Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2008-2009
6/Janeiro/2008
Prova de Recuperação

# Álgebra Linear
## 1º Teste

MEMec, MEAer

**Nome:**
**Número:**
**Curso:**
**Sala:**

A prova que vai realizar tem a duração de **1 hora e 30 minutos** e está cotada para 10 valores. Na pergunta de escolha múltipla, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta em branco vale 0 e uma resposta errada vale -0.3 valores.

**A resolução tem que ser feita neste conjunto de folhas**, nos espaços apropriados. As duas últimas folhas estão em branco e, se precisar, pode utilizá-las.

O quadro seguinte destina-se à correcção da prova. Por favor, **não escreva nada!**

| | | |
|---|---|---|
| 1 a) | 7 | |
| 1 b) | 6 | |
| 1 c) | 8 | |
| 2 a) | 7 | |
| 2 b) | 7 | |
| 2 c) | 10 | |
| 3 a) | 3 | |
| 3 b) | 3 | |
| 3 c) | 3 | |
| 3 d) | 6 | |
| 4 a) | 3 | |
| 4 b) | 3 | |
| 4 c) | 3 | |
| 4 d) | 3 | |
| 4 e) | 3 | |
| 5) | 10 | |
| 6 a) | 10 | |
| 6 b) | 5 | |

**NOTA FINAL:**

**1)** Considere as matrizes

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha$ designa um número real.

(7) a) Use a noção de determinante para encontrar os valores de $\alpha$ para os quais o sistema de equações lineares homogéneo $A_\alpha x = 0$ é possível e determinado.

(6) b) Calcule a entrada (12) da matriz adjunta $\operatorname{adj} A_\alpha$ da matriz $A_\alpha$ (em função do parâmetro $\alpha$).

(8) c) Para $\alpha = -1$, determine a natureza e calcule explicitamente a solução geral (se aplicável) do sistema

$$A_\alpha x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix},$$

em função do parâmetro real $b$.

---

Solução

a) $\det A_\alpha = 0$ para $\alpha = 0, -1, -2$; SEL possível e determinado para $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1, -2\}$.

b) A entrada (12) da matriz $\operatorname{adj} A_\alpha = [b_{ij}]$ é

$$b_{12} = C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \alpha+1 \end{bmatrix} = 2\alpha + 2$$

c) SEL impossível, se $b \neq 2$. Se $b = 2$, SEL possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1 com a solução geral

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y = -1, z \in \mathbb{R}\}.$$

---

**2)** Considere a expansão linear $E$ do subconjunto $S$ de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$S = \{(1,0,0,-1),\ (0,1,-1,0),\ (1,1,-1,-1),\ (2,2,-2,-1)\}.$$

(7) a) Determine uma base para $E$. Qual é a dimensão de $E$?

(7) b) Determine equações cartesianas para $E$.

(10) c) Considere o subespaço $E \cap W$ de $\mathbb{R}^4$, sendo

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + w = y\}.$$

Determine uma base para $E \cap W$. Qual é a dimensão de $E \cap W$?

---

Solução

a) $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim E = 3$.

b) $y + z = 0$

c) $B_{E \cap W} = \{(-1, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$, $\dim(E \cap W) = 2$.

---

**3)** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(3) a) A característica da matriz $A$ é ......... 2.

(3) b) A dimensão do espaço das linhas de $A^T$ é ......... 2.

(3) c) A matriz $BA$ é igual a .........

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(6) d) Uma base para o núcleo de $A$ é .........

$$B_{N(A)} = \{(1, 1, 1, 0), (7, 5, 0, 1)\}.$$

---

**4)** Seja $A$ uma matriz real e suponha que

$$x_1 = (-3, -2, 2, -1)$$

é uma solução particular do sistema $Ax = b$, onde

$$b = (2, -4, 3, -4).$$

Suponha ainda que $x_0 = (1, 1, 1, 1)$ é uma solução particular do sistema $Ax = 0$. Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(3) a) Um vector $y$ não nulo que pertence ao espaço das colunas de $A$ é ......... $b = (2, -4, 3, -4)$.

(3) b) Uma solução particular não nula do sistema $A^T Ax = 0$ é ......... $x_0 = (1, 1, 1, 1)$.

(3) c) Se se somar todas as colunas de $A$, obtemos o vector......... $(0, 0, 0, 0)$.

(3) d) Uma solução do sistema $Ax = b$ diferente de $x_1$ é ......... $x_0 + x_1 = (-2, -1, 3, 0)$.

(3) e) Se a dimensão do núcleo de $A$ for igual a 1, a natureza do sistema $Ax = b$ é (refira o grau de indeterminação, se for aplicável) ......... possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

---

(10) **5)** Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ tal que $\det A = -3$ e seja

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Considere as afirmações seguintes:

I) $\det 2A = -6$

II) A matriz $A$ não pode ter qualquer entrada nula na diagonal

III) $\det\left(-2(A^T)^2\right) = -72$

IV) $\det\left((BA)^{-2}\right) = 1/729$

A lista completa de afirmações correctas é:

A) I e II B) III e IV C) II e III e IV D) I

Solução: B)

---

**6)** Sejam $A$ e $B$ matrizes reais quadradas de ordem $n$. Suponha ainda que $A$ é invertível e que a característica da matriz $B$ é igual a 1.

(10) a) Considere as matrizes da forma

$$C_\alpha = A + \alpha B,$$

onde $\alpha$ é um número real. Mostre que existe no máximo um único valor de $\alpha$ para o qual a matriz $C_\alpha$ não é invertível.

(5) b) Dê um exemplo de matrizes $A$ e $B$ tais que, para todo o número real $\alpha$, as matrizes $C_\alpha$ são invertíveis.

---