solução: B)

---

6) Sejam A e B duas matrizes quadradas reais de ordem 2. Suponha que existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tais que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \qquad Av_2 = \lambda_2 v_2, \qquad Bv_1 = \mu_1 v_1, \qquad Bv_2 = \mu_2 v_2,$$

onde v_1 e v_2 são vectores coluna 2×1 linearmente independentes.

(5) a) Seja P a matriz 2×2 definida por $P = [v_1|v_2]$. Mostre que existe uma matriz diagonal D tal que

$$AP = PD.$$

(10) b) Prove que

$$AB = BA.$$

---

a) $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

b) $A = PDP^{-1}$ e $B = PD_1P^{-1}$, sendo

$$D_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = PDD_1P^{-1}$$
