Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2008-2009
13/Dezembro/2008
2º Teste

# Álgebra Linear

## 2º Teste

(com soluções)

MEMec, MEAer

**Nome:**
**Número:**
**Curso:**
**Sala:**

A prova que vai realizar tem a duração de **1 hora e 30 minutos** e está cotada para 10 valores. Nas perguntas de escolha múltipla, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta em branco vale 0 e uma resposta errada vale -0.3 valores.

**A resolução tem que ser feita neste conjunto de folhas**, nos espaços apropriados. As duas últimas folhas estão em branco e, se precisar, pode utilizá-las.

O quadro seguinte destina-se à correcção da prova. Por favor, **não escreva nada!**

| | | |
|---|---|---|
| 1 a) | 8 | |
| 1 b) | 8 | |
| 2 a) | 8 | |
| 2 b) | 8 | |
| 3 a) | 5 | |
| 3 b) | 6 | |
| 4 a) | 5 | |
| 4 b) | 5 | |
| 4 c) | 5 | |
| 5 a) | 4 | |
| 5 b) | 3 | |
| 5 c) | 4 | |
| 5 d) | 3 | |
| 6) | 10 | |
| 7) | 10 | |
| 8 a) | 4 | |
| 8 b) | 4 | |

**NOTA FINAL:**

**1)** Seja $W$ o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \wedge y + 2z = w\}.$$

(8) a) Determine uma base $B_{W^\perp}$ para o complemento ortogonal $W^\perp$ do subespaço $W$.

(8) b) Encontre vectores $u$ e $v$ ortogonais a $B_{W^\perp}$, de modo a que $B_{W^\perp} \cup \{u, v\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução

a) $B_{W^\perp} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 2, -1)\}$.

b) Base $B = B_W \cup B_{W^\perp}$ e $B_W = \{(-2, -2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$.

---

**2)** Considere o subespaço linear $V$ de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $z = 2y$.

(8) a) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1, 2, 3)$ sobre $V$.

(8) b) Calcule a distância do vector $(1, 2, 3)$ ao subespaço $V$.

Solução

a)

$$\mathrm{proj}_V(1, 2, 3) = (< (1, 2, 3), u > /\|u\|^2)u + (< (1, 2, 3), v > /\|v\|^2)v,$$

onde $u = (1, 0, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$ formam uma base para $V$. Donde

$$\mathrm{proj}_V(1, 2, 3) = (1, 8/5, 16/5).$$

b) $\mathrm{d}((1, 2, 3), W) = \|\mathrm{proj}_{V^\perp}(1, 2, 3)\| = \|(1, 2, 3) - \mathrm{proj}_V(1, 2, 3)\| = \sqrt{5}/5$.

---

**3)** Seja $B = (e_1, e_2, e_3)$ a base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$Te_1 = (-1, 0, 0) \qquad Te_2 = (1, 2, 1) \qquad Te_3 = (0, 1, 0).$$

(5) a) Calcule $T(1, 4, 2)$.

(6) b) Determine o núcleo $N(T)$ e a imagem $I(T)$ da transformação linear $T$.

Solução

a) $T(1,4,2) = (-1,0,0) + 4(1,2,1) + 2(0,1,0) = (3,10,4)$

b) $N(T) = N(A) = \{(0,0,0\}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A imagem $I(T)$ é, portanto, igual a $\mathbb{R}^3$.

---

**4)** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e seja

$$B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$$

uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. A matriz $M(T,B,B_c)$ que representa a transformação $T$ relativamente à base $B$ e à base canónica $B_c$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$M(T,B,B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(5) a) A imagem $T(2,1,2)$ do vector $(2,1,2)$ através da transformação $T$ é ...... $(4,2,2)$.

(5) b) Uma base para a imagem $I(T)$ da transformação $T$ é ...... $\{(1,1,0),(2,1,1)\}$.

(5) c) Equações cartesianas para o núcleo $N(T)$ da transformação $T$ são ....

$$x = 0 \wedge z = 0.$$

---

**5)** Seja $A$ uma matriz real e seja

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

uma matriz semelhante a $A$.

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(4) a) O polinómio característico da matriz $A$ é .....

$$p(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

.

(3) b) O determinante de $A$ é .... 12.

(4) c) O valor próprio 1 de $A$ tem multiplicidade algébrica igual a .... 2.

(3) d) O traço $\operatorname{tr} A$ da matriz $A$ é .... 9

---

(10) **6)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz diagonalizante para $A$ é

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1 \\ 1 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 4/3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: C

---

(10) **7)** Sejam $A$ e $B$ as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Considere as afirmações seguintes:

I) $A$ é simétrica e ortogonal

II) $B$ é hermitiana

III) $B$ é anti-simétrica

IV) $AB$ é hermitiana

A lista completa das afirmações correctas é:

A) I e II  B) III e IV  C) II e IV  D) I e III

Solução: C

---

**8)** Considere o espaço linear $\mathbb{C}^n$ munido com um produto interno $< \cdot, \cdot >$, não necessariamente o usual.

(4) a) Prove que existe uma matriz hermitiana $A$ tal que, para todos os elementos $x$ e $y$ de $\mathbb{C}^n$, se tem

$$< x, y >= \bar{y}^T Ax.$$

(4) b) Prove que os valores próprios de $A$ são positivos.

<u>Solução</u>

a) Se $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ for a base canónica de $\mathbb{C}^n$, tem-se

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n \qquad y = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n,$$

onde $a_i$ e $b_i$ são números complexos, para todo o $i = 1, 2, \ldots, n$. Usando estas igualdades,

$$< x, y >=< a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n\ ,\ b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n >$$

$$=< a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\ ,\ b_1e_1 > + < a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\ ,\ b_2e_2 > +$$

$$+\cdots+ \quad < a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n\ ,\ b_ne_n >$$

$$= \bar{b}_1 < a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\ ,\ e_1 > +\bar{b}_2 < a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\ ,\ e_2 > +$$

$$+\cdots+ \quad \bar{b}_n < a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n\ ,\ e_n >$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 < e_1, e_1 > + a_2 < e_2, e_1 > + \dots + a_n < e_n, e_1 > \\ a_1 < e_1, e_2 > + a_2 < e_2, e_2 > + \dots + a_n < e_n, e_2 > \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 < e_1, e_n > + a_2 < e_2, e_n > + \dots + a_n < e_n, e_n > \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < e_1, e_1 > & < e_2, e_1 > & \dots & < e_2, e_1 > \\ < e_1, e_2 > & < e_2, e_2 > & \dots & < e_n, e_2 > \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ < e_1, e_n > & < e_2, e_n > & \dots & < e_n, e_n > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix},$$

donde

$$< x, y >= \bar{y}^T A x,$$

sendo a matriz $A$ hermitiana.

b) Se $v$ for um vector próprio de $A$ associado ao valor próprio $\lambda$, tem-se que

$$< v, v >= \bar{v}^T A v = \lambda \bar{v}^T v = \lambda \|v\|^2 > 0,$$

onde $\|v\|$ designa a norma usual do vector $v$. Resulta, assim, que $\lambda$ é um número positivo.