

# Capítulo 1

## O plano complexo

### 1.1. Introdução

Os números complexos começaram por ser introduzidos para dar sentido à resolução de equações polinomiais do tipo  $x^2 + 1 = 0$ . Como os quadrados de números reais são sempre maiores ou iguais a zero, esta equação não tem soluções reais. Resolvê-la corresponde a introduzir números que sejam raízes quadradas de números reais negativos. A primeira referência a esta possibilidade parece ser de H. Cardano<sup>1</sup>, em 1545. Foi seguida, em 1572, pela exposição das propriedades algébricas destes números por R. Bombelli<sup>2</sup>, que também introduziu o símbolo  $\sqrt{-1}$ . Em 1748, L. Euler<sup>3</sup> designou este símbolo, a que se chamou “unidade imaginária”, por  $i$ . Foi também Euler que introduziu em 1747 a expressão  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , da qual obteve como caso particular a espantosa relação  $e^{\pi i} = -1$  que relaciona numa mesma expressão os números  $1, e, \pi, i$ , que apareceram em contextos muito diferentes.

A consideração de números complexos não só se revelou necessária para resolver certas equações polinomiais de segunda ordem como forneceu todas as possíveis soluções de equações polinomiais de qualquer ordem, tanto de coeficientes reais como complexos. Este facto, conhecido por “teorema fundamental da álgebra”, foi estabelecido pela primeira vez por C.F. Gauss<sup>4</sup>, em 1816, na sequência de tentativas de vários matemáticos precedentes.

Deve-se também a Gauss a designação “número complexo” e a concepção da relação biunívoca entre números complexos e pontos de um plano, o que permitiu uma definição concreta destes números e abriu caminho ao desenvolvimento do estudo dos números complexos e das funções complexas. Esta relação parece estar implícita na tese

---

<sup>1</sup> Hieronimo Cardano (1501-1576).

<sup>2</sup> Raffael Bombelli (1526-1572).

<sup>3</sup> Leonhard Euler (1707-1783).

<sup>4</sup> Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

de doutoramento de Gauss, acima mencionada, e aparece claramente numa carta que enviou a F.W. Bessel<sup>5</sup> em 1811. Entretanto, a representação geométrica dos números complexos num plano apareceu também nos trabalhos de C. Wessel<sup>6</sup>, em 1799, e de J. Argand<sup>7</sup>, em 1806, embora tenha passado despercebida aos matemáticos do tempo e não tenha sido explorada para prosseguir o estudo dos números complexos. Finalmente, Gauss comunicou publicamente a identificação dos números complexos com pontos de um plano num seu artigo de 1831, onde propôs definir os números complexos como pares ordenados de números reais com certas propriedades específicas e explorou esta definição e a sua identificação com pontos de um plano. A notação  $(a, b)$  para números complexos foi usada pela primeira vez por W.R. Hamilton<sup>8</sup>, em 1837.

## 1.2. Estrutura algébrica do plano complexo

Os **números complexos** são pares ordenados de números reais  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  com uma adição e uma multiplicação definidas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) .$$

Estas operações são comutativas, associativas e têm elementos neutros (respectivamente, zero  $(0, 0)$  e unidade  $(1, 0)$ ). Cada número complexo  $(x, y)$  tem um simétrico  $(-x, -y)$  e, quando diferente de zero, tem um recíproco  $(x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$ . A multiplicação é distributiva em relação à adição. Portanto, os números complexos com a adição e a multiplicação consideradas são um corpo.

Além da **estrutura de corpo**, os números complexos, com as operações consideradas, também têm a **estrutura de espaço linear complexo**. Designa-se este espaço por  $\mathbb{C}$ .

Uma vez que  $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$  e  $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$ , é usual identificar cada número real  $x$  com o número complexo  $(x, 0)$  e, desta forma, considerar  $\mathbb{C}$  como uma extensão de  $\mathbb{R}$ , e  $\mathbb{R}$  como um subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Também se define a **unidade imaginária**  $i = (0, 1)$  (note-se que  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ ) e se identifica cada número complexo  $z = (x, y)$  com a expressão  $x + iy$ . Chama-se a  $x$  **parte real** de  $z$  e a  $y$  **parte imaginária** de  $z$ , e escreve-se  $x = \Re z$  e  $y = \Im z$ . Aos números complexos da forma  $(0, y) = iy$ , com  $y \in \mathbb{R}$ , chama-se **imaginários puros**. Observe-se que  $i^0 = 1$ ,  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ , e assim sucessivamente, pelo que  $i^{4k} = 1$ ,  $i^{4k+1} = i$ ,  $i^{4k+2} = -1$ ,  $i^{4k+3} = -i$ , para  $k \in \mathbb{Z}$ . Em particular,  $1/i = -i$ .

Dado que os números complexos são pares ordenados de números reais, podem ser representados num plano (Figura 1.1). O eixo das abcissas é o conjunto  $\{(x, 0) \in \mathbb{C}\}$  que se designa por **eixo real**. O eixo das ordenadas é o conjunto  $\{(0, y) \in \mathbb{C}\} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$  que se designa por **eixo imaginário**. Como se ilustra na Figura 1.1, a

<sup>5</sup> Friederich Wilhelm Bessel (1784-1846).

<sup>6</sup> Caspar Wessel (1745-1818).

<sup>7</sup> Jean Robert Argand (1768-1822).

<sup>8</sup> William Rowan Hamilton (1805-1865).

utilização de coordenadas polares leva à **representação polar** (ou representação trigonométrica) de números complexos, na forma,  $z = (x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  ou  $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . A  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$  chama-se **módulo**<sup>9</sup> ou **valor absoluto** de  $z$  e a  $\theta$  chama-se **argumento** de  $z$ . Assim, o argumento de  $z$  fica definido a menos da adição de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Chama-se **argumento principal** de  $z$  ao seu argumento que pertence ao intervalo  $]-\pi, \pi]$ . O argumento principal de números complexos fica, assim, definido univocamente para todos os complexos  $z \neq 0$  e designa-se por  $\text{Arg } z$ . Pode-se escrever em termos da função real arco tangente cujo contradomínio é o intervalo  $]-\pi/2, \pi/2[$ , na forma (ver Figura 1.1):

$$(1.1) \quad \text{Arg } z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}\right) & , \text{ se } \text{Re } z > 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ se } \text{Re } z = 0, \text{Im } z > 0 \\ \arctan\left(\frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}\right) + \pi & , \text{ se } \text{Re } z < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ se } \text{Re } z = 0, \text{Im } z < 0 . \end{cases}$$

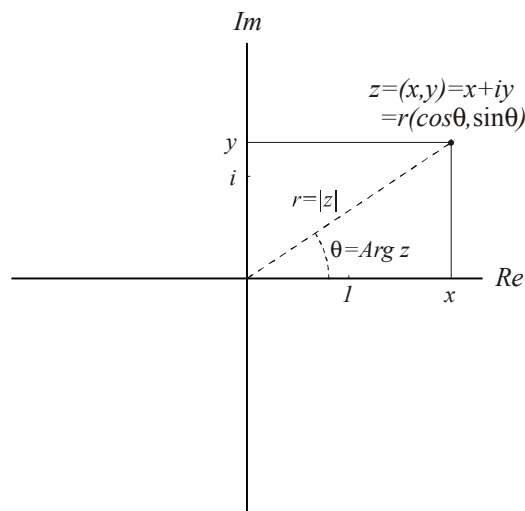


Figura 1.1: Representação cartesiana e polar de números complexos

A adição de números complexos coincide com a adição dos pares ordenados de números reais considerada no espaço linear real  $\mathbb{R}^2$  (Figura 1.2). Geometricamente é dada pela usual regra do paralelogramo para a soma de vectores. A multiplicação de números reais por números complexos coincide com a multiplicação por escalares reais no espaço linear real  $\mathbb{R}^2$ . Geometricamente, corresponde à expansão ou contracção da distância à origem, conforme o número real tem módulo maior ou menor do que 1, com manutenção ou inversão de sentido conforme o número real é positivo ou negativo (Figura 1.2).

<sup>9</sup> A notação  $|z|$  para o módulo, tanto de números reais como complexos, foi introduzida por K. Weierstrass<sup>10</sup> nos seus “Cadernos de Munique” de 1841, publicados apenas em 1894, e usada numa sua comunicação à Academia de Ciências de Berlim em 1859.

<sup>10</sup> Karl Weierstrass (1815-1897).

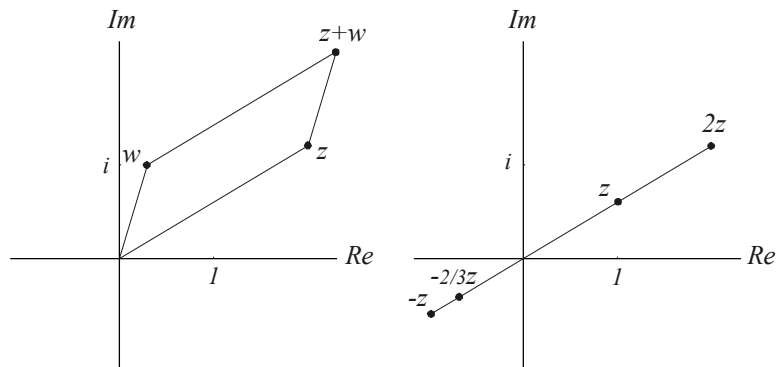


Figura 1.2: Adição de complexos e multiplicação de reais por complexos

O que distingue o espaço linear complexo  $\mathbb{C}$  do espaço linear real  $\mathbb{R}^2$ , ou seja o que distingue o plano complexo  $\mathbb{C}$  do plano  $\mathbb{R}^2$ , é a multiplicação de números complexos (não reais). Por exemplo, a multiplicação de números complexos  $z = (x, y)$  pela unidade imaginária  $i$  dá  $iz = (0, 1) \cdot (x, y) = (-y, x)$ , o que corresponde a uma rotação de  $\pi/2$  no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Mais geralmente, a multiplicação por números complexos pode envolver expansões/contracções e rotações, ou seja pode ser decomposta numa homotetia seguida de uma rotação, ambas centradas na origem (Figura 1.3). Na verdade, a multiplicação de dois números complexos  $z_1 = r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$  dá  $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2))$ .

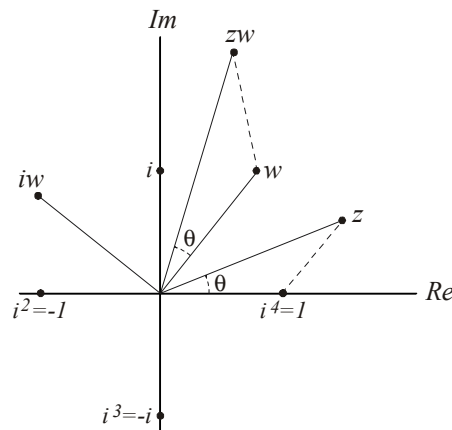


Figura 1.3: Multiplicação de números complexos

Convém introduzir já a **notação exponencial** para a representação polar de números complexos, definindo a exponencial de imaginários puros por  $e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$ , para  $\theta \in \mathbb{R}$ . É claro que são satisfeitas as seguintes propriedades básicas de exponenciais:  $e^{i0} = 1$ ,  $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}$ ,  $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ ,  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ . Além disso, a representação polar de um número complexo pode-se escrever  $z = |z| e^{i\theta}$ , onde  $\theta \in \mathbb{R}$  é um argumento de  $z$ , e o produto de complexos  $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$  pode-se escrever  $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ .

Dado um número complexo  $z = (x, y) = x + iy$  define-se o seu **conjugado** por  $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ . Geometricamente  $\bar{z}$  é a reflexão de  $z$  em relação ao eixo real (Figura 1.5). Verifica-se  $\overline{\bar{z}} = z$ ,  $z \bar{z} = |z|^2$ , para  $z, w \in \mathbb{C}$  tem-se  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$  e, quando  $\overline{w} \neq 0$ ,  $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ . Além disso,  $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$  e  $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$ . Também  $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$  para  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Para a **divisão** de números complexos  $z_1 = (x_1, y_1) = r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1) = |z_1| e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = (x_2, y_2) = r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2) = |z_2| e^{i\theta_2}$ , com  $z_2 \neq 0$ , obtêm-se as fórmulas

$$z_1 / z_2 = z_1 \overline{z_2} / |z_2|^2,$$

$$z_1 / z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2, -x_1 y_2 + x_2 y_1) / (x_2^2 + y_2^2)^2$$

$$z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) (\cos(\theta_1 - \theta_2), \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$z_1 / z_2 = (|z_1| / |z_2|) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

As **potências de expoente inteiro positivo**,  $k \in \mathbb{N}$ , de um número complexo  $z = r(\cos \theta, \sin \theta)$  satisfazem  $z^k = r^k(\cos k\theta, \sin k\theta)$ . Atendendo a que o argumento de um número complexo é definido a menos da adição de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , obtêm-se para **raízes de ordem**  $k \in \mathbb{N}$  de  $z$  os  $k$  números complexos

$$w_j = \sqrt[k]{r} (\cos(\theta/k + 2\pi j/k), \sin(\theta/k + 2\pi j/k)), \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

ou, de forma equivalente,

$$w_j = \sqrt[k]{|z|} e^{i(\theta/k + 2\pi j/k)}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

Conclui-se que todo o número complexo  $z \neq 0$  tem exactamente  $k \in \mathbb{N}$  raízes de ordem  $k$  distintas, e que no plano complexo estas raízes estão igualmente espaçadas sobre a circunferência de raio  $\sqrt[k]{|z|}$  (Figura 1.4).

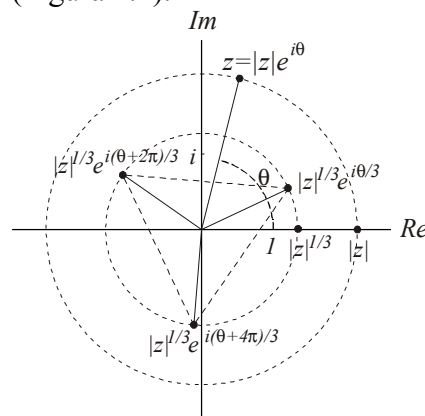


Figura 1.4: Raízes inteiras positivas de números complexos (raízes cúbicas de  $z$ )

Como é natural, recuperam-se os factos seguintes conhecidos para raízes reais: *i*) as raízes de ordem par de números reais positivos são sempre duas e simétricas uma da outra, *ii*) não há raízes de ordem par de números reais negativos, *iii*) as raízes reais de ordem ímpar de números reais não nulos são uma e só uma para cada ordem e a raiz tem o mesmo sinal do número considerado. Observa-se que a situação relativa à existência de raízes inteiras reais, que tem uma descrição um pouco complicada, fica clarificada e simplificada no âmbito dos números complexos. É um primeiro exemplo de diversas situações que vamos encontrar que ficam simultaneamente clarificadas e simplificadas quando se passa de números reais para números complexos.

Um caso particular de interesse são as **raízes da unidade**. É claro que, qualquer que seja a ordem  $k \in \mathbb{N}$  das raízes, uma das raízes da unidade é a própria unidade. As outras  $k-1$  raízes complexas da unidade são os números complexos que correspondem a dividir a circunferência de raio 1 no plano complexo em  $k$  arcos de comprimentos iguais,

a partir da unidade (Figura 1.5). Por exemplo, as raízes quadradas da unidade são  $\pm 1$ , as raízes cúbicas da unidade são  $1, (-\sqrt{3}/2) \pm i(1/2)$ , as raízes de ordem quatro da unidade são  $\pm 1, \pm i$ , etc. Com  $w = \cos(2\pi/k) + i\sin(2\pi/k)$ , temos que as  $k$  raízes da unidade são  $1, w, w^2, \dots, w^{k-1}$ . É fácil ver que  $w^k = 1$  e  $1 + w + w^2 + \dots + w^{k-1} = 0$ . Além disso, se  $\sqrt[k]{z}$  designa uma qualquer das raízes de ordem  $k$  de um complexo  $z \neq 0$ , então todas as raízes de ordem  $k$  de  $z$  podem ser escritas na forma  $w^j \sqrt[k]{z}$ , com  $j = 0, 1, \dots, k-1$ .

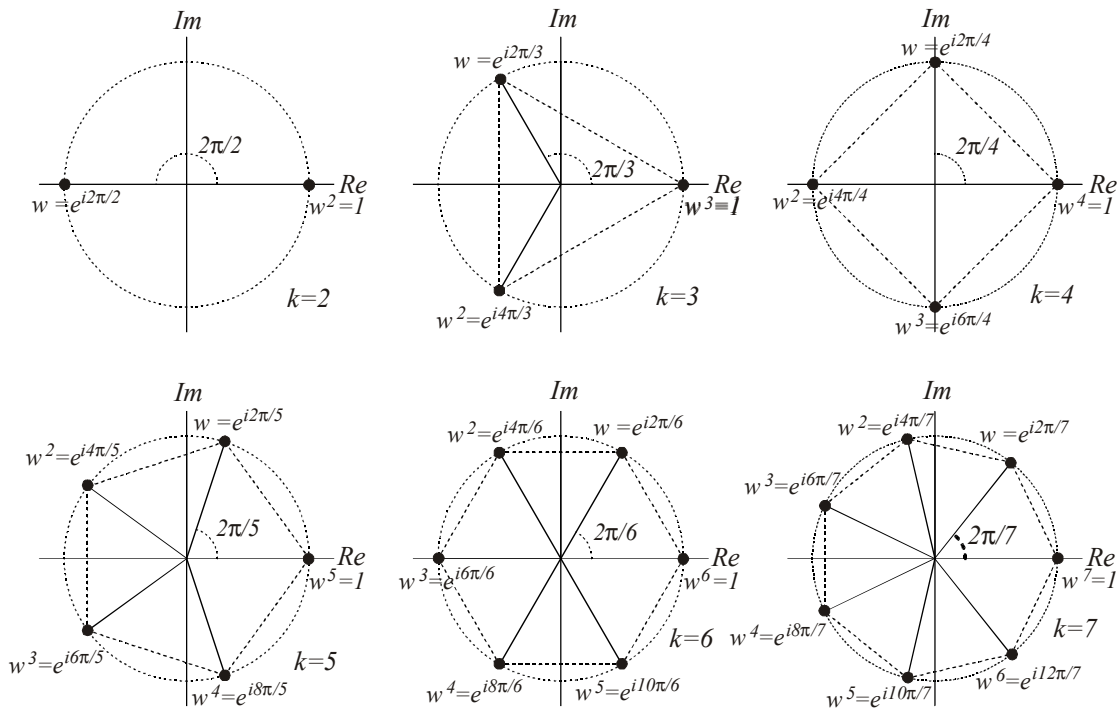


Figura 1.5: Raízes inteiras positivas da unidade de ordens  $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

As potências inteiras negativas de números complexos definem-se, como no caso real, por  $z^{-k} = 1/z^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ . Para  $z \neq 0$ , define-se  $z^0 = 1$ . As potências racionais  $z^{p/q}$ , com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{N}$ , definem-se como sendo as raízes de ordem  $q$  do número complexo  $z^p$ .

### 1.3. Estrutura métrica do plano complexo

O **valor absoluto**  $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$  de um número complexo  $(x, y)$ , define uma **norma** no espaço linear  $\mathbb{C}$ , tal como a mesma relação define uma norma no espaço linear real  $\mathbb{R}^2$ . Em particular, para números complexos  $z, w$ , tem-se a **desigualdade triangular**  $|z + w| \leq |z| + |w|$ , com a igualdade a verificar-se se e só se  $z, w$  são múltiplos positivos um do outro ou um deles é zero. Também  $|zw| = |z||w|$  e, para  $w \neq 0$ ,  $|z/w| = |z|/|w|$ .

A **distância** entre dois números complexos  $z, w$  é definida por  $d(z, w) = |z - w|$ . Assim, as noções de norma e distância no espaço linear complexo  $\mathbb{C}$  coincidem com as correspondentes noções no espaço linear real  $\mathbb{R}^2$ . Portanto, as noções métricas em  $\mathbb{C}$  e em  $\mathbb{R}^2$  são coincidentes. Por exemplo, um conjunto do plano é **limitado** em  $\mathbb{C}$  se e só se é um conjunto limitado em  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.4. Estrutura topológica do plano complexo

A estrutura métrica de  $\mathbb{C}$  define uma estrutura topológica cuja base são os círculos abertos  $B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$  de raios  $r > 0$  e centros em pontos  $z \in \mathbb{C}$ . Como as estruturas métricas de  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  coincidem, também coincidem as suas estruturas topológicas. Em particular, um conjunto do plano é **aberto**, **fechado**, **conexo**, **simplesmente conexo** ou **compacto** em  $\mathbb{C}$  se e só se o é em  $\mathbb{R}^2$ . Verifica-se a coincidência análoga das noções de **ponto interior**, **exterior**, **fronteiro**, **de acumulação** ou **isolado** de um conjunto em  $\mathbb{C}$  e em  $\mathbb{R}^2$ . O mesmo se passa com as noções de conjuntos **interior**, **exterior**, **fronteira**, **fecho** (ou **aderência**) de um conjunto em  $\mathbb{C}$  e em  $\mathbb{R}^2$ . Chama-se **região** em  $\mathbb{C}$  a um subconjunto de  $\mathbb{C}$  não-vazio, aberto e conexo.

### Exercícios

- 1.1. Indique as representações cartesianas e trigonométricas do número complexo:
  - a)  $(1+i)^3$
  - b)  $(2+i3)/(3-i4)$
  - c)  $i^5 + i^{16}$ .
- 1.2. Determine o conjunto dos números  $x, y \in \mathbb{R}$  tais que:
  - a)  $x + iy = |x - iy|$
  - b)  $x + iy = (x - iy)^2$
  - c)  $x + iy = \sum_{k=0}^{100} i^k$ .
- 1.3. Calcule as raízes quadradas de:
  - a)  $i$
  - b)  $-i$
  - c)  $1+i$
- 1.4. Mostre que quaisquer três números complexos cuja soma seja zero, todos com módulos iguais a 1, são vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 1 com centro na origem.
- 1.5. Prove que  $z, w, v \in \mathbb{C}$  são vértices de um triângulo equilátero se e só se  $z^2 + w^2 + v^2 = zw + zv + wv$ .
- 1.6. Prove que para  $z, w \in \mathbb{C}$  se verifica:
  - a)  $|z - w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$
  - b)  $|z + w| = |z| + |w|$ , com  $w \neq 0$ , se e só se  $z/w \geq 0$ .
- 1.7. Determine em que condições a equação em  $\mathbb{C}$   $az + b\bar{z} + c = 0$  define uma recta.
- 1.8. Prove que para  $a, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , e  $b \in \mathbb{R}$ , a equação  $az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$  define uma circunferência no plano complexo.
- 1.9. Prove que todas as circunferências que passam pelos pontos  $a$  e  $1/\bar{a}$  complexos, com  $|a| \neq 1$ , intersectam a circunferência  $|z| = 1$  ortogonalmente.
- 1.10.
  - a) Prove que  $|a - b| / |1 - \bar{a}b| = 1$  se  $|a| = 1$  ou  $|b| = 1$ .
  - b) Que excepção deve ser feita se  $|a| = |b| = 1$ ?
  - c) Prove que a igualdade em a) é uma desigualdade se  $|a| < 1$  e  $|b| < 1$ .
- 1.11. Descreva geometricamente a transformação do domínio para o contradomínio definida pela função complexa  $f(z) = (z + 2)/(z + 3)$ . (*Sugestão: estude imagens de rectas e de circunferências*).
- 1.12. Determine uma função da forma  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  que transforma a circunferência  $|z| = 2$  na circunferência  $|z + 1| = 1$ , o ponto  $-2$  na origem e a origem em  $i$ .
- 1.13. Determine as transformações da forma  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  que transformam a circunferência  $|z| = R$  em si própria.
- 1.14. Prove que uma transformação em  $\mathbb{C}$  que deixa a origem fixa e preserva distâncias é uma rotação ou uma rotação seguida de uma reflexão em relação ao eixo real.
- 1.15. Prove a **identidade de Lagrange**<sup>11</sup> para números complexos  $\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2 - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2$ .
- 1.16. Assim como os números reais podem ser representados numa circunferência em que um dos pontos representa  $\infty$  (recta real estendida  $\mathbb{R}_\infty$ ), também os números complexos podem ser representados numa superfície esférica com o pólo Norte correspondente a  $\infty$  (**plano complexo estendido**  $\mathbb{C}_\infty$ ).
  - a) Determine uma representação deste tipo na superfície esférica  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , estabelecida pela correspondência biunívoca entre os números complexos  $z$  representados no plano equatorial  $x_3 = 0$  (com o eixo dos  $x_1$  identificado com o eixo real e o eixo dos  $x_2$  identificado com o eixo imaginário) e os pontos da superfície esférica que pertencem a uma mesma recta que passa pelo pólo Norte, provando que  $z = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$  e  $x_1 = (z + \bar{z})/(|z|^2 + 1)$ ,  $x_2 = (z - \bar{z})/(|z|^2 + 1)$ ,  $x_3 = (|z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1)$  (Figura 1.6). Chama-se **superfície esférica de Riemann** a esta representação do plano complexo<sup>12</sup> e **projectão estereográfica** à correspondência assim definida de cada ponto do plano complexo para cada ponto da superfície esférica.
  - b) Prove: *As projecções estereográficas de rectas ou circunferências no plano complexo são circunferências na superfície esférica de Riemann.*

<sup>11</sup> Lagrange, Joseph-Louis (1736-1813).

<sup>12</sup> A representação do plano complexo estendido numa superfície esférica foi proposta por B. Riemann em 1851.

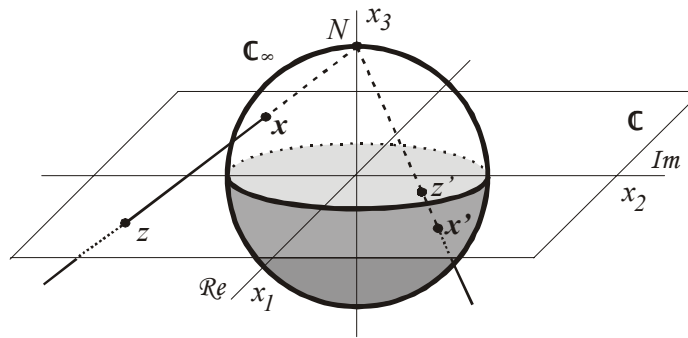


Figura 1.6: Superfície esférica de Riemann e projecção estereográfica

### Exercícios com aplicações a circuitos eléctricos e a sistemas mecânicos

1.17. A relação entre tensão e corrente sinusoidais num circuito eléctrico<sup>13</sup> com resistências, condensadores e bobinas pode ser facilmente expressa em termos de números complexos, dado que qualquer função da forma  $a\sin(\omega t + \varphi)$ , com  $a, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ , a que se chama, respectivamente, **amplitude, frequência angular e fase**, é igual à parte imaginária de  $a e^{i(\omega t + \varphi)} = a e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A e^{i\omega t}$ , com  $A = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ , a que se chama **amplitude complexa**<sup>14</sup>.

a) Considere um circuito  $RLC$  em série (Figura 1.7). Sabendo que a relação entre a tensão  $V(t)$  e a corrente  $I(t)$  no instante  $t$ , nos terminais de uma resistência  $R$ , de uma bobina de indutância  $L$  e de um condensador de capacidade  $C$ , é, respectivamente,  $V(t) = RI(t)$ ,  $V(t) = LI'(t)$  e  $V(t) = (1/C) \int I(t) dt$ , mostre que se a tensão aplicada nos terminais do circuito  $RLC$  for sinusoidal com frequência angular  $\omega$  e amplitude complexa  $V_0$ , então a corrente no circuito é sinusoidal com frequência angular  $\omega$  e amplitude complexa  $I_0$ , e a relação entre ambas é  $V_0 = (R + i(\omega L - 1/(\omega C)))I_0$ .

b) Chama-se **impedância de um circuito eléctrico bipolar** (Figura 1.8) com tensão e corrente sinusoidais nos terminais de amplitudes complexas  $V_0$  e  $I_0$ , respectivamente, a  $Z = V_0 / I_0$ . Determine a impedância dos circuitos das Figuras 1.7 e 1.9, supondo no último caso que  $Z_k$  é a impedância de um circuito bipolar cujos terminais são os nós do correspondente ramo do circuito.

A situação é análoga para sistemas mecânicos lineares de massas e molas com atrito, substituindo tensão eléctrica por força, intensidade de corrente por velocidade, bobinas de indutância  $L$  por massas com o valor de  $L$ , condensadores de capacidade  $C$  por molas com força de restituição proporcional ao deslocamento relativo ao equilíbrio com factor de proporcionalidade  $1/C$  e resistências  $R$  por amortecedores com forças de atrito proporcionais à velocidade com factor de proporcionalidade com o valor de  $R$  (Figura 1.7). Também se considera, de forma análoga, a noção de impedância mecânica.

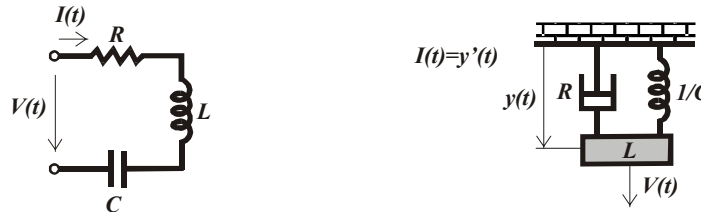


Figura 1.7: Circuito em série  $RLC$  e sistema mecânico análogo

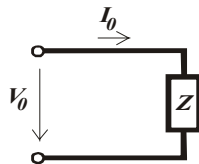


Figura 1.8: Circuito bipolar

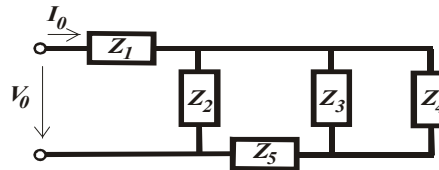


Figura 1.9: Circuito

<sup>13</sup> As primeiras leis gerais da análise de circuitos eléctricos foram formuladas em 1845 pelo matemático Gustav Robert Kirchoff (1824-1887) na sequência do matemático Georg Simon Ohm (1789-1854) ter estabelecido em 1827 que a corrente eléctrica através de um condutor é proporcional à diferença de potencial eléctrico entre os terminais (Lei de Ohm). A primeira lei de Kirchoff afirma que a soma das correntes que entram por ramos ligados a um nó de um circuito é igual à soma das correntes que saem por ramos ligados ao mesmo nó; a segunda lei de Kirchoff afirma que a soma das forças electromotrizes ao longo de uma malha de um circuito é igual à soma das diferenças de potencial nos ramos da malha.

<sup>14</sup> A representação complexa de sinais eléctricos sinusoidais e de impedâncias foi introduzida em 1893 pelo engenheiro Charles Steinmetz (1865-1923) e foi fortemente responsável pelo rápido progresso da engenharia de sistemas eléctricos de corrente alternada no início do século XX. É usada rotineiramente na análise de circuitos e sinais e no controlo de sistemas. A sólida preparação que Steinmetz obteve na Alemanha como estudante universitário de matemática permitiu-lhe dispor de conhecimentos de análise complexa invulgares nos engenheiros da época.