Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º Semestre 2008-2009
6/Janeiro/2009
Prova de Recuperação

Álgebra Linear
2º Teste

MEMec, MEAer

Nome:
Número:
Curso:
Sala:

A prova que vai realizar tem a duração de **1 hora e 30 minutos** e está cotada para 10 valores. Nas perguntas de escolha múltipla, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta em branco vale 0 e uma resposta errada vale -0.3 valores.

A resolução tem que ser feita neste conjunto de folhas, nos espaços apropriados. As duas últimas folhas estão em branco e, se precisar, pode utilizá-las.

O quadro seguinte destina-se à correcção da prova. Por favor, **não escreva nada!**

1 a)	7	
1 b)	7	
2 a)	7	
2 b)	7	
3 a)	5	
3 b)	6	
4 a)	4	
4 b)	4	
4 c)	4	
5 a)	4	
5 b)	3	
5 c)	4	
5 d)	3	
6)	10	
7)	10	
8 a)	7	
8 b)	8	

NOTA FINAL:

1) Considere o subespaço linear V de $\mathbb{R}^4$ definido pela equação $x + z = 2y - w$.

(7) a) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1, 2, 3, 4)$ sobre o complemento ortogonal $V^\perp$ do subespaço V.

(7) b) Calcule a distância do vector $(1, 2, 3, 4)$ ao subespaço V.

<u>Solução</u>

a)

$$\text{proj}_{V^\perp}(1, 2, 3, 4) = (< (1, 2, 3, 4), u > / \|u\|^2)u$$

onde $B = \{u\}$, com $u = (1, -2, 1, 1)$, é uma base para $V^\perp$. Donde

$$\text{proj}_V(1, 2, 3, 4) = 4/7(1, -2, 1, 1).$$

b) $\text{d}((1, 2, 3, 4), V) = \| \text{proj}_{V^\perp}(1, 2, 3, 4)\| = 4/\sqrt{7}$.

---

2) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}.$$

(7) a) Determine uma base **ortonormal** B_W para o subespaço W.

(7) b) Determine equações cartesianas para o plano S que é paralelo a W e passa no ponto $(1, 1, 1)$.

<u>Solução</u>

a) $B_W = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$.

b) $x - y - z = -1$

---

3) Seja $B = (e_1, e_2, e_3)$ a base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida, para todo o elemento (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z).$$

(5) a) Determine a matriz $A = M(T, B_c, B_c)$ que representa a transformação linear T na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(6) b) Determine os valores próprios da transformação linear T e equações cartesianas para os espaços próprios correspondentes.

Solução

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3$; valor próprio igual a 1 cujo espaço próprio tem as equações

$$z = 0, \quad y = 0.$$

---

4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e seja

$$B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$$

uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. A matriz $M(T, B_c, B)$ que representa a transformação T relativamente à base canónica B_c e à base B de $\mathbb{R}^3$ é

$$M(T, B_c, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(4) a) A imagem $T(2,1,2)$ do vector $(2,1,2)$ através da transformação T é .... $T(2,1,2) = (14,7,2)$.

(4) b) Uma base para a imagem $I(T)$ da transformação T é ....

$$B_{I(T)} = \{(2,1,0),(4,2,1)\}$$

(4) c) A matriz $M_{B \to B_c}$ que representa a mudança de coordenadas da base B para a base B_c é........

$$M(T, B, B_c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

5) Seja A uma matriz real quadrada e suponha que o espaço das linhas $L(A)$ da matriz A é constituído por todos os vectores da forma

$$(x, y, z, w) = t(1, 0, 1, 1) + s(1, 1, 0, 0),$$

onde t e s são números reais.

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

(4) a) Equações cartesianas para o núcleo $N(A)$ da matriz A são ....

$$x = -y, \qquad x + y + w = 0 \quad ((x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4)$$

(3) b) O valor próprio 0 da matriz A tem multiplicidade geométrica igual a........ 2

(4) c) Equações cartesianas para o espaço das colunas $C(A^T)$ da matriz A^T são........

$$x = y + z \quad , \quad w = z$$

(3) d) Um exemplo de uma matriz A nas condições do enunciado é ....

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

(10) **6)** Sejam x e y elementos de $\mathbb{C}^2$. Qual das expressões seguintes define um produto interno em $\mathbb{C}^2$?

A) $< x, y >= \bar{y}^T \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} x$

B) $< x, y >= \bar{y}^T \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$

C) $< x, y >= \bar{y}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x$

D) $< x, y >= \bar{y}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} x$

Solução: D

---

(10) **7)** Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 com os valores próprios 0 e -1. Suponha ainda que a matriz A não é diagonalizável. Considere as afirmações seguintes:

I) A matriz A não é invertível

II) O valor próprio -1 não pode ter multiplicidade geométrica igual a 2

III) $\det(A - I) = 0$

IV) $\det A = -1$

A lista completa de afirmações correctas é:

A) III e IV B) I e III C) II D) I e II

Solução D)

---

(7) **8)** a) Seja A uma matriz real quadrada de ordem n. Mostre que, se λ é valor próprio da matriz $A^T A$, então $\lambda \geq 0$.

(8) b) Suponha que A é uma matriz real anti-simétrica. Mostre que, A é diagonalizável (através de uma matriz real P diagonalizante) se, e só se, A é a matriz nula.
