

ANÁLISE E DINÂMICA COMPLEXA
EM UMA VARIÁVEL
E APLICAÇÕES

Luis T. Magalhães

Julho de 2023

Departamento de Matemática • IST • Lisboa

ADVERTÊNCIA

Estas notas são parte de um texto em preparação sobre Álgebra Linear.
Prevê-se incluir secções adicionais.

Facultam-se para utilização exclusiva por professores e alunos do IST.

Índice

Prefácio	v
Introdução	ix
1 Plano complexo	1
1.1 Introdução	1
1.2 Estrutura algébrica	2
1.3 Estrutura métrica	6
1.4 Estrutura topológica	6
2 Funções	11
2.1 Introdução	11
2.2 Representação geométrica de funções	11
2.3 Funções polinomiais e funções racionais	16
2.4 Função exponencial	16
2.5 Funções trigonométricas e hiperbólicas	17
2.6 Logaritmos	20
2.7 Potências e exponenciais de base complexa	22
2.8 Funções trigonométricas inversas	23
2.9 Limite e continuidade	24
3 Derivada	27
3.1 Introdução	27
3.2 Diferenciabilidade e derivada	28
3.3 Transformações conformes	37
4 Integral	51
4.1 Introdução	51
4.2 Integral em caminho	53
4.3 Primitiva	56
4.4 Teorema de Cauchy em conjuntos convexos	61
4.5 Índice de caminho fechado e homotopia de caminhos	62
4.6 Fórmula de Cauchy em conjuntos convexos	67
5 Funções analíticas	71
5.1 Introdução	71
5.2 Sucessões e séries de números complexos	73
5.3 Sucessões e séries de funções uniformemente convergentes	74
5.4 Séries de potências	76
5.5 Definição e propriedades básicas de funções analíticas	79
5.6 Zeros de funções analíticas	82

5.7	Fórmula de Parseval para séries de potências	83
6	Unificação de holomorfia, teorema de Cauchy e analiticidade	91
6.1	Introdução	91
6.2	Holomorfia, teorema de Cauchy e analiticidade	93
6.3	Teorema Fundamental da Álgebra	96
6.4	Estrutura local de funções holomorfas	97
6.5	Analiticidade de séries de funções analíticas	102
7	Teorema e fórmula de Cauchy globais	109
7.1	Introdução	109
7.2	Cadeias e ciclos	110
7.3	Teorema e fórmula de Cauchy globais	114
7.4	Invariância de integrais de funções holomorfas	115
7.5	Regiões simplesmente e multiplamente conexas	116
7.6	Extensões do princípio de módulo máximo	119
7.7	Ordem e tipo de função inteira	122
8	Singularidades, funções meromorfas e teorema dos resíduos	131
8.1	Introdução	131
8.2	Singularidades e séries de Laurent	133
8.3	Funções meromorfas e teorema dos resíduos	137
8.4	Contagem de zeros e pólos de funções meromorfas	144
	Apêndices	169
I.	Elementos de topologia	169
I.1	Introdução	169
I.2	Espaços métricos	173
I.3	Espaços completos	174
I.4	Espaços compactos	179
I.5	Espaços conexos	186
I.6	Espaços topológicos (não) metrizáveis	193
I.7	Espaços de homologia-1 e de homologia-0	197
I.8	Teorema da curva de Jordan	198
I.9	Triangulação de superfícies compactas conexas	204
I.10	Classificação de superfícies compactas conexas	207
II.	Elementos de integral e medida de Lebesgue	215
II.1	Introdução	215
II.2	Propriedades de integral e medida de Lebesgue	217
II.3	Teorema de densidade de Lebesgue	221
III.	Invariância de integral de campo vectorial fechado com homotopia	223
	Bibliografia	227

Prefácio

Este é principalmente um livro de apoio ao estudo inicial de Análise Complexa. Centra-se nos aspectos básicos de funções complexas de uma variável, incluindo os da teoria geométrica destas funções, e de dinâmica definida por iteração de funções racionais complexas, estes num capítulo final, quase um quarto do livro, invulgar em textos de iniciação ao estudo de funções complexas. Este capítulo, além de tratar de um tema com aspectos de auto-similaridade, estrutura fractal e caos que têm fascinado muitas pessoas e tiveram importantes contribuições recentes, é particularmente apropriado para fechar o livro porque utiliza com fertilidade muito do que é desenvolvido em capítulos anteriores.

A Análise Complexa de Uma Variável tem três características particularmente interessantes: (1) ideias simples unificadoras de conceitos que aparecem em análise real sem relações directas ou complicadas, (2) fertilidade para o desenvolvimento de outras áreas da matemática, e (3) relevância para aplicações a outras ciências e a engenharia.

A ideia orientadora principal ao longo do livro é revelar com clareza estas três características e iluminá-las, mostrando como muitos conceitos férteis que levaram ao desenvolvimento de novos campos de Matemática na realidade emergiram no estudo de Análise Complexa de Uma Variável, em particular em Topologia, Geometria Diferencial, Geometria Algébrica, Análise Harmónica, Equações Diferenciais Elípticas, Cálculo de Variações, Sistemas Dinâmicos. Estou convicto que é muitíssimo útil para estudantes serem introduzidos a estes conceitos neste contexto mais simples em que emergiram antes de os aprofundar em estudos mais avançados e especializados, como é hoje em dia comum.

Foram publicados muitos livros de iniciação neste tópico e alguns são excelentes. Por isso, tem de haver boas razões para publicar mais um outro livro. Além da inclusão já mencionada de uma iniciação a dinâmica complexa que corresponde a cerca de um quarto do livro, e a ideia orientadora ao longo do livro que se acabou de mencionar, há várias razões para tal:

- Em primeiro lugar, o livro foi concebido com a flexibilidade de ser uma boa base para uma primeira disciplina de meio semestre em Análise Complexa como fundação sólida para estudos subsequentes (em apenas um pouco mais de 100 páginas de texto e 40 páginas de exercícios, incluindo mais de 100 figuras), mas também, em capítulos adicionais, uma disciplina de um semestre e para estudo individual de acordo com os interesses e a curiosidade do leitor.

- Utilização frequente, desde o início, de representações geométricas com a intenção de desenvolver a compreensão geométrica das restrições associadas à diferenciabilidade de funções complexas e às transformações que definem; em conjunto, o livro tem mais de 220 figuras.
- O conhecimento de matemática que é comum hoje em dia estudantes adquirirem em disciplinas de Análise Matemática e Álgebra Linear é completamente utilizado, evitando repetições, sublinhando semelhanças e chamando a atenção para aspectos novos ou diferentes.
- No início, os conceitos de derivada, integral e analiticidade são considerados separadamente em capítulos consecutivos, seguidos de um capítulo unificando-os e, depois, da globalização do Teorema de Cauchy e da sua aplicação ao Teorema dos Resíduos e a séries de Laurent; é aqui que a matéria para uma disciplina de meio semestre termina.
- São incluídos muitos exercícios para trabalho à escolha do leitor. Vários são sobre tópicos clássicos importantes que não são tratados no corpo principal do texto e também muitos sobre aplicações a diferentes áreas, *e.g.* circuitos eléctricos, sistemas mecânicos, hidrodinâmica, electrostática, propagação de calor em equilíbrio, análise e processamento de sinais, análise e controlo de sistemas lineares, dinâmica de fluidos, aerodinâmica, elasticidade. Aplicações a estas áreas foram historicamente forte motivação para o desenvolvimento da Análise Complexa. Penso que vale muito a pena manter bem vivas as ligações com aplicações em áreas para além da Matemática.
- Depois da parte do livro pensada para apoiar uma disciplina de meio semestre consideram-se aspectos da teoria geométrica de funções complexas, incluindo alguns tópicos que não é usual tratar a este nível introdutório, como fins primos, comprimento extremo, uma unificação de caracterizações de regiões simplesmente conexas por propriedades de natureza muito diferente (topológicas da região, topológicas do complementar da região, analíticas, algébricas), funções univalentes com uma prova da Conjectura de Bieberbach, caracterização algébrica de regiões conformes e de regiões conformes a Superfícies de Riemann, métrica de Poincaré, Teorema de Uniformização.
- As importantes noções topológicas que historicamente apareceram no estudos de funções complexas são apresentadas de maneira simples e natural, como as de conexidade, número de rotação, homotopia, homologia, compactificação¹ revestimento, grupo fundamental, característica de Euler, género de superfície. É analogamente para noções básicas de Geometria Diferencial (variedade diferencial, métrica riemanniana curvatura de Gauss, folheação, *orbifold*), Geometria Algébrica

¹Superfície Esférica de Riemann compactificação do plano complexo e Compactificação de Carathéodory de regiões simplesmente conexas propriamente contidas no plano complexo.

(curva plana afim, curva projectiva, fórmula de Riemann-Hurwitz, teoremas do tipo Riemann-Roch e Abel-Jacobi), Análise Harmónica (função harmónica, série de Fourier, transformação de Fourier), Equações Diferenciais Parciais Elípticas (equação de Laplace, propriedade de valor médio, princípio de máximo), Cálculo de Variações (princípio de Dirichlet, sucessões minimizadoras), Sistemas Dinâmicos (conjugação, linearização em pontos fixos ou periódicos, atractor, bacia de atracção, órbita homocínica, papel de pontos críticos, hiperbolicidade, autosemelhança, bifurcação, teoria KAM).

- Há a preocupação sistemática de situar historicamente as contribuições para os conceitos tratados.
- A maior parte dos assuntos são clássicos, mas bastante mais de metade do livro é sobre resultados obtidos no séc. XX, vários nas 4 décadas mais recentes.

The first nine chapters were very influenced by the books of L. Ahlfors, *Complex Analysis*, W. Rudin, *Real and Complex Analysis* and B. Chabat, *Introduction à l'Analyse Complexe*, but differ from these and other texts in many ways. The 1st of these books stands as one of the best references on the subject, despite its 1st edition having been more than half a century ago. Chapters 9 to 12 were also heavily influenced by the books: Ahlfors, L.V., *Conformal Invariants - Topics in Geometric Function Theory*; Remmert, R., *Classical Topics in Complex Function Theory*; and the two books last chapter by Milnor, J.W., *Dynamics in One Complex Variable*, and Carleson, L., Gamelin, T.W., *Complex Dynamics*².

Referem-se a seguir algumas outras ideias gerais simples da orientação adoptada.

Uma primeira ideia é que a aprendizagem de Matemática, além de estudo regular que permita um gradual amadurecimento da apreensão dos conceitos, requer a resolução de exercícios por cada aluno individualmente. É quase sempre ao tentarmos resolver problemas que esclarecemos conceitos e nos apercebemos de dificuldades que nos escapam em leituras ou em aulas. Por esta razão incluem-se muitos exercícios no final dos vários capítulos. A resolução de exercícios e a procura individual de exemplos, contra-exemplos e provas para esclarecer questões que surgem durante o estudo são uma insubstituível componente experimental essencial para progredir no conhecimento de Matemática. Esta referência à necessidade de resolução de problemas por cada aluno deve ser bem entendida: não é para automatizar a resolução de “exercícios tipo”; bem pelo contrário, um exercício deixa de ser útil quando a sua resolução está automatizada ou não oferece dificuldades.

Outra ideia é a minha convicção que no ensino de Matemática, tal como de outras disciplinas, os aspectos de natureza utilitária ligados à necessi-

²Rudin, Walter (1921-2010). Chabat, Boris (1917-1987). Remmert, Reinhold (1930-2016). Carleson, Lennart (1928-). Gamelin, Theodore William (1939-).

dade deste ou daquele tópico para aplicações imediatas devem ser integrados em objectivos mais ambiciosos e nunca devem ser tomados como objectivos dominantes a adquirir por simples automatização. Treinar alunos num receituário de cálculo sem ensinar os raciocínios que os fundamentam não ajuda a prepará-los para acompanharem o progresso da ciência e da tecnologia, contribuírem para o seu desenvolvimento ou aplicação, e até para se ajustarem a mudanças de actividades ao longo da vida. Além disso, a formação de tipo exclusivamente utilitário é geralmente feita em condições em que os alunos não conseguem identificar as limitações dos métodos usados nem adaptá-los a situações que não sejam de rotina escolar. Do ponto de vista de formação geral é mais importante ensinar ideias e conceitos que se revelaram férteis e ilustrar a sua influência noutras actividades, em particular em áreas relacionadas com as de especialização dos alunos, do que insistir num tratamento exclusivamente virado para a ginástica de cálculo. A fertilidade de conceitos demonstrada historicamente é o único critério sólido para escolha de tópicos a estudar.

Este livro teve uma gestação prolongada e com longas interrupções. Os primeiros 8 capítulos foram testados, como manuscritos, em aulas para alunos do 2º ano dos cursos de engenharia, física e matemática do IST da Universidade Técnica de Lisboa (que entretanto se juntou com a Universidade de Lisboa) durante um período de vários anos anterior a 1997. Retomei o texto depois de uma ausência de cinco anos em cargo nacional de administração de ciência e tecnologia, ampliando-o e modificando-o durante o ensino de um *honours course* no semestre de Primavera de 2002/03, altura em que os primeiros oito capítulos foram pela primeira vez disponibilizados a alunos aproximadamente na forma que têm presentemente. Infelizmente, não tive então oportunidade de completar a preparação do texto para publicação devido a outra ausência da Universidade por seis anos e meio para outro cargo de administração pública de ciência e tecnologia, agora para coordenar as políticas nacionais de tecnologias digitais e a sua apropriação social. Só pude retomar a preparação do texto há dois anos, o que, contudo, teve a vantagem de poder incluir alguns resultados importantes obtidos na segunda metade do séc. XX e de ganhar tempo para perspectivar melhor resultados obtidos nas últimas décadas desse período.

Introdução

Mencionou-se no prefácio que a Análise Complexa de Uma Variável tem três características particularmente interessantes: **ideias simples unificadoras** de conceitos que em análise real aparecem como distintos ou complicados, **fertilidade** para o desenvolvimento de outras áreas da matemática, e **relevância para aplicações** a outras ciências e a engenharia.

As características unificadoras e explicativas de conceitos e situações encontrados em álgebra e análise real elementares que se tornam evidentes no quadro complexo, são visíveis em exemplos simples:

- (i) Todo número real ou complexo não 0 tem n raízes complexas de ordem n , igualmente espaçadas numa circunferência do plano complexo com centro 0, enquanto um número real pode ter 0, 1 ou 2 raízes reais³.
- (ii) Equações polinomiais de grau n com coeficientes reais ou complexos têm n soluções complexas, contando multiplicidades, enquanto até podem não ter qualquer solução real, mesmo com todos coeficientes reais⁴.
- (iii) Funções trigonométricas complexas podem ser expressas em termos da função exponencial e as funções hiperbólicas são iguais a funções trigonométricas sob um simples rotação da variável, unificando funções que no quadro real aparecem desligadas.
- (iv) Séries de Taylor⁵ de funções complexas diferenciáveis num ponto convergem absolutamente para o valor da função em pontos a distância menor do que um raio de convergência, que é a distância do ponto aos pontos mais próximos em que a função não é diferenciável ou não está definida, e divergem em pontos a distância maior, enquanto a série de Taylor de uma função real indefinidamente diferenciável pode não convergir para a função sem haver pontos em que deixe de ser indefinidamente diferenciável⁶. As funções analíticas⁷ complexas são as funções diferenciáveis, enquanto uma função real pode ser indefinidamente diferenciável sem ser analítica. Uma função complexa diferenciável é indefinidamente diferenciável e analítica, enquanto uma função real diferenciável pode até não ter segunda derivada.

³Resp., $\sqrt[2k]{a}$, com $a < 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[2k+1]{a}$, com $a < 0$ e $k \in \mathbb{N}$ ou $\pm \sqrt[2k]{a}$, com $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Abrevia-se “respectivamente” por “resp.” em todo o texto.

⁴e.g. $x^{2k} + 1 = 0$, com $k \in \mathbb{N}$.

⁵Taylor, Brook (1685-1731).

⁶e.g. a função real $\frac{1}{1+x^2}$ é indefinidamente diferenciável em \mathbb{R} , mas tem série de Taylor convergente se $|x| < 1$ e divergente se $|x| > 1$, enquanto a função complexa definida pela mesma fórmula é indefinidamente diferenciável para $|x| < 1$, mas não está definida nos pontos $\pm \sqrt{-1}$, que têm valor absoluto 1, o que explica que o raio de convergência seja 1.

⁷i.e. representáveis por séries de potências num conjunto aberto.

- (v) Funções complexas diferenciáveis num conjunto aberto são analíticas e indefinidamente diferenciáveis, enquanto funções reais indefinidamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém um ponto podem não ser analíticas em qualquer conjunto aberto que contenha esse ponto⁸.
- (vi) Séries de Fourier⁹ de funções periódicas complexas são séries de potências a menos de transformação de variáveis por uma exponencial, que para funções periódicas reais tem expoente imaginário puro, enquanto no quadro real os dois tipos de séries aparecem desligados.

Um outro aspecto é a fertilidade da Análise Complexa para o desenvolvimento de outras áreas da Matemática, como Teoria de Potencial e Equações Diferenciais Parciais (pois as partes real e imaginária de uma função complexa diferenciável são soluções da equação diferencial parcial de Laplace que é satisfeita pelo potencial associado a equilíbrio de processos conservativos em meios contínuos), Análise Funcional e Cálculo de Variações (pois as soluções da equação de Laplace satisfazem o Princípio de Dirichlet de minimização do quadrado da norma do gradiente, o que corresponde a minimizar a energia dos campos vectoriais de que são potenciais), Análise Harmónica (pois funções complexas diferenciáveis são Harmónicas e séries de Fourier e transformações de Fourier e de Laplace são definidas no quadro complexo), Geometria Diferencial (em que as noções de variedade diferencial e de Geometria Riemanniana encontraram a motivação nas Superfícies de Riemann inicialmente consideradas em Análise Complexa para resolver por funções (*i.e.* relações unívocas) a “inversão” de funções não injectivas¹⁰), Topologia Algébrica (pois as noções de número de rotação de caminho fechado, Homotopia, Homologia, Revestimento, Grupo Fundamental, característica de Euler, *Genus* e triangulação de superfície surgiram naturalmente no estudo de funções de uma variável complexa), Geometria Algébrica (pois os conjuntos de nível de funções complexas são curvas algébricas, e curvas planas afins e curvas algébricas projectivas¹¹, estão associadas a Superfícies de Riemann), Teoria Analítica de Números (em que a distribuição dos números primos pode ser esclarecida através da Função Zeta de Riemann¹²), Sistemas Dinâmicos (dando o context em que esta área foi iniciada e contribuindo para uma parte substancial da teoria básica, incluindo a noção de conjugação, linearização em pontos de equilíbrio ou periódicos, a consideração de

⁸*e.g.* a função real e^{-1/x^2} prolongada por continuidade a 0 é indefinidamente diferenciável e as derivadas de qualquer ordem assim como a função são 0 em 0, que é o único ponto em que a função é 0, pelo que não é analítica em conjuntos que contenham 0, enquanto a função complexa definida pela mesma fórmula não pode ser prolongada por continuidade a 0 (com $y \in \mathbb{R}$, $e^{-1/(iy)^2} = e^{1/y^2} \rightarrow +\infty$ quando $y \rightarrow 0$), e não é analítica em conjuntos abertos que contenham 0.

⁹Fourier, Joseph (1768-1830).

¹⁰*e.g.* z^2 .

¹¹Uma curva plana afim é o conjunto dos zeros de um polinómio complexo de duas variáveis. Uma curva algébrica projectiva é um conjunto de pontos do plano projectivo complexo correspondente aos zeros de um polinómio complexo homogéneo de três variáveis. O plano projectivo complexo é o conjunto das classes de equivalência de pontos de \mathbb{C}^3 pela relação de equivalência entre pontos definida por um ser múltiplo complexo do outro.

¹² $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$.

pontos e órbitas periódicas atratores, bacias de atracção, pontos e órbitas periódicas repulsores, o papel de pontos críticos, a consideração de órbitas homoclínicas, a noção de hiperbolicidade, o papel de pequenos denominadores em pontos de equilíbrio neutros que está na base da Teoria KAM¹³, a utilização de Topologia Algébrica no estudo da dinâmica de sistemas, a noção de conjunto atractor e a questão da sua dimensão)¹⁴.

As origens de Topologia Algébrica, Geometria Algébrica, Geometria Riemanniana, Sistemas Dinâmicos, Análise Harmónica, Equações Diferenciais Parciais Elípticas cruzam-se com Análise Complexa de tal modo que é muito benéfico preceder o estudo dessas áreas por um aprofundamento do estudo de Análise Complexa nessas direcções, pois é neste contexto que surgem num quadro natural e relativamente simples, o que facilita muito a apreensão dos conceitos básicos envolvidos e o estudo especializado desses assuntos.

A Análise Complexa tem muitas aplicações. O seu desenvolvimento inicial confundiu-se com o de certas áreas de aplicação como cartografia, hidrodinâmica, aerodinâmica, elasticidade, electrostática, electromagnetismo, processos de difusão em química e em biologia. A ligação da Análise Complexa a áreas de outras ciências e de engenharia é tão íntima que o próprio desenvolvimento de várias dessas áreas se confundiu com os métodos de Análise Complexa, por exemplo no cálculo do movimento de fluidos, da elasticidade em sólidos, dos campos eléctricos e electromagnéticos resultantes de distribuições de carga e corrente eléctricas, da força de sustentação de asas de aviões, de sistemas de controlo, de análise e processamento de sinais. Houve até uma época em que o termo Matemática Aplicada era praticamente sinónimo de métodos de análise complexa e equações diferenciais.

Por isso, não surpreende que vários dos mais destacados matemáticos de toda História se tenham interessado pela Análise Complexa. Encontramos não só contribuições dos 15 notáveis da história da matemática que contribuíram especialmente para a Análise Complexa de funções de uma variável cujas biografias são resumidas no apêndice III – Euler, Gauss, Cauchy, Weierstrass, Riemann, Klein, Schwarz, Poincaré, Picard, Goursat, Carathéodory, Montel, Löwner, Nevanlinna e Ahlfors¹⁵ – como de outros matemáticos distintos entre os quais uma lista impressionante de mais de um terço de todos que receberam a Medalha Fields¹⁶ em vários anos desde 1936, quando

¹³Designação dada em 1968 por Felix Izraïlev (1941-) e Boris Chirikov (1928-2008) com as iniciais dos últimos nomes de Andrei Kolmogorov (1903-1987), Vladimir Arnold (1937-2010) e J. Moser (1928-1999), que a desenvolveram inicialmente. Foi criada com motivação na questão de Mecânica Celeste de estabilidade do Problema de 3 Corpos – Sol, Terra e Lua. Jürgen Moser recebeu o George David Birkhoff Prize de 1968 atribuído pela AMS – *American Mathematical Society* e a SIAM – *Society of Industrial and Applied Mathematics*.

¹⁴Laplace, Pierre-Simon (1749-1827). Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805-1859). Riemann, Bernhard (1826-1866). Euler, Leonhard (1707-1783).

¹⁵Gauss, Carl Friedrich (1777-1855). Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857). Weierstrass, Karl (1815-1897). Klein, Felix (1849-1925). Schwarz, Hermann (1843-1921). Poincaré, Henri (1854-1912). Picard, Charles Émile (1856-1941). Goursat, Édouard (1858-1936). Carathéodory, Constantin (1873-1950). Montel, Paul Antoine (1876-1975). Löwner, Karl (1893-1968), mudou o nome para Charles Loewner quando emigrou para EUA. Nevanlinna, Rolf (1895-1980). Ahlfors, Lars (1907-1966).

¹⁶A Medalha Fields foi instituída em 1936 pela União Internacional de Matemática, muito

este prémio começou a ser atribuído de quatro em quatro anos¹⁷: L. Ahlfors (1936), A. Selberg (1950), K. Kodaira (1954), J.P. Serre (1954), J. Milnor (em 1962), M. Atiyah (1966), A. Grothendieck (1966), H. Hironaka (1970), E. Bombieri (1974), P. Deligne (1978), C. Fefferman (1978), A. Connes (1982), W. Thurston (1982), S.-T. Yau (1982), S. Donaldson (1986), S. Mori (1990), J.-C. Yoccoz (1994), R. Borcherds (1998), C. McMullen (1998), W. Werner (2006), S. Smirnov (2010), A. Avila (2014), M. Mirzakhani (2014).

Também é interessante observar a rapidez do desenvolvimento da Análise Complexa de funções de uma variável, principalmente nos cem anos de 1810 a 1910 e, com menos intensidade, nos trinta anos seguintes, embora com contribuições importantes durante todo o período até hoje.

Começa-se por rever a definição de números complexos, a sua representação geométrica como pontos de um plano e as **estruturas algébrica, métrica e topológica** do plano complexo, dando ênfase à extensão algébrica dos números reais pelos números complexos e à identificação métrica e topológica do plano complexo com o plano real.

No capítulo 2 define-se **exponencial complexa** e as correspondentes funções **logaritmo**, e são esclarecidas as suas relações com funções trigonométricas, hiperbólicas e potências, mostrando que no quadro complexo todas estas funções traduzem aspectos da função exponencial. São introduzidos diversos modos de representação geométrica de funções complexas: deformação geométrica do plano pela representação de famílias de curvas e das suas imagens, gráficos das partes real e imaginária, gráficos do módulo e de um argumento, linhas de nível das partes real e imaginária.

Seguem-se três capítulos dedicados, por ordem, às noções de **derivada, integral, função analítica**.

As equações de Cauchy-Riemann, relacionando derivadas parciais das partes real e imaginária da função em relação às partes real e imaginária da variável, são condições necessárias para uma função complexa ser diferenciável (*i.e.* **Holomorfa**), e são exploradas algumas consequências destas equações, como a de funções com derivadas diferentes de zero definirem Transformações Conformes, analisando-se em detalhe a importante classe das **Transformações de Möbius**¹⁸ e como deformam o plano complexo.

devido ao esforço de John Charles Fields (1863-1932). É atribuída a matemáticos com menos de 40 anos no Congresso Internacional de Matemática que reúne de 4 em 4 anos, embora interrompido entre 1936 e 1950 devido à II Guerra Mundial. É vista como um tipo de Prémio Nobel de Matemática, rivalizando apenas com o Prémio Abel que, embora considerado em 1902, só foi criado pelo Governo da Noruega em 2001 com o objectivo explícito de “dar aos matemáticos o seu próprio equivalente a um Prémio Nobel”.

¹⁷Selberg, Atle (1917-2007). Kodaira, Kunhiiko (1915-1997). Serre, Jean Pierre (1926-). Milnor, John (1931-). Atiyah, Michael (1929-2019). Grothendieck, Alexander (1928-2014). Hironaka, Heisuke (1931-). Bombieri, Enrico (1940-). Deligne, Pierre (1944-). Fefferman, Charles (1949-). Connes, Alain (1947-). Thurston, William (1946-2012). Donaldson, Simon (1957-). Yoccoz, Jean-Christophe (1957-2016). Yau, Shing-Tung (1949-). Mori, Shigefumi (1951-). Borcherds, Richard (1959-). McMullen, Curtis (1958-). Werner, Wendelin (1968-). Smirnov, Stanislav (1970-). Avila, Artur (1979-). Mirzakhani, Maryam (1977-2017).

¹⁸*i.e.* funções do tipo $\frac{az+b}{cz+d}$, com a, b, c complexos e $ad-bc \neq 0$.

No capítulo dedicado a integral discute-se a existência de primitiva e estabelecem-se para funções Holomorfas em conjuntos convexos o **Teorema de Cauchy** (integrais de funções Holomorfas em caminhos fechados são nulos) e a **Fórmula de Cauchy** (que dá o valor de uma função Holomorfa em termos de integrais em caminhos fechados) locais, com base no resultado de E. Goursat que em 1900 dispensou a hipótese de continuidade da derivada (a Fórmula de Cauchy envolve a consideração do número e sentido de voltas de um caminho fechado em torno de um ponto, o que é expresso pela noção de **Índice** ou **Número de Rotação** do caminho em relação ao ponto, que é invariante sob deformações contínuas do caminho fechado na região complementar ao ponto considerado, expressas rigorosamente pela noção de **Homotopia**); com a Fórmula de Cauchy obtém-se a **Propriedade de Valor Médio** de funções Holomorfas em círculos fechados que dá o valor da função no centro pela sua média na circunferência que limita o círculo.

Seguindo K. Weierstrass e E. Cartan opta-se por identificar função analítica com função igual à soma de uma série de potências; esclarecem-se os conceitos de convergência simples, absoluta e uniforme de séries, e de convergência de séries de potências. Como aplicações estabelece-se que as funções analíticas são indefinidamente diferenciáveis e as derivadas de qualquer ordem também são analíticas, esclarece-se que os zeros de funções analíticas em regiões (*i.e.* conjuntos abertos conexos) em que não se anulam são pontos isolados e têm ordem finita, prova-se o **Teorema de Unicidade de Funções Analíticas** (funções analíticas numa região que coincidem num conjunto que tem um ponto limite são iguais), estabelece-se a Fórmula de Parseval para séries de potências, que é usada para obter as Estimativas de Cauchy (majorações das derivadas de qualquer ordem num ponto em termos de majorantes da função num círculo centrado no ponto e no raio do círculo), o Teorema de Liouville (as únicas funções inteiras, *i.e.* analíticas em todo \mathbb{C} , limitadas são as constantes), o **Princípio de Módulo Máximo** (funções analíticas com valores absolutos que assumem um valor máximo numa região são constantes) e o correspondente resultado para mínimos¹⁹.

O capítulo seguinte é de **unificação de derivada, integral, função analítica** (definidas separadamente em cada um dos três capítulos precedentes), estabelecendo a equivalência de holomorfia, validade do Teorema de Cauchy em conjuntos convexos, e analiticidade. Prova-se o **Teorema Fundamental da Álgebra**²⁰ por aplicação simples do Teorema de Liouville e esclarece-se a **estrutura local de funções Holomorfas**, considerando também os teoremas de Função Inversa e de Aplicação Aberta. Prova-se o **Teorema de Weierstrass de analiticidade dos limites de sucessões e séries de funções analíticas uniformemente convergentes em conjuntos compactos**. Fica claro assim que a extensão de funções polinomiais a funções analíticas pela consideração de séries não conduz a nova extensão se

¹⁹Möbius, August Ferdinand (1790-1868). Cartan, Élie (1869-1951). Liouville, Joseph (1809-1882).

²⁰É a primeira de 7 provas alternativas dadas neste livro.

aplicado a funções analíticas com a convergência uniforme em conjuntos compactos. O capítulo termina com **teoremas de Hurwitz**²¹ sobre passagem de várias propriedades dos termos de sucessões de funções uniformemente convergentes em conjuntos compactos para os resp. limites (inexistência de zeros, injectividade e inclusão de contradomínios num mesmo conjunto).

No capítulo 7 **globalizam-se o Teorema e a Fórmula de Cauchy**, em termos de **Homologia** de caminhos definida com a noção de Número de Rotação (ou Índice) de um caminho fechado em relação a um ponto. Em consequência, o Teorema de Cauchy é imediatamente válido para funções Holomorfas em regiões simplesmente conexas. Também se consideram extensões do Princípio de Módulo Máximo a regiões ilimitadas, incluindo o **Princípio de Phragmén-Lindelöf** obtido em 1908 que dá condições para funções Holomorfas em regiões ilimitadas com crescimento moderado no infinito serem constantes. Este Princípio é aplicado a provar o **Princípio de Incerteza de Hardy**, sobre a impossibilidade de uma função ser simultaneamente “localizada no espaço e na frequência”. O capítulo termina com as noções de ordem e tipo de funções inteiras e uma prova da Conjectura de Denjoy do número de valores assintóticos de funções inteiras ao longo de curvas que tendem para infinito não exceder o dobro da ordem da função. Esta conjectura de 1907 por A. Denjoy esteve em aberto 21 anos apesar de tentativas de vários matemáticos experientes; foi provada – **Teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors** – por L. Ahlfors²² em 1929.

No capítulo 8 consideram-se **singularidades isoladas** de funções, classificadas como removíveis, pólos ou singularidades essenciais, e a **série de Laurent** (série de potências com possíveis expoentes inteiros negativos) de função numa singularidade isolada. Introduce-se a noção de **função Meromorfa** (sem singularidades ou com singularidades que são pólos isolados) e estabelece-se, como corolário simples do Teorema de Cauchy Global do capítulo precedente, o **Teorema dos Resíduos** (que permite calcular integrais de funções Meromorfas em caminhos fechados por somas de resíduos, dados pelo 1º coeficiente de ordem negativa da série de Laurent em pólos na região limitada pelo caminho). Seguem-se aplicações do Teorema dos Resíduos ao cálculo de integrais de funções complexas e reais, incluindo integrais impróprios, e provas dos **Princípio do Argumento** e **Teorema de Rouché**²³ sobre contagem e localização de zeros e pólos.

Termina aqui a parte que tem o objectivo específico de apoiar uma primeira disciplina de meio semestre em funções complexas de uma variável.

Alguns tópicos clássicos importantes de Análise Complexa em Uma Variável aparecem como exercícios, especialmente nos capítulos 6 e 8: **Princí-**

²¹Hurwitz, Adolf (1859-1919).

²²Quando, com 21 anos, estava a iniciar a preparação para doutoramento, o que surpreendeu o mundo matemático e lhe abriu um percurso que o levou à Medalha Fields 7 anos depois. Phragmén, Lars Edward (1863-1937). Lindelöf, Ernst (1870-1946). Hardy, Godfrey Harold (1877-1947). Denjoy, Arnaud (1884-1974). Carleman, Torsten (1892-1949).

²³Rouché, Eugène (1832-1910).

pio de Simetria para funções Holomorfas; ordem, tipo e género de função Inteira; **Teorema dos 3 Círculos de Hadamard**; Função Gama (extensão de factorial de números naturais); **Teorema de Mittag-Leffler** (de existência de funções Meromorfas com pólos e partes singulares pré-estabelecidas); produtos infinitos (incluindo o **Teorema de Factorização de Weierstrass** que estende para funções inteiras a factorização de polinómios em factores elementares, cada um dependente de um dos zeros da função); **Função Zeta de Riemann** (a série dos recíprocos dos números naturais elevados a cada ponto à variável independente, associada à distribuição dos números primos e à Hipótese de Riemann); **expansões assintóticas** em séries de potências (dando aproximações de funções num ponto por séries que podem divergir); **Fórmula de Jensen** (para o valor de uma função no centro de um círculo fechado em que é Holomorfa); **funções Elípticas**, *i.e.* funções Meromorfas biperiódicas, incluindo a função- \wp de Weierstrass; **domínio máximo de existência de função Holomorfa** e **domínio de Holomorfa** de função (incluindo a prova de toda região em \mathbb{C} ser domínio de Holomorfa de alguma função); **Teorema de Runge** (de aproximação de funções Holomorfas por funções racionais com pólos pre-fixados fora do conjunto de Holomorfa)²⁴.

A parte final do livro consiste em cinco capítulos adicionais em temas fundamentais, com **incidência em aspectos geométricos e topológicos** julgados especialmente úteis para continuação do estudo de Análise Complexa de funções de uma variável. Podem ser usados como base para a segunda parte de uma disciplina de um semestre ou para partes de disciplinas subsequentes. Em particular, o último capítulo pode ser a base de uma disciplina sobre dinâmica definida por iteração de funções Holomorfas, com recurso a tópicos de capítulos anteriores que os alunos ainda não dominem, visto que usa praticamente toda a matéria anterior. Contudo, a principal razão para incluir estes cinco capítulos é despertar a curiosidade de estudantes pelos temas abrangidos e apoiar o estudo individual desses assuntos.

O capítulo 9 é sobre **funções Harmónicas**, que são as soluções da equação diferencial parcial de Laplace. Têm um campo de aplicação vasto porque correspondem a potenciais de campos vectoriais conservativos com divergência nula e descrevem soluções de equilíbrio em meios contínuos, por exemplo para campo gravitacional num conjunto sem massas, campo eléctrico num conjunto sem cargas eléctricas, campo de velocidades de um fluido incompressível estacionário e irrotacional, densidade em processos de difusão (em física, química, biologia). Considera-se o **Problema de Dirichlet** de determinação de uma função Harmónica num conjunto limitado que na fronteira tem valores dados por uma função contínua, primeiro em círculos e depois em conjuntos mais gerais com o **Método de Perron**²⁵ de 1923, que é simultaneamente simples e geral, e permite separar a questão de existência

²⁴Hadamard, Jacques (1865-1963). Mittag-Leffler, Magnus Gösta (1846-1927). Jensen, Johan Ludwig (1859-1925). Runge, Carl David (1856-1927).

²⁵Perron, Oskar (1880-1975).

de soluções no interior do conjunto da sua continuidade na fronteira com a utilização de funções Subharmónicas para obter sucessões de funções que convergem para a solução. Este capítulo abre a porta para o estudo de Teoria do Potencial, Equações Diferenciais Parciais e Cálculo de Variações.

O objectivo principal do capítulo 10 é identificar condições em que existem Transformações Conformes entre duas regiões do plano complexo, o que, em particular, permite obter funções Harmónicas numa das regiões a partir de funções Harmónicas na outra região e alarga os métodos para obter soluções da equação de Laplace. O **Teorema do Mapeamento de Riemann** estabelece o forte (e possivelmente surpreendente) resultado de existência de Transformações Conformes de qualquer região simplesmente conexa propriamente contida em \mathbb{C} sobre o interior de um círculo. Foi afirmado por B. Riemann in 1951, mas permaneceu sem prova durante 49 anos. A primeira prova foi em 1900 por W. Osgood, embora H. Schwarz o tivesse provado para regiões poligonais in 1870 e para regiões com fronteira concatenação de um número finito de curvas analíticas em 1890. Em 1912 C. Carathéodory obteve uma prova com o **Lema de Schwarz** (que estabelece que uma função Holomorfa que mantém a origem fixa e transforma o círculo aberto com raio 1 e centro na origem nele próprio é uma rotação em torno da origem ou aproxima da origem todos os outros pontos (não necessariamente sobre o mesmo raio) e sucessões de Transformações Conformes entre Superfícies de Riemann obtidas resolvendo equações algébricas de graus 1 e 2 e o **Teorema de Montel** sobre compacidade sequencial de conjuntos de funções Holomorfas. Ainda em 1912 P. Koebe simplificou essa prova evitando Superfícies de Riemann e em 1915 obteve uma prova construtiva. Em 1922 L. Fejér and F. Riesz descobriram que podia ser obtida uma prova resolvendo um problema variacional de maximização do módulo da derivada da transformação num ponto da região, o que permitiu obter uma prova muito mais simples²⁶. A prova apresentada neste capítulo, dada por C. Carathéodory in 1929, evita o uso de derivadas, resultando numa prova ainda mais simples. Considera-se também a extensão por continuidade de Transformações Conformes à fronteira da região e a identificação de propriedades da fronteira que permitem uma tal extensão, incluindo as noções de **Fim Primo** de região simplesmente conexa em \mathbb{C} introduzida por C. Carathéodory em 1913 e de **Comprimento Extremo** de um conjunto de curvas rectificáveis num subconjunto aberto de \mathbb{C} introduzida por L. Ahlfors e A. Beurling em 1946. A penúltima secção do capítulo é dedicada a uma **unificação de caracterizações de regiões simplesmente conexas** do plano complexo por propriedades de natureza muito diferente (topológicas da região, topológicas do complementar da região, analíticas, algébricas). O capítulo termina com resultados muitíssimo interessantes sobre funções Holomorfas injectivas – **funções univalentes** –

²⁶Esta prova, publicada em 1922 por Tibor Radó (1895-1965) em nome de Leopold Fejér (1880-1959) e Friegyes Riesz (1880-1956), é a mais difundida, talvez porque é a de livros de Análise Complexa muito divulgados como os de L. Ahlfors, W. Rudin and B. Chabat mencionados abaixo.

sobre restrições aos coeficientes de séries de Taylor que são exploradas para obter que funções univalentes não podem contrair regiões do plano mais do que uma certa grandeza, pelo que os contradomínios de tais funções definidas num conjunto aberto de \mathbb{C} contêm círculos abertos com raios pelo menos iguais ao produto de $1/4$ do valor absoluto da derivada da função num ponto pela distância do ponto à fronteira do conjunto, e relações de limitação da distorção resultante de aplicação de tais funções. Em 1916 L. Bieberbach provou que o valor absoluto do coeficiente do termo de ordem 2 da série de Taylor em 0 de uma função f univalente no círculo aberto com raio 1 e centro na origem B_1 normalizada com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ é majorado por 2, com que procou o **Teorema de Um Quarto de Koebe**, que tinha sido conjecturado por P. Koebe em 1907, segundo o qual os contradomínios destas funções contêm o disco aberto com centro 0 e raio $1/4$, que é óptimo no sentido de tal disco aberto ser o maior com centro na origem contido nos contradomínios de todas funções com as propriedades de f . Na altura, L. Bieberbach formulou a famosa Conjectura de Bieberbach do valor absoluto do coeficiente do termo de ordem n da série de Taylor em 0 ser majorado por n e esta majoração ser óptima. Esta conjectura ficou em aberto 69 anos e a sua prova foi grande notícia matemática em 1985 quando foi provada por L. de Branges; é um exemplo de vários resultados importantes obtidos em décadas recentes. Em 1991 L. Weinstein publicou uma prova mais directa, que é a **prova da Conjectura de Bieberbach** que se apresenta²⁷.

No capítulo 11 estudam-se aspectos **globais** de funções analíticas, como **prolongamento analítico**, **funções analíticas globais**, **Superfícies de Riemann**, **caracterização algébrica de regiões Conformes**. A consideração de **Superfícies de Riemann**, concebidas por B. Riemann em 1854, teve importância determinante para o desenvolvimento da Geometria Diferencial e, em particular, da Geometria Riemanniana, mas só em 1913 foram rigorosamente descritas por H. Weyl como variedades complexas, com uma definição semelhante à de variedade diferencial de dimensão 2 mas com vizinhanças de coordenadas complexas relacionadas por Transformações Conformes entre subconjuntos abertos do plano complexo em vez de homeomorfismos entre subconjuntos abertos do plano real. Relacionam-se conjuntos de zeros de polinómios em duas variáveis complexas (mais precisamente, de curvas planas afins irredutíveis não singulares e de curvas algébricas no plano projectivo) com Superfícies de Riemann. Inclui-se a caracterização algébrica de regiões Conformes do plano complexo por isomorfismos das álgebras de funções Holomorfas pelo **Teorema de Bers** de 1948 e de regiões Conformes de Superfícies de Riemann pelo **Teorema de Iss'sa** de 1965. Também se inclui o estudo da **Métrica de Poincaré** ou **Métrica Hiperbólica** numa região simplesmente conexa e da **Métrica Ultrahiperbólica** numa região, introduzida em 1938 por L. Ahlfors. O capítulo termina com uma secção

²⁷Osgood, William (1864-1943). Koebe, Paul (1882-1945). Beurling, Arne (1905-1986). Bieberbach, Ludwig (1886-1982). de Branges, Louis (1932-). Weinstein, Lenard.

sobre tamanho do contradomínio de funções Holomorfas numa região do plano complexo, em particular sobre conterem círculos com raios estimados em termos da derivada da função num ponto e na distância desse ponto à fronteira, principalmente com resultados obtidos entre 1924 e 1938, mas simplificados e refinados até ao final do séc. XX. Estes resultados são aplicados para estabelecer o **Pequeno Teorema de Picard** (funções inteiras não constantes assumem todos valores complexos excepto possivelmente um) e o **Grande Teorema de Picard** (funções Holomorfas assumem em vizinhanças de singularidades essenciais isoladas todos números complexos excepto possivelmente um, infinitas vezes). Estes dois teoremas foram provados pela primeira vez por E. Picard em 1879, mas foram obtidas várias provas mais simples ao longo de praticamente todo séc. XX²⁸.

O capítulo 12 é principalmente dedicado ao **Teorema de Uniformização** de Superfícies de Riemann simplesmente conexas, que L. Ahlfors considerou “talvez o teorema mais importante em toda a teoria de funções analíticas de uma variável” e D. Hilbert incluiu como penúltimo dos Problemas de Hilbert²⁹. Estende para Superfícies de Riemann simplesmente conexas o Teorema do Mapeamento de Riemann para regiões simplesmente conexas propriamente contidas no plano complexo: a menos de Transformações Conformes, além de plano complexo ou círculo aberto só há a possibilidade adicional de superfície esférica. Para a prova deste teorema, são introduzidas as importantes noções em Topologia de **Grupo Fundamental** e de **Revestimento**, esta última noção criadas em 1882 por H. Schwarz precisamente para provar o Teorema de Uniformização. Prova-se que **curvas planas afins relacionam-se naturalmente com Superfícies de Riemann compactas**, e considera-se o Método de Perron em Superfícies de Riemann inspirado no método com o mesmo nome para funções Harmónicas. **Estabelece-se que toda Superfície de Riemann admite uma Métrica de Riemann Conforme com curvatura de Gauss constante** e que o correspondente espaço métrico é completo e localmente compacto; prova-se que uma funções Holomorfas entre Superfícies de Riemann com tal métrica com curvatura negativa são contracções (**Teorema de Pick**). Incluem-se no final do capítulo o **Teorema de Riemann-Roch** e o **Teorema de Abel-Jacobi** para

²⁸Weyl, Hermann (1885-1955). Bers, Lipman (1914-1993). O Teorema de Iss'sa foi publicado sob o pseudónimo Hej Iss'sa pelo matemático Heisuke Hironaka (1931-). A palavra japonesa pronunciada como “Issa” significa “um chá” ou “uma chávena de chá” ou “um gole de chá”, que já tinha sido usada no pseudónimo Kobayashi Issa adoptado pelo poeta japonês de nome de nascimento Kobayashi Nobuyuki (1763-1828), um expoente da forma de poesia curta japonesa *Haiku* cuja essência é a captura de uma imagem ou sensação com linguagem sensorial, como no seu poema traduzido em inglês por *Summer night – even the stars are whispering to each other*.

²⁹Um conjunto de 23 problemas propostos por David Hilbert (1862-1943) no Congresso Internacional e Matemáticos de 1900, em Paris, que este esperava poderem ter um contribuição significativa para o avanço da Matemática no séc. XX, a maioria dos quais influenciaram importantes desenvolvimentos; Paul Cohen (1934-2007) recebeu a *Fields Medal* em 1966 por trabalho no 1º Problema de Hilbert, sobre a Hipótese do *Continuum*, designadamente, que não há conjuntos com cardinalidade entre a de \mathbb{N} e a de \mathbb{R} , provando em 1963 que não pode ser provada verdadeira no quadro da lógica usual da teoria dos conjuntos baseada na axiomática Zermelo-Fraenkel, mesmo com o Axioma de Escolha (Kurt Gödel (1906-1978) tinha provado em 1940 que não pode ser provada falsa). Zermelo, Ernst (1871-1953). Fraenkel, Abraham (1891-1965).

Superfícies de Riemann compactas; o primeiro relaciona a topologia de uma Superfície de Riemann, através da **Característica de Euler** ou do *Genus*, com as dimensões dos espaços lineares de possíveis funções Meromorfas definidas na Superfície com pólos e zeros com ordens majoradas por números especificados; o último dá uma condição necessária e suficiente in termos da localização e das ordens de zeros e pólos para existência de funções Meromorfas. Em 1969 D. Mumford e em 1976 P. Griffiths estenderam as ideias de N.H. Abel associadas ao Teorema de Abel-Jacobi para obter resultados importantes em Geometria Algébrica. O **Teorema de Abel** obtido por N.H. Abel em 1826 dando fórmulas de adição para integrais abelianos, que em geral não podem ser avaliados em termos de “funções elementares”, estendendo as bem conhecidas fórmulas de adição de funções trigonométricas quando expressas em forma integral também é incluído³⁰.

Conclui-se com um capítulo (cerca de 1/4 do livro) sobre **Dinâmica Complexa** de iteração de funções Holomorfas, em particular de funções racionais, com propriedades da dinâmica na vizinhança de pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas e dos **conjuntos de Julia, Fatou e Mandelbrot**³¹. Escolheu-se este tema para finalizar o livro por várias razões: utiliza grande parte dos aspectos geométricos apresentados nos últimos capítulos anteriores, é uma excelente base para o estudo de sistemas dinâmicos de outros tipos, evidencia o poder da Análise Complexa num contexto interessante e com aspectos difíceis e surpreendentes, teve contribuições importantes em décadas recentes e continua a ser um tema em que se levantam questões que desafiam alguns dos melhores matemáticos da actualidade³².

As primeiras contribuições para Dinâmica Complexa foram em 1870-1920, mas houve um renascimento a partir 1965, especialmente vigoroso depois de 1982 e que ainda prossegue, muito em consequência da curiosidade despertada pelo cálculo em computador a partir de 1978 de figuras impressionantes dos conjuntos de Mandelbrot e de Julia com geometria intrincada revelando autosemelhança local a várias escalas e fractalidade. Outra contribuição para este renascimento foi a descoberta por M. Feigenbaum e por P. Couillet e C. Tresser (em 1978 e também com simulações com computador) de propriedades quantitativas universais de bifurcações de duplicação de período com a variação de um parâmetro que move o máximo da função unimodal num intervalo de números reais, e as associadas órbitas caóticas destes sistemas dinâmicos determinísticos muito simples, seguidas de contribuições importantes de muitos investigadores, pois a dinâmica de iteração de funções Holomorfas é a extensão mais simples a funções em subconjuntos de um plano da dinâmica de iterações de funções num intervalo real³³.

³⁰Pick, Georg (1859-1942). Roch, Gustav (1839-1866). Abel, Niels Henrik (1802-1829). Jacobi, Carl Gustav (1804-1851). Griffiths, Philip (1928-). David Mumford (1937-) recebeu a *Fields Medal* em 1974 por contribuições para as teorias de variedades de módulos e de superfícies algébricas.

³¹Julia, Gaston (1893-1978). Fatou, Pierre (1878-1929). Mandelbrot, Benoit (1924-2010).

³²Vários laureados com a *Fields Medal*: J. Milnor (1962), A. Connes (1982), W. Thurston (1982), J.-C. Yoccoz (1994), C. McMullen (1998), S. Smirnov (2010), A. Avila (2014), M. Mirzakhani (2014).

³³A 1ª referência a grande sensibilidade a condições iniciais em sistemas determinísticos foi

Além da dinâmica local em vizinhanças de pontos fixos, esclarecida principalmente entre 1871 e 1904, e dos resultados básicos sobre os conjuntos de Julia e de Fatou obtidos por P. Fatou e G. Julia em 1918-20, o capítulo final inclui, entre outros tópicos: aplicações da **Teoria KAM** a provar o **Teorema de Siegel** de existência de linearização local num ponto fixo de função Holomorfa com número de rotação irracional diofantino obtida por C.L. Siegel e J. Moser em 1956, e o **Teorema de Arnold** de existência de conjugação a uma rotação de um homeomorfismo numa circunferência com número de rotação diofantino e prolongável a função Holomorfa numa coroa circular obtida em 1961 por V.I. Arnold; o **Teorema de Classificação de Sullivan** para componentes conexas periódicas do conjunto de Fatou de funções racionais formulado em 1983 por D. Sullivan (no essencial provado por P. Fatou em 1920 embora na altura não estivesse provada a existência de domínios de rotação³⁴); o estudo do conjunto de Mandelbrot por A. Douady e J. Hubbard de 1983 a 1985, incluindo a análise de **raios exteriores** baseada no Teorema do Mapeamento de Riemann aplicado à bacia de atracção do ponto fixo superatractor ∞ de $f_c(z) = z^2 + c$ para estudar a fronteira do conjunto de Julia; a **prova de abundância de Discos de Siegel** de $f_\omega(z) = z(z + e^{i2\pi\omega})$, no sentido de existirem para $w \in [0, 2\pi[$ exceptuando um conjunto de medida de Lebesgue nula, dada por J.-C. Yoccoz em³⁵ 1987.

A contribuição mais importante em décadas recentes para dinâmica da iteração de funções racionais complexas foi a introdução por D. Sullivan em 1982 de métodos baseados em perturbações por Transformações Quaseconformes e a analogia com grupos de Klein, que são subgrupos do grupo das matrizes complexas 2×2 com determinante 1 módulo o seu centro e é representado pelas Transformações Conformes da Superfície Esférica de Riemann \mathbb{C}_∞ (a compactificação do plano complexo acrescentando infinito como um ponto, que pode ser modelada pela projecção estereográfica do plano complexo sobre uma superfície esférica tangente no pólo Sul ao plano na origem como obtida por semirectas emanando do pólo Norte da superfície esférica). As Transformações Quaseconformes são Homeomorfismos que preservam a orientação não necessariamente diferenciáveis como funções complexas, mas diferenciáveis quase em toda a parte como funções de duas variáveis reais e com derivadas em cada ponto em que existem a transformarem circunferências em elipses de excentricidade limitada que pode variar com o ponto, assim como a orientação dos eixos das elipses. Contrastam com Transformações

de H. Poincaré em 1890, a propósito do Problema de 3 Corpos – Lua, Terra e Sol – sob acção da gravidade. Em 1898 J. Hadamard apresentou resultados sobre o movimento caótico de uma massa pontual a deslizar sem fricção numa superfície com curvatura negativa constante. Quase todos os laureados com a Medalha Fields que contribuíram para o estudo de dinâmica complexa mencionados na nota de pé de página precedente também contribuíram para o estudo de dinâmica num intervalo real. Feigenbaum, Mitchell (1944-). Couillet, Pierre (1949-). Tresser, Charles (??-).

³⁴A de discos de Siegel só foi provada em 1942 por Carl Ludwig Siegel (1896-1981) e a de anéis de Herman em 1979 por Michael Herman (1942-2000).

³⁵Denis Sullivan (1941-) recebeu o *Oswald Veblen Prize in Geometry* da AMS – *American Mathematical Society* em 1971, o *Steele Prize for Lifetime Achievement* da AMS em 2006, e o *Abel Prize* de 2022. Douady, Adrien (1935-2006). Hubbard, John (1945-). Lebesgue, Henri (1875-1941).

Conformes, que são diferenciáveis como funções complexas em todos pontos e têm derivadas que transformam circunferências em circunferências. A flexibilidade conseguida perturbando funções Holomorfas por Transformações Quaseconformes tem sido particularmente fértil para analisar a dinâmica da iteração de funções complexas que são inacessíveis no âmbito estrito de funções Holomorfas. Este valioso filão não é explorado neste livro porque a inclusão de descrições dos aspectos de Análise Real necessários de modo a poderem ser apreendidos no nível universitário precoce a que este livro se destina o ampliaria para além do que pareceu razoável. Estes aspectos são objecto de um outro livro do autor³⁶ que é continuação natural deste.

Incluem-se 4 apêndices. O primeiro é sobre aspectos de Topologia usados em vários capítulos, começando com Topologia Geral, mas com uma prova do Teorema da Curva de Jordan com Homologia (em exercícios indica-se como obter outras duas provas, uma, embora longa, conceptualmente elementar por se basar em compacidade e aspectos elementares de Grafos) que só é usado nos capítulos 10 (para Fins Primos) e 13 (pontualmente) e com a prova que toda superfície compacta conexa e, portanto, toda Superfície de Riemann, é Triangularizável e a sua aplicação à classificação de superfícies compactas conexas. O apêndice II é sobre noções básicas de integral e medida de Lebesgue, usadas pontualmente e só nos capítulos 10 e 13 e em dois exercício nos capítulos 6 e 7 sobre Transformações de Fourier e de Laplace. O apêndice III, sobre invariância de integrais de linha de campos vectoriais fechados em caminhos Homotópicos, é incluído para possível benefício de leitores que possam não ter estudado no âmbito de Análise Real, uma prova com Molificação, que é um método de regularização de funções muito útil; esta propriedade é usada no capítulo 7 para estabelecer invariância de integrais de funções Holomorfas em caminhos seccionalmente regulares Homotópicos. O último apêndice contém notas biográficas de 15 dos mais decisivos criadores da Análise Complexa de Uma Variável. As introduções dos capítulos têm referências históricas mais detalhadas, usadas para apresentação dos assuntos e informação sobre como foram desenvolvidos, permitindo uma visão geral do desenvolvimento histórico dos conceitos com a preocupação sistemática de os situar historicamente à medida que são apresentados.

Embora o objectivo principal dos primeiros oito capítulos seja apoiarem um curso de meio semestre de iniciação a Análise Complexa, estão concebidos para serem uma base coerente e sólida para estudos subsequentes sem que se justifique refazer com mais profundidade partes dos assuntos incluídos, não só de Análise Complexa mais avançada, como de Geometria Riemanniana, Geometria Algébrica, Topologia Algébrica e Análise Harmónica.

A maior parte dos assuntos são clássicos, mas mais de metade do livro é sobre resultados obtidos no séc. XX, incluindo vários nas 4 décadas mais recentes, como: propriedades do conjunto de Mandelbrot dos valores c do plano complexo para os quais a órbita de 0 por iteração da função quadrática

³⁶Magalhães, L.T., *Quasiconformal Mappings in the Plane and Complex Dynamics*, to publish.

$f_c(z) = z^2 + c$ não tende para ∞ , que foi desenhado pela primeira vez em 1979 no contexto de grupos de Klein por R. Brooks e J.P. Matelski; a prova de existência de anéis de Herman em 1979 por M. Herman; o Teorema de Classificação de Sullivan da dinâmica de componentes de Fatou formulado por D. Sullivan em 1983; a introdução do conceito de funções racionais Subhiperbólicas em 1984-85 por A. Douady e J. Hubbard, inspirados nas contribuições de W. Thurston sobre *Orbifolds* em 1982, permitindo Pontos Críticos com órbitas eventualmente periódicas no conjunto de Julia e a sua caracterização por órbitas Pós-críticas; o estudo de A. Douady e J. Hubbard em 1985 do conjunto de Mandelbrot com a utilização do Teorema do Mapeamento de Riemann e o associado prolongamento contínuo à fronteira; a prova por J.-C. Yoccoz em 1987 de abundância de discos de Siegel para funções racionais de grau ≥ 2 $f_w(z) = z(z + e^{i2\pi w})$ no sentido de existirem para todos $w \in [0, 2\pi[$ excepto um conjunto de medida de Lebesgue nula; exemplos de sistemas de controlo desenvolvidos e aplicados em 1986 e 1990; a prova muito simplificada do teorema de Bloch-Ahlfors do contradomínio de toda função Holomorfa no círculo com raio 1 e centro 0 normalizada a valor absoluto da derivada em 0 ser igual a 1 conter um círculo com raio $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ obtida por M. Bonk in 1990; a simplificação da prova da Conjectura de Bieberbach por L. Weinstein em 1991 (com a simplificação de S. Ekhad e D. Zeilberger em 1994) seguindo-se à prova da conjectura por L. de Branges em 1985 (provando a Conjectura de Milin de 1971 que, devido à 2ª Desigualdade de Lebedev-Milin obtida em 1965, implica a validade da Conjectura de Robertson de 1936 que, por sua vez, implica a da Conjectura de Bieberbach); a prova que conjuntos de Julia de funções racionais de grau ≥ 2 são subconjuntos uniformemente perfeitos de \mathbb{C}_∞ de R. Mañé e L.F. Rocha em 1992; a prova alternativa do Pequeno Teorema de Picard por A. Eremenko e M. Sodin em 1992 baseada na Desigualdade de Harnack e no Teorema de Unicidade de funções Harmónicas, e a simplificação subsequente com um resultado de encaixe do supremo de uma função Harmónica em bolas com raios r e $10r$ obtido por J. Lewis em 1994; as provas conceptualmente elementares obtidas em 1992 por C. Thomassen de toda superfície compacta conexa ser Triangularizável (provado por T. Radó em 1925) e da classificação dessas superfícies (provada por M. Dehn e P. Heegard em 1907 e simplificada por H. Seifert e W. Thelfall em 1934), a prova simples por J.-M. Gambaudo, P. Le Calvez e É. Pécou em 1996 do número de rotação de um ponto fixo neutro de uma função Holomorfa numa Superfície de Riemann ser um invariante topológico, um resultado inicialmente estabelecido em 1982 por V.A. Naïshul³⁷.

³⁷Brooks, Robert (1952-2002). Matelski, John Peter (??-). Newman, Donald (1930-2007). Bloch, André (1893-1948). Bonk, Mario (1963-). Ekhad, Shalosh. Zeilberger, Doron (1950-). Lebedev, Nikolai Andreevich (1919-1982). Milin, Isaac (1919-1992). Robertson, Malcolm (1906-1998). Mañé, Ricardo (1948-1995). da Rocha, Luiz Fernando (??-). Thomassen, Carsten (1948-). Dehn, Max (1878-1952). Heegard, Poul (1871-1948). Seifert, Herbert (1907-1996). Thelfall, William (1888-1949). Eremenko, Alexandre (1954-). Sodin, Mikhail (??-). Harnack, Carl Gustav Alex (1851-1930). Lewis, J. (??-). Gambaudo, Jean-Marc (1958-). Le Calvez, Patrice (1958-). Pécou, Elisabeth (??-). Naïshul, V.A (??-).

Capítulo 1

Plano complexo

1.1 Introdução

Os números complexos começaram por ser introduzidos para dar sentido à resolução de equações polinomiais do 2º grau com coeficientes reais como, por exemplo, $x^2 + 1 = 0$. Como os quadrados de números reais são sempre maiores ou iguais a zero, esta equação não tem soluções reais. Resolvê-la corresponde a introduzir números que sejam raízes quadradas de números reais negativos. A primeira referência a esta possibilidade parece ter sido em 1545 por H. Cardano. Foi seguida da exposição das propriedades algébricas destes números por R. Bombelli em 1572, que também introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$. Em 1747 L. Euler designou este símbolo por i , a que se chamou unidade imaginária e introduziu a expressão $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, de que obteve como caso particular a curiosa relação $e^{i\pi} = -1$ que relaciona numa igualdade os números $1, e, \pi, i$ que surgiram em contextos muito diferentes³⁸.

A consideração de números complexos não só apareceu como necessária para resolver certas equações polinomiais do 2º grau com coeficientes reais como forneceu todas as possíveis soluções de equações polinomiais de qualquer grau, tanto com coeficientes reais como complexos. A 1ª formulação clara deste resultado, hoje conhecido por Teorema Fundamental da Álgebra, foi publicada por L. Euler em 1743 para o caso particular de equações polinomiais com coeficientes reais e a propósito da resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. O Teorema Fundamental da Álgebra e as correspondentes observações históricas aparecem mais detalhadamente no capítulo 6, em que é provado com Análise Complexa.

O termo número complexo deve-se a C.F. Gauss tal como a disseminação da concepção dos números complexos como pontos de um plano, no seguimento de uma publicação sua em 1831. Esta relação está implícita na tese de doutoramento de C.F. Gauss de 1799 sobre o Teorema Fundamental da Álgebra e aparece claramente numa carta que enviou a F.W. Bessel em 1811, mas a representação geométrica dos números complexos num plano apareceu também em 1799 num trabalho de C. Wessel, pre-

³⁸Cardano, Hieronimo (1501-1576). Bombelli, Rafael (1526-1572).

cedido em 1673 pela representação no plano de raízes da equação polinomial do 2º grau por J. Wallis. Também foi descoberta por J.-R. Argand e A.-Q. Buée em 1806 e J. Warren em 1828, embora tenha passado despercebida aos matemáticos desse tempo e não tenha sido explorada para prosseguir o estudo dos números complexos. Esta ideia permitiu uma definição concreta destes números e abriu caminho ao desenvolvimento do estudo dos números complexos e das funções complexas. Na publicação de 1831 já referida C.F. Gauss propôs definir os números complexos como pares ordenados de números reais com propriedades algébricas específicas e explorou esta definição e a sua identificação com pontos de um plano. Esta definição depende da definição de números reais, que só foi dada com rigor em 1872 por G. Cantor. A notação (a, b) para números complexos foi iniciada em 1837 por W.R. Hamilton³⁹.

1.2 Estrutura algébrica

Os **números complexos** são pares ordenados de números reais $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com uma adição e uma multiplicação definidas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Estas operações são comutativas, associativas e têm elemento neutro ou identidade (resp., zero $(0, 0)$ e unidade $(1, 0)$). Cada número complexo (x, y) tem um simétrico $(-x, -y)$ e, quando diferente de zero, tem um recíproco $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$. A multiplicação é distributiva em relação à adição. Um conjunto com estas propriedades algébricas chama-se **corpo**. Portanto, os números complexos com estas adição e a multiplicação são um **corpo**, e também são um **espaço linear complexo**; designam-se ambas estruturas algébricas assim como o conjunto dos números complexos por \mathbb{C} , dado que a ambiguidade não traz problemas.

Como $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ e $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$, é usual identificar cada número real x com o número complexo $(x, 0)$ e, deste modo, considerar \mathbb{C} como uma extensão de \mathbb{R} , e \mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{C} . Designa-se $i = (0, 1)$, chamada **unidade imaginária** (note-se que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$). Logo, para cada número complexo $z = (x, y) = (1, 0)x + (0, 1)y = x + iy$; chama-se a x e y , resp., **parte real** e **parte imaginária** de $z = (x, y) = x + iy$, e designa-se $x = \text{Re}z$ e $y = \text{Im}z$. Aos números complexos $(0, y) = iy$, com $y \in \mathbb{R}$, chama-se **imaginários puros**. É $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, e assim sucessivamente, pelo que $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, para $k \in \mathbb{Z}$; em particular, $\frac{1}{i} = -i$.

Como os números complexos são pares ordenados de números reais, podem ser representados num plano (Figura 1.1). O eixo das abcissas é $\{(x, 0) \in \mathbb{C}\}$ e é chamado **eixo real**. O eixo das ordenadas é $\{(0, y) \in \mathbb{C}\}$ e é chamado **eixo imaginário**. Como se vê na Figura 1.1,

³⁹Bessel, Friedrich (1784-1846). Wessel, Caspar (1745-1818). Wallis, John (1616-1703). Argand, Jean-Robert (1768-1822). Buée, Adrien-Quentin (1746-1826). Warren, John (1796-1852). Hamilton, William Rowan (1805-1865). Cantor, Georg (1845-1918).

a utilização de coordenadas polares dá a **representação polar** (ou representação trigonométrica) de números complexos, $z = (x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ ou $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. A $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ chama-se **módulo**⁴⁰ ou **valor absoluto** de z e a θ chama-se **argumento** de z . Assim, o argumento de $z \neq 0$ é definido a menos da adição de múltiplos inteiros de 2π . Ao argumento de z em $]-\pi, \pi]$ chama-se **argumento principal** de z , designado $\text{Arg } z$. Com a função real arco tangente cujo contradomínio é o intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tem-se (Figura 1.1):

$$(1.1) \quad \text{Arg } z = \begin{cases} \arctan \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} + \pi & , \text{ se } \text{Re } z < 0, \text{ Im } z \geq 0 \\ +\frac{\pi}{2} & , \text{ se } \text{Re } z = 0, \text{ Im } z > 0 \\ \arctan \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} & , \text{ se } \text{Re } z > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ se } \text{Re } z = 0, \text{ Im } z < 0 \\ \arctan \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} - \pi & , \text{ se } \text{Re } z < 0, \text{ Im } z < 0 \end{cases}$$

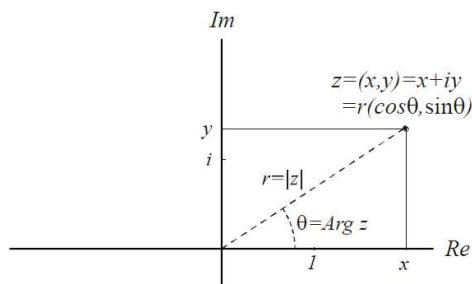


Figura 1.1: Representação cartesiana e polar de números complexos

A adição de números complexos coincide com a de pares ordenados de números reais no espaço linear real \mathbb{R}^2 (Figura 1.2); corresponde à usual regra do paralelogramo para a soma de vectores. A multiplicação de números reais por números complexos coincide com a multiplicação por escalares reais no espaço linear real \mathbb{R}^2 ; corresponde à expansão ou contracção da distância à origem, conforme o número real tem módulo maior ou menor do que 1, mantendo ou invertendo o sentido conforme o número real é positivo ou negativo (Figura 1.2).

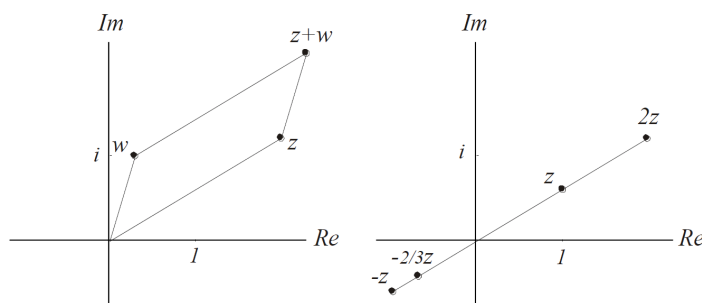


Figura 1.2: Adição de complexos e multiplicação de reais por complexos

⁴⁰A notação $|z|$ para o módulo, tanto de números reais como complexos, foi introduzida por K. Weierstrass em notas de 1841 só publicadas em 1894, e foi usada numa sua comunicação à Academia de Ciências de Berlim em 1859.

O que distingue o espaço linear complexo \mathbb{C} do espaço linear real \mathbb{R}^2 , ou seja o plano complexo do plano real, é a multiplicação de números complexos (não reais). Por exemplo, a multiplicação de números complexos $z = (x, y)$ pela unidade imaginária i dá $iz = (0, 1)(x, y) = (-y, x)$, o que corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em relação à origem. Em geral, a multiplicação por números complexos pode envolver expansões/contracções e rotações, ou seja pode ser decomposta numa homotetia seguida de uma rotação, ambas centradas na origem (Figura 1.3), a multiplicação de $z_1 = r_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ dá $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2))$.

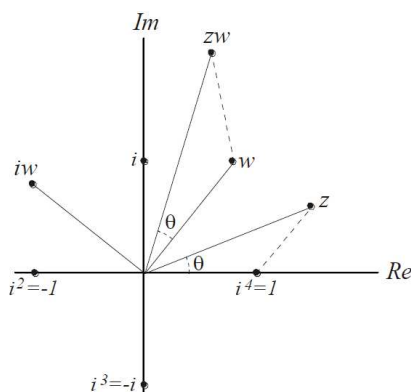


Figura 1.3: Multiplicação de números complexos

Convém introduzir já a **notação exponencial** para a representação polar de números complexos, definindo a exponencial de imaginários puros por $e^{i\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$, para $\theta \in \mathbb{R}$. A exponencial complexa satisfaz:

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} e^{i\varphi}, \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \text{para } \theta, \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

A representação polar de um número complexo pode-se escrever $z = |z| e^{i\theta}$, em que $\theta \in \mathbb{R}$ é um argumento de z , e o produto de complexos $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ pode-se escrever $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy$, define-se o seu **conjugado** por $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$. Geometricamente \bar{z} é a reflexão de z em relação ao eixo real. Verifica-se $\overline{\bar{z}} = z$, $z\bar{z} = |z|^2$ e, para $z, w \in \mathbb{C}$ é $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, e, se $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$. Além disso, $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Também é $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, para $\theta \in \mathbb{R}$.

Para a **divisão** $\frac{z_1}{z_2}$ de números complexos $z_1 = (x_1, y_1) = |z_1|(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) = |z_2|(\cos \theta_2, \sin \theta_2) \neq 0$, tem-se qualquer uma das fórmulas $\frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$, $\frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2, -x_1 y_2 + x_2 y_1)$, $\frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2), \sin(\theta_1 - \theta_2))$, $\frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

As **potências de expoente inteiro positivo** $k \in \mathbb{N}$ de um número complexo $z = |z|(\cos \theta, \sin \theta)$, com $\theta \in \mathbb{R}$, satisfazem $z^k = |z|^k (\cos k\theta, \sin k\theta)$. Atendendo a que o argumento de um número complexo é definido a menos da adição de um múltiplo inteiro de 2π , obtém-se para raízes de ordem $k \in \mathbb{N}$ de z os k números complexos

$$w_j = \sqrt[k]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi j}{k} \right), \sin \left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi j}{k} \right) \right), \quad \text{para } j \in \{0, 1, \dots, k-1\},$$

ou, em notação exponencial,

$$w_j = \sqrt[k]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi j}{k}\right)}, \quad \text{para } j \in \{0, 1, \dots, k-1\},$$

Portanto, todo número complexo $z \neq 0$ tem $k \in \mathbb{N}$ raízes de ordem k , igualmente espaçadas sobre a circunferência com raio $\sqrt[k]{|z|}$ e centro na origem no plano complexo (Figura 1.4).

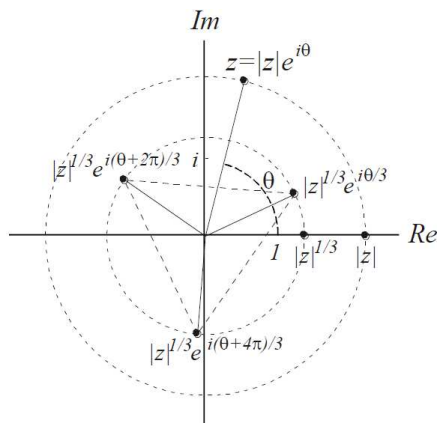


Figura 1.4: Raízes cúbicas de número complexo z

Como é natural, são satisfeitas as propriedades seguintes de raízes inteiras positivas de números reais que são reais: (i) as raízes reais de ordem par de números reais positivos são sempre duas e simétricas uma da outra, (ii) não há raízes reais de ordem par de números reais negativos, (iii) as raízes reais de ordem ímpar de números reais não nulos são uma e só uma para cada ordem e o sinal da raiz é o do número considerado. Observa-se que a existência de raízes inteiras reais tem uma descrição um pouco complicada que fica clarificada e simplificada no âmbito dos números complexos. É um 1º exemplo de diversas situações que ficam simultaneamente clarificadas e simplificadas quando se passa de números reais para números complexos.

Um caso particular de interesse são as raízes da unidade. Para qualquer ordem $k \in \mathbb{N}$ das raízes, uma das raízes de ordem k da unidade é a própria unidade e as outras $k-1$ raízes complexas da unidade são os números complexos que correspondem aos pontos na circunferência com raio 1 e centro 0 no plano complexo que a separa em k arcos do mesmo comprimento, a partir da unidade (Figura 1.5). Por exemplo, as raízes quadradas da unidade são ± 1 , as raízes cúbicas da unidade são $1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$, as raízes de ordem 4 da unidade são $\pm 1, \pm i$, etc. Com $w = \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, as k raízes de ordem k da unidade são $1, w, w^2, \dots, w^{k-1}$, e

$$w^k = 1, \quad 1 + w + w^2 + \dots + w^{k-1} = 0,$$

em que a última igualdade resulta de $(1-w)\sum_{j=0}^{k-1} w^j = 1 - w^k = 0$. Se $\sqrt[k]{z}$ designa uma qualquer das raízes de ordem k de um complexo $z \neq 0$, todas as raízes de ordem k de z são $w^j \sqrt[k]{z}$, com $j=0, 1, \dots, k-1$.

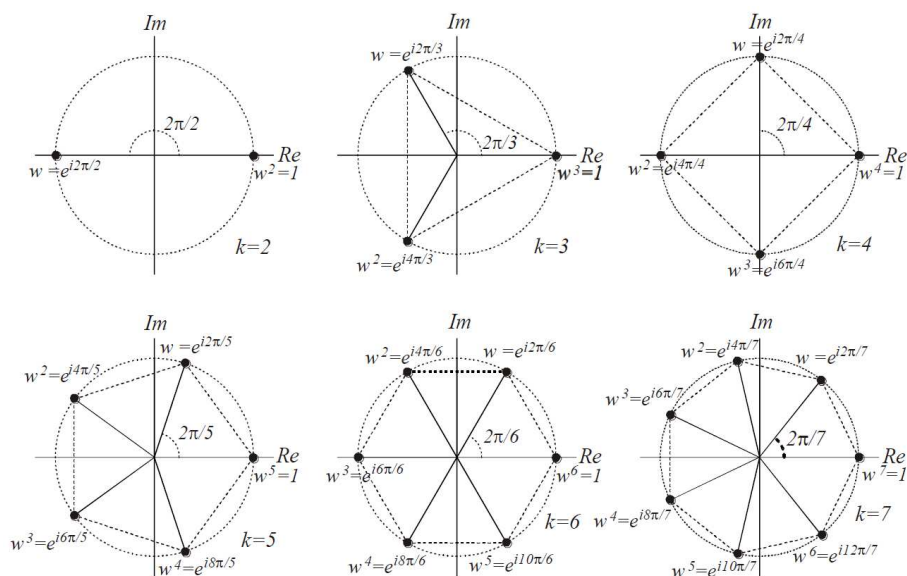


Figura 1.5: Raízes inteiras positivas da unidade de ordens $k=2, 3, 4, 5, 6, 7$

As potências inteiras negativas de números complexos $z \neq 0$ definem-se, como no caso real, por $z^{-k} = \frac{1}{z^k}$, para $k \in \mathbb{N}$. As potências racionais $z^{\frac{p}{q}}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, definem-se pelas raízes de ordem q do número complexo z^p .

1.3 Estrutura métrica

O **valor absoluto** $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de um número complexo (x, y) é uma norma no espaço linear \mathbb{C} , e a mesma fórmula define uma norma no espaço linear real \mathbb{R}^2 . Em particular, para $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se a **desigualdade triangular** $|z+w| \leq |z| + |w|$, com igualdade se e só se um dos z, w é múltiplo positivo do outro ou é zero. Também $|zw| = |z||w|$ e, para $w \neq 0$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$. A **distância** de dois números complexos z, w é $|z-w|$. Assim, as noções de norma e distância coincidem no espaço linear complexo \mathbb{C} e no espaço linear real \mathbb{R}^2 . Portanto, as noções métricas em \mathbb{C} e em \mathbb{R}^2 são coincidentes: \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 **são indistinguíveis metricamente**. Por exemplo, um conjunto do plano é **limitado** em \mathbb{C} se e só se é um conjunto limitado em \mathbb{R}^2 .

1.4 Estrutura topológica

A estrutura métrica de \mathbb{C} define uma topologia com base que são os círculos abertos $B_r(z) = \{w : |w-z| < r\}$ de raios $r > 0$ e centros em pontos $z \in \mathbb{C}$. Como as estruturas métricas de \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 coincidem, também coincidem as resp. estruturas topológicas: \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 **são indistinguíveis topologicamente**. Em particular, um conjunto do plano é **aberto, fechado, conexo, simplesmente conexo, compacto** em \mathbb{C} se e só se o é em \mathbb{R}^2 . Analogamente, as noções de **ponto interior, exterior, fronteiro, de acumulação (ou limite), isolado** de um conjunto e de **conjuntos interior, exterior,**

fronteira, fecho (ou aderência)⁴¹ de um conjunto são coincidentes em \mathbb{C} e em \mathbb{R}^2 . Chama-se **região** em \mathbb{C} a um subconjunto de \mathbb{C} não vazio, aberto e conexo.

Exercícios

- 1.1 Indique as representações cartesianas e polares do número complexo:
 - a) $(1+i)^3$
 - b) $\frac{2+i3}{3-i4}$
 - c) $i^5 + i^{16}$.
- 1.2 Determine os subconjuntos de \mathbb{R} tais que:
 - a) $x+iy = |x+iy|$
 - b) $x+iy = (x-iy)^2$
 - c) $x+iy = \sum_{k=0}^{100} i^k$.
- 1.3 Calcule as raízes quadradas de: a) i b) $-i$ c) $1+i$.
- 1.4 Prove: *Três números complexos de módulo 1 com soma 0 são vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência com raio 1 e centro em 0.*
- 1.5 Prove que $z, v, w \in \mathbb{C}$ são vértices de um triângulo equilátero se e só se $z^2 + v^2 + w^2 = zv + zw + vw$.
- 1.6 Prove: *Para $z, w \in \mathbb{C}$ verifica-se:*
 - a) $|z-w|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|w|^2)$.
 - b) $|z-w| = |z|+|w|$, com $w \neq 0$, se e só se $\frac{z}{w} > 0$.
- 1.7 Determine em que condições a equação $az+b\bar{z}+c=0$ em \mathbb{C} define uma recta.
- 1.8 Prove: *Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, a equação $az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$ define uma circunferência no plano complexo.*
- 1.9 Prove: *Todas circunferências que passam por pontos $a, \frac{1}{\bar{a}} \in \mathbb{C}$ intersectam ortogonalmente a circunferência $|z|=1$.*
- 1.10 a) Prove: $\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = 1$ se $|a|=1$ ou $|b|=1$ mas não ambos, e indique que excepção deve ser feita se $|a|=|b|=1$.
 - b) Mostre que a igualdade em a) dá lugar a uma desigualdade se $|a|, |b| < 1$.
- 1.11 Descreva geometricamente a transformação do domínio para o contradomínio definida pela função complexa $f(z) = \frac{z+2}{z+3}$.
- 1.12 Determine uma função da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ que transforme a circunferência $|z|=2$ na circunferência $|z+1|=1$, o ponto -2 na origem e a origem em i .
- 1.13 Determine as transformações da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ que transformam a circunferência $|z|=R$, com $R > 0$, em si mesma.
- 1.14 Prove: *Uma transformação em \mathbb{C} que deixa a origem fixa e preserva distâncias é uma rotação ou uma rotação seguida de uma reflexão em relação ao eixo real.*
- 1.15 Prove: **Identidade de Lagrange**⁴² para números complexos

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \sum_{k=1}^n |w_k|^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j \bar{w}_k - z_k \bar{w}_j|^2.$$
- 1.16 Assim como os números reais podem ser representados numa circunferência em que um dos pontos representa ∞ (recta real estendida \mathbb{R}_∞) também os números complexos podem ser representados numa superfície esférica com o pólo Norte correspondente a ∞ (**plano complexo estendido** \mathbb{C}_∞).
 - a) Determine uma representação deste tipo na superfície esférica em \mathbb{R}^3

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1,$$

dada pela correspondência biunívoca entre os números complexos z representados no plano equatorial $x_3=0$ (com o eixo dos x_1 identificado com o eixo real e o eixo

⁴¹Os últimos dois designados aqui para conjuntos S por, resp., ∂S e $\text{cl } S$ (não se usa a notação comum mais leve \bar{S} para o fecho para evitar confusão com o conjunto dos conjugados dos elementos de $S \subset \mathbb{C}$).

⁴²Lagrange, Joseph-Louis (1736-1813).

dos x_2 com o eixo imaginário) e os pontos da superfície esférica que pertencem a uma mesma recta que passa pelo pólo Norte, provando que (Figura 1.6)

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = -i \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_3 = -\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Chama-se **Superfície Esférica de Riemann**, designada \mathbb{C}_∞ , a esta representação do plano complexo⁴³ e **projecção estereográfica** à correspondência assim definida de cada ponto do plano complexo para cada ponto da superfície esférica.

b) Prove: z e w são pontos diametralmente opostos da Superfície Esférica de Riemann se e só se $z\bar{w} = -1$.

c) Prove: As projecções estereográficas de rectas ou circunferências no plano complexo são circunferências na Superfície Esférica de Riemann.

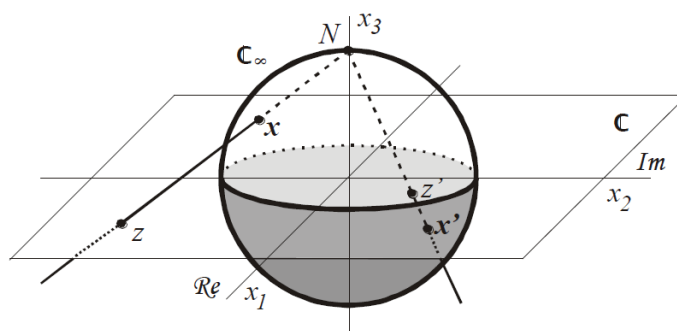


Figura 1.6: Superfície Esférica de Riemann e projecção estereográfica

Exercícios com aplicações a circuitos eléctricos e a sistemas mecânicos

1.17 A relação entre tensão e corrente sinusoidais num circuito eléctrico⁴⁴ com resistências, condensadores e bobinas pode ser facilmente expressa com números complexos, dado que uma função real $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$, com $a, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$, a que se chama, resp., **amplitude**, **frequência angular**, **fase**, é igual à parte imaginária de $a e^{i(\omega t + \varphi)} = a e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A e^{i\omega t}$, com $A \in \mathbb{C}$, chamada **amplitude complexa**⁴⁵.

a) Considere um circuito *RLC* em série (Figura 1.7). Sabendo que a relação entre a tensão $V(t)$ e a corrente $I(t)$ no instante t nos terminais de uma resistência R , de uma bobina de indutância L e de um condensador de capacidade C , é, resp.,

$$V(t) = RI(t), \quad V(t) = LI'(t), \quad V(t) = \frac{1}{c} \int I(t) dt,$$

⁴³A representação do plano complexo estendido numa superfície esférica foi proposta por B. Riemann em 1851.

⁴⁴As 1^{as} leis gerais da análise de circuitos eléctricos foram formuladas em 1845 pelo matemático Gustav Robert Kirchoff (1824-1887) na sequência do matemático Georg Simon Ohm (1789-1854) ter estabelecido em 1827 a relação de proporcionalidade da corrente eléctrica através de um condutor com a diferença de potencial eléctrico entre os terminais (Lei de Ohm). A 1^a lei de Kirchoff é a soma das correntes que entram por ramos ligados a um nó de um circuito é igual à soma das correntes que saem por ramos ligados ao mesmo nó e a 2^a lei de Kirchoff é a soma das forças electromotrizas ao longo de uma malha de um circuito é igual à soma das diferenças de potencial nos ramos da malha.

⁴⁵A representação complexa de sinais eléctricos sinusoidais e de impedâncias foi introduzida em 1893 pelo engenheiro Charles Steinmetz (1865-1923) e contribuiu para o rápido progresso da engenharia de sistemas eléctricos de corrente alternada no início do século XX. É usada rotineiramente na análise de circuitos e sinais e no controlo de sistemas. A sólida preparação obtida por C. Steinmetz na Alemanha como estudante universitário de matemática permitiu-lhe dispor de conhecimentos de análise complexa invulgares nos engenheiros da época.

mostre que se a tensão aplicada nos terminais do circuito é sinusoidal com frequência angular ω e amplitude complexa \mathbf{V}_0 , então a corrente no circuito é sinusoidal com frequência angular ω e amplitude complexa \mathbf{I}_0 , e a relação entre ambas é $\mathbf{V}_0 = [R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \mathbf{I}_0$.

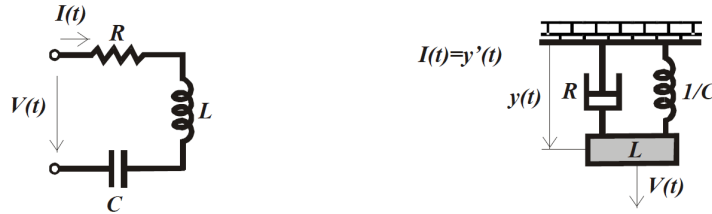


Figura 1.7: Circuito em série RLC e sistema mecânico análogo

b) Chama-se **impedância de um circuito eléctrico bipolar** (Figura 1.8) com tensão e corrente sinusoidais nos terminais com amplitudes complexas, resp., $\mathbf{V}_0, \mathbf{I}_0$ a $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{I}_0}$. Determine a impedância dos circuitos das Figuras 1.7 e 1.8, supondo no último caso que \mathbf{Z}_k é a impedância de um circuito bipolar com terminais que são os nós do correspondente ramo do circuito.

Observação: É análogo para sistemas mecânicos lineares de massas e molas com atrito, substituindo tensão eléctrica por força, intensidade de corrente por velocidade, bobinas de indutância L por massas de grandeza L , condensadores de capacidade C por molas com força de restituição proporcional ao deslocamento do ponto de equilíbrio com factor de proporcionalidade $\frac{1}{C}$ e resistências por amortecedores com forças de atrito proporcionais à velocidade com factor de proporcionalidade R (Figura 1.7). Também se considera analogamente a noção de **impedância mecânica**.

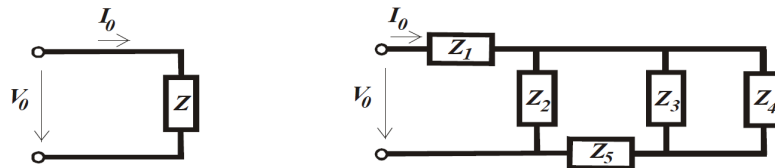


Figura 1.8: Circuito bipolar e circuito com impedâncias

Capítulo 2

Funções

2.1 Introdução

Neste capítulo consideram-se vários exemplos de funções complexas e ilustram-se representações geométricas destas funções que contribuem para a apreensão geométrica dos seus efeitos e para a compreensão de como podem estender funções reais. O exemplo mais importante é o da exponencial complexa, em associação natural com funções logaritmo que são inversas da exponencial restrita a conjuntos em que esta é uma função injectiva.

Consideram-se ainda outras funções complexas definidas com a exponencial, como funções trigonométricas, hiperbólicas, potências e exponenciais.

Para o leitor que só lidou com estas funções no âmbito de números reais pode parecer surpreendente que as funções trigonométricas possam ser obtidas das funções exponenciais, dada a grande diferença de gráficos destas funções no caso real (em características como monotonia, periodicidade, sinal, limitação, domínio) e porque originaram em contextos muito diferentes.

L. Euler identificou a relação de funções trigonométricas e exponencial numa carta de 1740 a J. Bernoulli⁴⁶ em que escreveu $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$.

A exponencial complexa, além do crescimento geométrico da exponencial real, contém as oscilações das funções trigonométricas reais seno e coseno. Como funções complexas, as funções hiperbólicas coincidem com as funções trigonométricas mediante uma simples rotação de variáveis. Este é um 1º exemplo do poder unificador e simplificador do contexto complexo em comparação com o real que se encontra em várias outras situações.

O capítulo termina com as noções de limite e continuidade.

2.2 Representação geométrica de funções

As funções complexas são definidas num conjunto de números complexos e têm valores complexos, $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ com $S \subset \mathbb{C}$. Para $z = x + iy \in S$, $x, y \in \mathbb{R}$, a função pode-se escrever $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. Chama-se às funções u, v , resp., **parte real** e **parte imaginária** da função f , e escreve-se $f = (u, v)$.

⁴⁶Bernoulli, Johann (1667-1748).

Analogamente a funções reais, se uma função complexa é dada por uma expressão sem indicação do domínio, considera-se que o **domínio** é o máximo subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ para que a expressão dá valores complexos.

A visualização do efeito de funções complexas é semelhante à de funções com valores e variáveis em \mathbb{R}^2 , por: imagens de curvas no domínio, pares de gráficos (das partes real e imaginária, ou das funções módulo e argumento), pares de conjuntos de nível (das partes real e imaginária). Com computadores é possível representar cada um dos pares referidos numa só figura com o uso de cor ou gradação de cinzento para um dos elementos do par.

(2.1) **Exemplo:** A função complexa $f(z) = z^2$ definida no semiplano superior complexo $S = \{(x, y) \in \mathbb{C} : y > 0\}$.

Uma possibilidade de visualizar a função é a **representação de imagens de conjuntos de curvas com união igual ao domínio** de modo a dar uma ideia geométrica de como a função deforma regiões do plano quando se passa do domínio para o contradomínio.

É prático analisar o efeito da função considerada neste exemplo $w = f(z)$ em coordenadas polares, com $z = r(\cos \theta, \sin \theta)$ e $w = \rho(\cos \varphi, \sin \varphi)$. A relação entre w e z pode ser expressa por $\rho = r^2$ e $\varphi = 2\theta$. Cada semicircunferência com raio r_0 e centro na origem no semiplano superior complexo transforma-se no subconjunto da circunferência com raio $\rho = (r_0)^2$ e centro na origem obtido retirando-lhe apenas o ponto no semieixo real positivo (Figura 2.1). Cada semirecta do semiplano superior complexo com origem no ponto zero com pontos de argumento θ_0 transforma-se na semirecta com origem no ponto zero e com pontos com argumento $\varphi = 2\theta_0$ (Figura 2.1). Assim, o semiplano superior complexo transforma-se no plano complexo menos o semieixo real positivo e a origem.

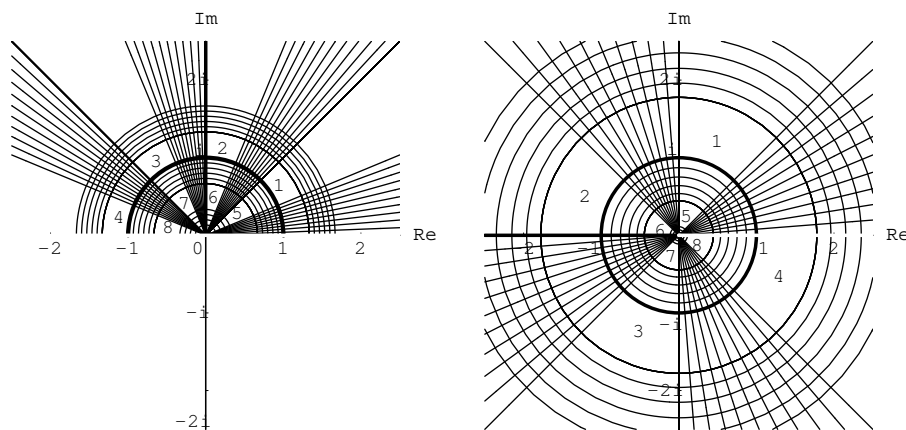


Figura 2.1: Transformação definida pela função $f(z) = z^2$ para $\text{Im } z > 0$

A função pode ser representada em coordenadas cartesianas, com $z = (x, y)$ e $w = f(z) = (u(x, y), v(x, y))$. Obtém-se

$$u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Cada recta horizontal $y = y_0$ do semiplano superior complexo é transformada na curva de equações paramétricas $u = x^2 - (y_0)^2$, $v = 2xy_0$, com parâmetro $x > 0$. Eliminando x , obtém-se a equação da parábola $u = \frac{v^2}{(2y_0)^2} - (y_0)^2$ (Figura 2.2). Cada semirecta vertical do semiplano superior com origem no eixo real, $x = x_0$, $y > 0$, transforma-se no arco de parábola com equações paramétricas $u = (x_0)^2 - y^2$, $v = 2x_0y$, $y > 0$. Eliminando y obtém-se a equação da parábola $u = (x_0)^2 - \frac{v^2}{(2x_0)^2}$, que é simétrica da parábola anterior com $y_0 = x_0$ em relação ao eixo imaginário (Figura 2.2).

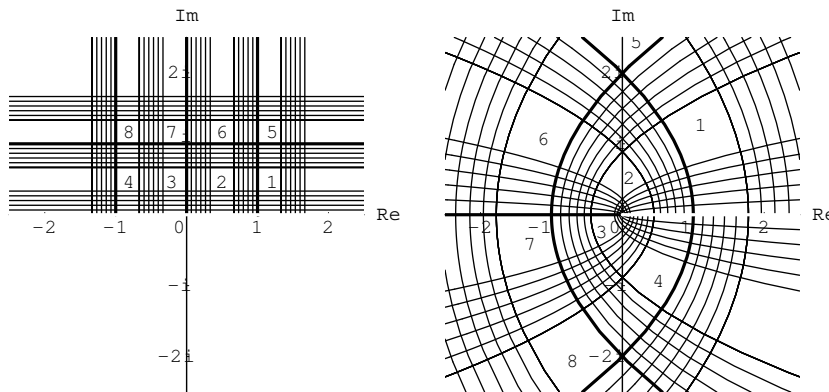


Figura 2.2: Transformação definida pela função $f(z) = z^2$ para $\text{Im } z > 0$

Outra representação geométrica possível é pelos **gráficos das partes real e imaginária da função**. Estas funções reais são $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$, com $y > 0$ (Figura 2.3).

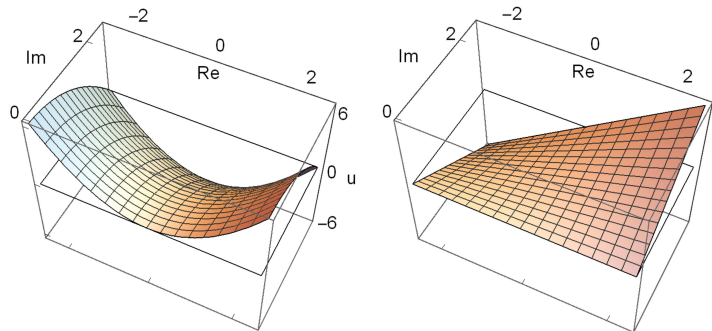


Figura 2.3: Gráficos das partes real e imaginária de $f(z) = z^2$ para $\text{Im } z > 0$

Também se pode representar geometricamente uma função complexa f pelos **conjuntos de nível das partes real e imaginária** de f , o que corresponde a determinar os conjuntos de pontos do domínio que são transformados em rectas verticais $u = u_0$ e em rectas horizontais $v = v_0$, que neste exemplo são, resp., os arcos de hipérbolas de equações cartesianas $x^2 - y^2 = u_0$, com $y > 0$, e o arco de hipérbole $xy = \frac{v_0}{2}$, com $y > 0$. São hipérbolas equiláteras com assíntotas, resp., as bissetrizes dos quadrantes definidos pelos eixos dos coordenados (Figura 2.4).

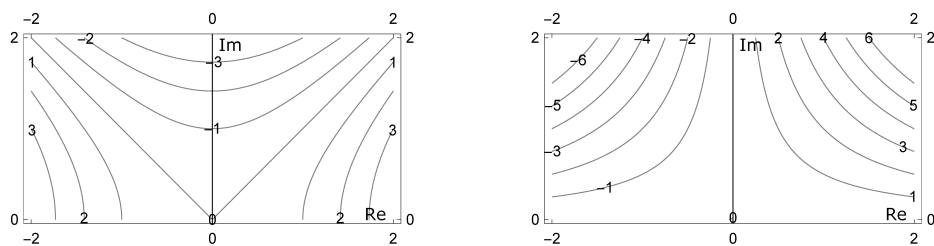


Figura 2.4: Curvas de nível das partes real e imaginária de $f(z) = z^2$ para $\text{Im } z > 0$

Outra representação geométrica útil é o gráfico de $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$, a que se chama **relevo** de f ; juntamente com o gráfico de um **argumento** de f , $(x, y) \mapsto \arg f(x + iy)$, obtêm-se representações geométricas completas da função f (como o argumento de um número complexo é determinado a menos de um múltiplo inteiro de 2π , para facilitar a visualização pode ser útil assegurar a continuidade do gráfico nos pontos em que seja possível pela utilização de valores apropriados do argumento em regiões diferentes do domínio, em vez de uma escolha predeterminedada como, por exemplo, o argumento principal). Neste exemplo $|f(re^{i\theta})| = r^2$ e pode-se escolher $\arg f(re^{i\theta}) = 2\theta$ (Figura 2.5).

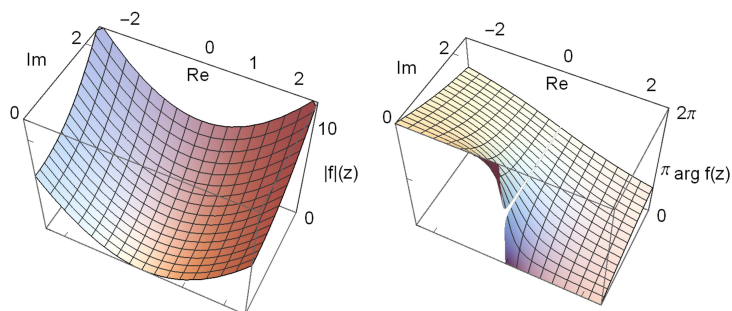


Figura 2.5: Relevo e gráfico de um argumento de $f(z) = z^2$ para $\text{Im } z > 0$

A função $f(z) = z^2$ com domínio no semiplano superior é uma bijecção para todo o plano menos o semieixo real positivo e a origem. Se $f(z) = z^2$ com domínio todo o plano complexo, o contradomínio seria todo o plano complexo e cada ponto não nulo deste plano seria imagem de dois pontos distintos, um no semiplano superior unido com o semieixo real positivo e outro simétrico desse em relação à origem, e, portanto, na união do semiplano inferior complexo com o semieixo real negativo, ou seja os valores de $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $f(z) = z^2$, cobrem o plano (com exceção da origem) duas vezes. f não é injectiva e diz-se que a relação inversa é plurívoca com dois ramos contínuos máximos que têm contradomínio o semiplano superior (resp., inferior) unido com o semieixo real positivo (resp., negativo). A relação inversa neste caso dá as raízes quadradas de cada número complexo, que são duas para números diferentes de zero, simétricas em relação à origem.

(2.2) **Exemplo:** A função complexa $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

O domínio de f é $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Com $z = (x, y)$ e $w = f(z) = (u(x, y), v(x, y))$,

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{(x-1) + iy} = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}.$$

O conjunto de pontos transformados na circunferência com centro na origem e raio r_0 , com equação cartesiana $x^2 + y^2 = (r_0)^2$, é a curva com equação cartesiana $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{(r_0)^2}$; logo, é uma circunferência com centro em $(1, 0)$ e raio $\frac{1}{r_0}$. O conjunto de pontos que são transformados na união das semirectas de declive m com extremidade na origem das coordenadas, que têm equação cartesiana $v = mu$, com $(u, v) \neq (0, 0)$, tem equação cartesiana $y = -m(x-1)$, com $(x, y) \neq (1, 0)$, que é a união das semirectas de declive $-m$ com origem no ponto $(1, 0)$ (Figura 2.6). O conjunto de pontos do domínio que são transformados no eixo imaginário, $u = 0$, é a recta vertical $x = 1$ (Figura 2.6). O contradomínio de f é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

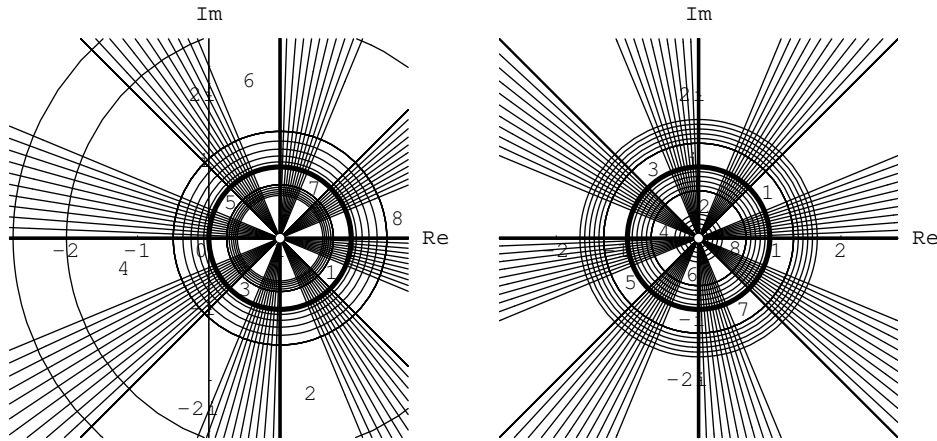


Figura 2.6: Transformação definida por $f(z) = \frac{1}{z-1}$

O relevo de f é o gráfico da função $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$, indicado na Figura 2.7. O gráfico do argumento principal de f pode ser obtido notando que $\text{Arg } f(x + iy) = \text{Arg } \frac{1}{(x-1) + iy} = -\text{Arg } (x-1, y)$ (ver Figura 2.7).

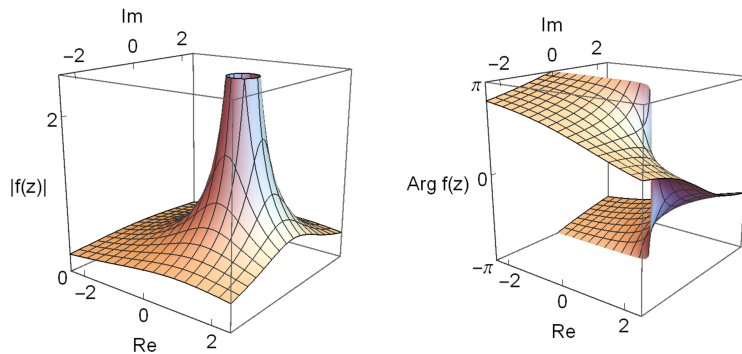


Figura 2.7: Relevo e gráfico do argumento principal de $f(z) = \frac{1}{z-1}$

2.3 Funções polinomiais e funções racionais

Chama-se **função polinomial complexa** de grau n a uma função da forma

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

com $a_n \neq 0$, em que os coeficientes a_k , $k \in \{0, \dots, n\}$ são números complexos. Podem também ser consideradas funções polinomiais complexas com coeficientes reais. Chama-se **função racional complexa** a uma função que é o quociente de duas funções polinomiais complexas.

2.4 Função exponencial

Define-se a função **exponencial complexa** por (Figuras 2.8 e 2.9)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \text{para } z = (x, y) \in \mathbb{C}.$$

A expressão no lado direito só envolve funções reais de variável real que podem ser definidas pelas séries reais de potências

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

e multiplicando as séries obtém-se $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. A exponencial complexa é uma extensão da exponencial real, pois $e^{x+i0} = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x$, e satisfaz as propriedades básicas da exponencial $e^z \neq 0$, $e^{z+w} = e^z e^w$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, para $z, w \in \mathbb{C}$. Além disso, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ e $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ para $z \in \mathbb{C}$, $|e^{iy}| = 1$ para $y \in \mathbb{R}$, e $\operatorname{Im} z$ é um argumento do número complexo e^z . O contradomínio da função de variável real $y \mapsto e^{iy}$ é a circunferência no plano complexo com raio 1 e centro em 0 e o contradomínio da exponencial complexa é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A exponencial complexa não é injectiva, mas $e^z = e^w$ se e só se $z - w = ik2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

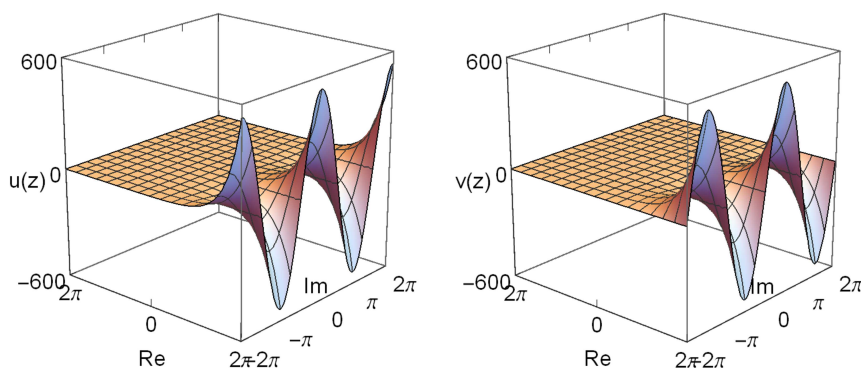


Figura 2.8: Gráficos das partes real e imaginária da exponencial

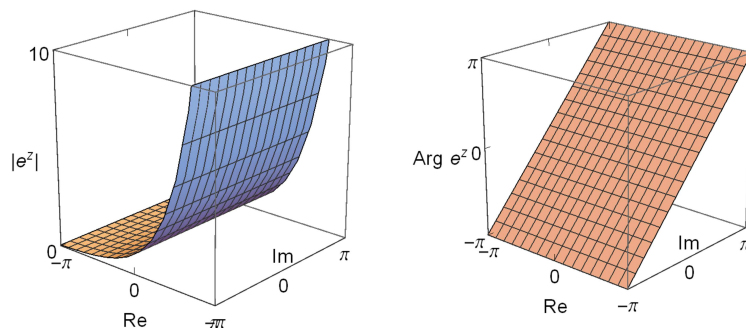


Figura 2.9: Relevos e gráfico do argumento principal da exponencial

Analogamente a funções reais, diz-se que uma função complexa f é **periódica** de período $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ou w é um **período** de f , se $f(z+w) = f(z)$ para todo z no domínio de f ; todos múltiplos inteiros de w , kw com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ também são períodos de f . Diz-se que w é um **período mínimo** de f se é um período e nenhum seu submúltiplo inteiro positivo é período de f . Em contraste com funções reais, uma função complexa pode ter mais de um período mínimo (*e.g.* $f(x+iy) = \cos x + i \sin(2y)$ para $(x, y) \in \mathbb{C}$ tem períodos mínimos 2π e $i\pi$; todos $n2\pi + im\pi$, $n, m \in \mathbb{Z}$ não ambos 0, são períodos de f).

A exponencial complexa é periódica com único período mínimo com parte imaginária positiva $i2\pi$.

2.5 Funções trigonométricas e hiperbólicas

É imediato da definição de exponencial complexa que para $y \in \mathbb{R}$ é $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$ e $\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$. As funções complexas **coseno** e **seno** definem-se estendendo estas fórmulas para números complexos e as funções **tangente** e **cotangente** são, resp., $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$, ou seja (Figuras 2.12 a 2.14)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

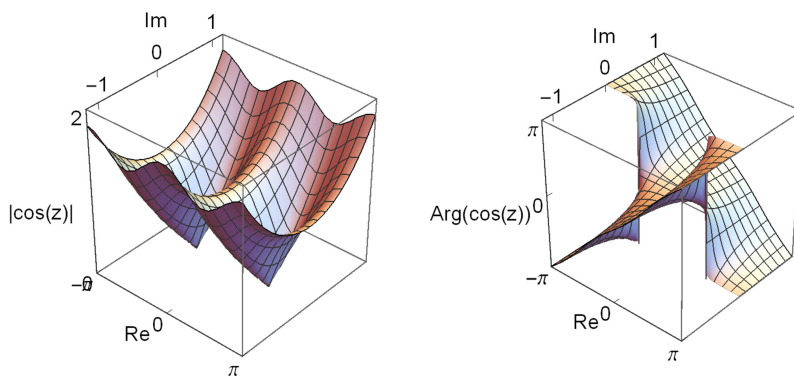


Figura 2.10: Relevos e gráfico do argumento principal do coseno complexo

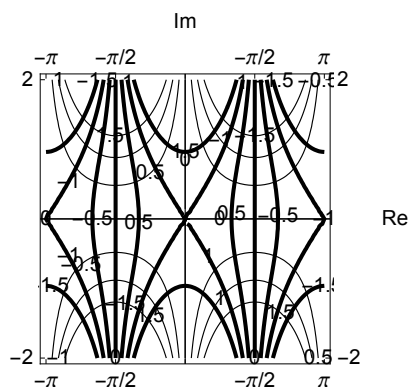


Figura 2.11: Curvas de nível das partes real (a grosso) e imaginária (a fino) do coseno complexo

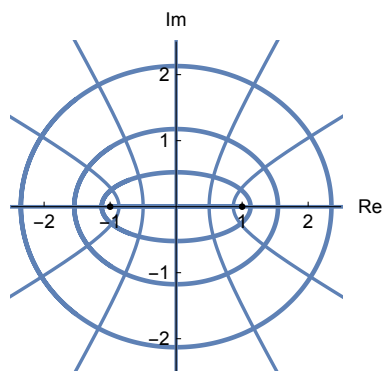


Figura 2.12: Imagens de rectas verticais $\operatorname{Re} z = k\frac{\pi}{6}$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (a fino) e horizontais $\operatorname{Im} z = k\frac{\pi}{2}$, $k=0, 1, 2, 3$ (a grosso) do coseno complexo; $\cos z$ transforma cada faixa vertical $[j\pi, (j+1)\pi] + i\mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, em \mathbb{C}

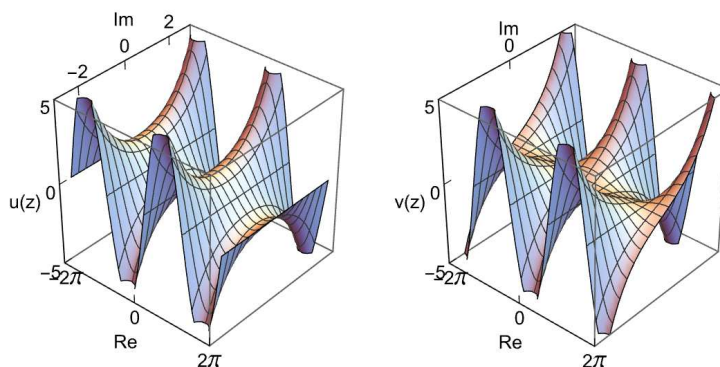


Figura 2.13: Graphs of real and imaginary parts of the sine

Como a exponencial é periódica com período $i2\pi$, as funções complexas coseno e seno são periódicas de período 2π , e, como este é o período mínimo das funções reais coseno e seno, também é um período mínimo destas funções complexas. Da função real tangente ser periódica com período mínimo π e da definição da função complexa tangente, esta também é periódica com período mínimo π e este é o único período mínimo com parte real positiva.

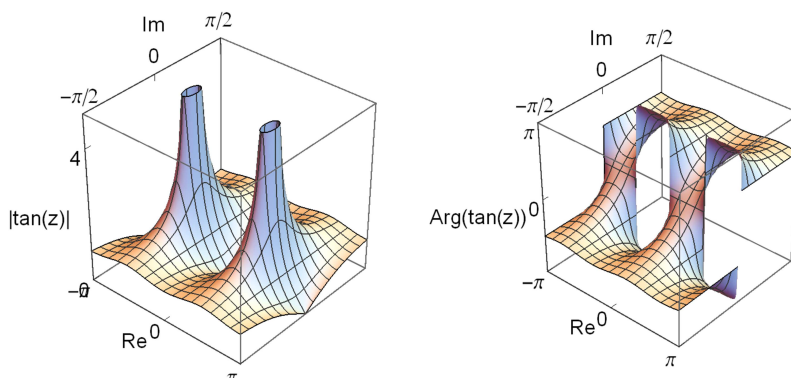


Figura 2.14: Relevô e gráfico do argumento principal da tangente

As funções complexas coseno e seno satisfazem as relações

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{-iz} + e^{iz}) = \cos z, \quad \sin(-z) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin z,$$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{iz} e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-iz} e^{-i\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2}(e^{iz} i + e^{-iz} (-i)) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z,$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2i}(e^{iz} e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-iz} e^{-i\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2i}(e^{iz} i - e^{-iz} (-i)) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{i2z} + 2 + e^{-i2z}}{4}\right) - \left(\frac{e^{i2z} - 2 + e^{-i2z}}{4}\right) = 1,$$

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \frac{1}{2}[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}] = \frac{1}{2}[(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})] \\ &= (\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= -\cos\left(z+w+\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)(\cos w) + \left(\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)(\sin w) \\ &= (\sin z)(\cos w) + (\cos z)(\sin w), \end{aligned}$$

estendendo correspondentes fórmulas válidas para $z \in \mathbb{R}$.

Definem-se analogamente as funções complexas **coseno hiperbólico**, **seno hiperbólico** e **tangente hiperbólica** como extensões das correspondentes funções reais (Figuras 2.15 a 2.17):

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

É claro que

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz), \quad \tanh z = -i \tan(iz).$$

Logo, as funções complexas coseno hiperbólico e seno hiperbólico são periódicas de período $i2\pi$, a tangente hiperbólica é periódica de período $i\pi$ e estes são os únicos períodos mínimos com parte imaginária positiva. O coseno hiperbólico pode ser obtido por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno de 0 seguida da aplicação do coseno trigonométrico. O seno hiperbólico e a tangente hiperbólica podem ser obtidos por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno de 0 seguida da aplicação da correspondente função trigonométrica e, depois, uma rotação de $-\frac{\pi}{2}$ em torno de 0, sendo esta última equivalente a trocar a parte real com a imaginária e, no final, mudar o sinal da parte imaginária. Estas observações são facilmente identificadas nos gráficos dados nas figuras. Verifica-se

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{1}{4}[(e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2] = 1,$$

i.e. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ para $z \in \mathbb{C}$, estendendo a fórmula válida para $z \in \mathbb{R}$.

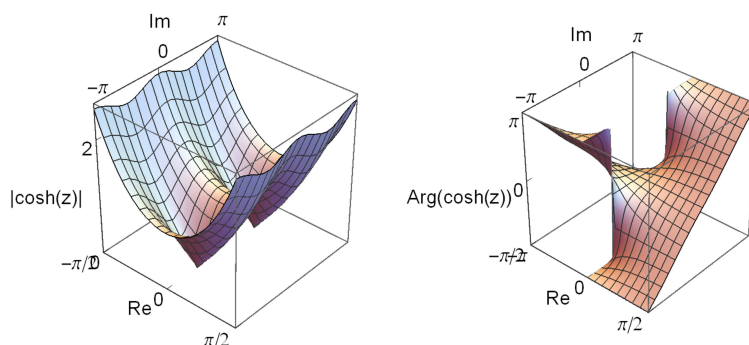


Figura 2.15: Relevo e gráfico do argumento principal do coseno hiperbólico

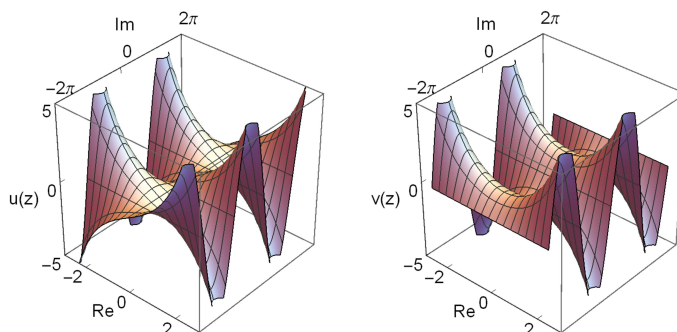


Figura 2.16: Gráficos das partes real e imaginária do seno hiperbólico

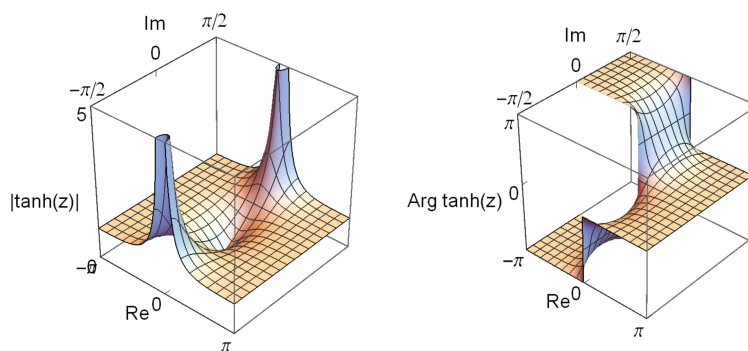


Figura 2.17: Relevo e gráfico do argumento principal da tangente hiperbólica

2.6 Logaritmos

Dado um número complexo em representação polar $z = re^{i\theta} \neq 0$, uma vez que $z = e^{\log r} e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$, define-se o seu **logaritmo** por

$$\log z = \log r + i\theta,$$

em que $\log r$ designa o logaritmo real de $r > 0$ (Figuras 2.18 e 2.19). Como o contradomínio da exponencial é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, todos números complexos $\neq 0$ têm logaritmos. Em particular, os números reais negativos têm logaritmos complexos, apesar de não terem logaritmos reais.

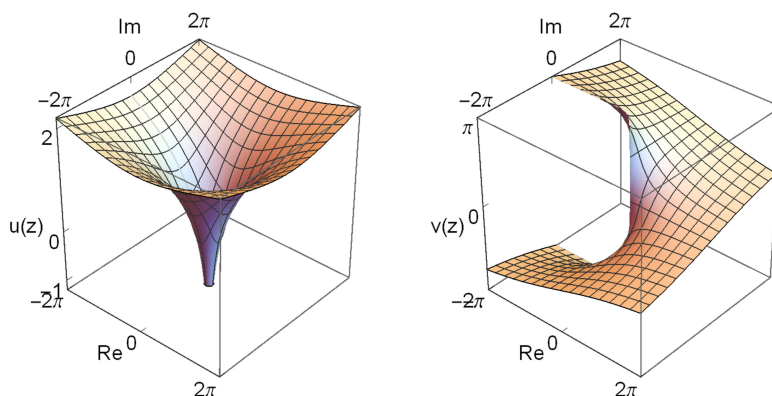


Figura 2.18: Gráficos das partes real e imaginária do logaritmo

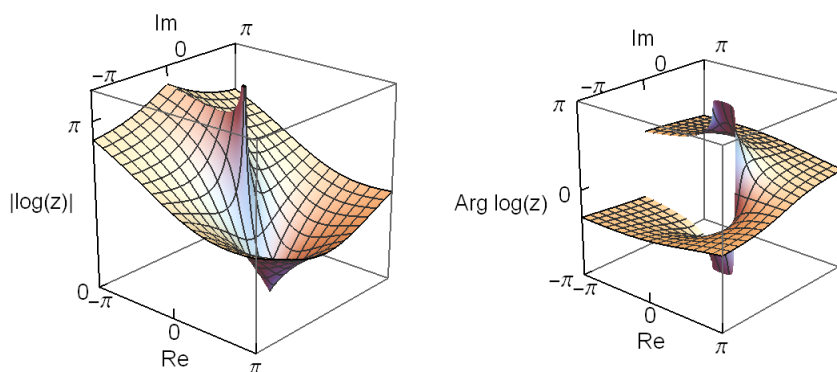


Figura 2.19: Relevé e gráfico do argumento principal do logaritmo

Como o argumento θ de cada $z \neq 0$ pode ser escolhido num conjunto infinito de valores que diferem de múltiplos inteiros de 2π , o logaritmo complexo pode ser escolhido entre infinitos valores que diferem de múltiplos inteiros de $i2\pi$. Para assegurar a unicidade de valor e a continuidade de $\log z$ pode-se restringir θ a um intervalo semiaberto $I \subset \mathbb{R}$ de largura 2π (corresponde a separar diferentes “ramos” do logaritmo com “cortes” ao longo de uma semi-recta com origem no ponto zero). Cada uma destas escolhas conduz a um **Ramo** contínuo do logaritmo⁴⁷, $\log z = \log r + i\theta$, com $\theta \in I$. Chama-se **valor Principal do logaritmo** de z a $\log z = \log r + i\theta_0$, em que $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$ designa o argumento principal de z . Os logaritmos complexos assim definidos são extensões do logaritmo real e têm propriedades básicas semelhantes, como

$$\log(zw) = \log z + \log w, \quad \log \frac{z}{w} = \log z - \log w, \quad \log z^n = n \log z,$$

(a menos de $ik2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$)⁴⁸. Por convenção, o logaritmo de um número real positivo é sempre considerado como o seu logaritmo real e, portanto, é definido univocamente, a menos que se diga o contrário.

⁴⁷Podem-se obter outros Ramos, *e.g.* considerando “cortes” ao longo de linhas curvas ilimitadas com origem no ponto zero e sem auto-intersecções.

⁴⁸Há números $\log z + \log w$ que não são da forma $\log(zw)$, embora deles difiram de um múltiplo inteiro de $i2\pi$; no sentido contrário não acontece. É análogo para as outras fórmulas.

2.7 Potências e exponenciais de base complexa

Dados $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, define-se a **potência complexa** de base complexa e expoente complexo w por (Figura 2.20)

$$z \mapsto z^w = e^{w \log z}.$$

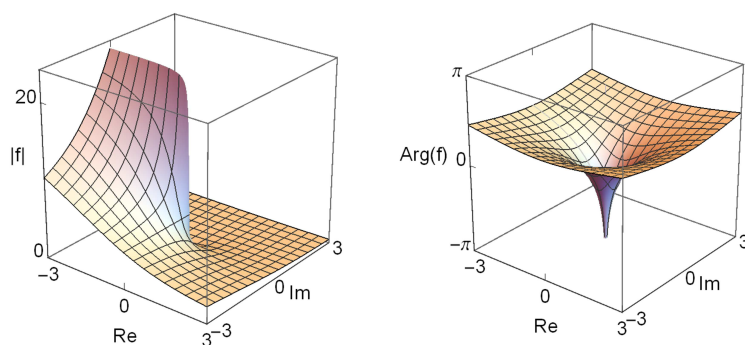


Figura 2.20: Relevos e gráfico do argumento principal da potência $z \mapsto z^i$ ($z^i = e^{i \log z} = e^{i(\log |z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{-\operatorname{Arg} z} e^{i \log |z|}$; $|z^i| = e^{-\operatorname{Arg} z}$, $\operatorname{Arg} z^i = \log |z|$)

Se z é um número real positivo, $\log z$ é real e z^w tem um único valor. Caso contrário, $\log z$ é um logaritmo complexo e, portanto, z^w pode ser definido por uma escolha em valores que diferem de factores de $e^{ik2\pi w}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Chama-se **valor principal da potência complexa** $z \mapsto z^w$ à função que se obtém pela expressão acima tomando $\log z$ igual ao valor principal do logaritmo de z . Se z não é um número real positivo, z^w tem um único valor possível se e só se $w \in \mathbb{Z}$. Neste caso, z^w é uma potência inteira de z e coincide com o correspondente valor da potência inteira como definida no capítulo 1. Se $w \in \mathbb{Q}$, é $w = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ que podem ser considerados sem factores primos comuns, pelo que z^w pode ser definido por uma escolha entre q valores que coincidem com as q raízes de ordem q de z^p e, portanto, $z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, que também está definida para $z=0$ se $w = \frac{p}{q} > 0$.

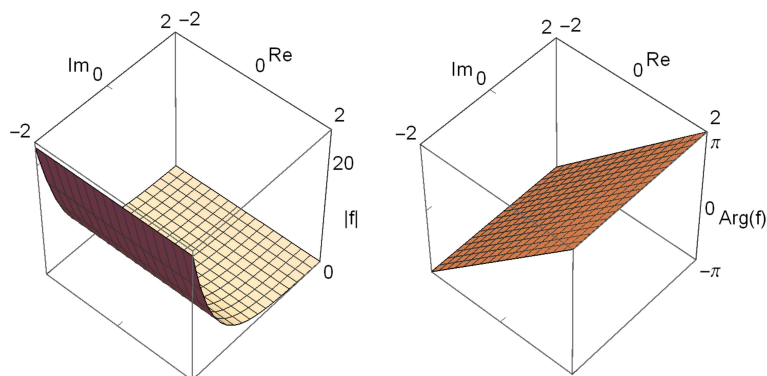


Figura 2.21: Relevos e gráfico do argumento principal da exponencial de base i complexa $w \mapsto i^w$ ($i^w = e^{w \log i} = e^{wi \frac{\pi}{2}}$; $\log i$, $|i^w| = e^{-\frac{\pi}{2} \operatorname{Im} w}$, $\operatorname{Arg} i^w = \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} w$)

As potências complexas satisfazem $z^{-w} = \frac{1}{z^w}$, $z^{w_1+w_2} = z^{w_1}z^{w_2}$, mas $(e^{w_1})^{w_2} = e^{w_1w_2}e^{ik2\pi w_2}$ e $\log z^w = w \log z + ik2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, **exponencial complexa de base z** é (Figura 2.21)

$$w \mapsto z^w = e^{w \log z},$$

com observações semelhantes às para a potência complexa de base complexa, e **valor principal da exponencial complexa de base z** é a função dada pela expressão acima com $\log z$ o valor principal do logaritmo de z .

2.8 Funções trigonométricas inversas

Para definir inversas da função complexa coseno, por $w = \arccos z$ com $z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$, nota-se que tal equivale a $(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$; logo, $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, com $s = \sqrt{z}$ definida por $s^2 = z$ e $\arg s \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e, portanto, $\arccos z = w = -i \log(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$, ou, atendendo a que $(z + \sqrt{z^2 - 1})(z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1$, pelo que $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ são números recíprocos, é $\arccos z = \pm i \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$ (Figura 2.22)

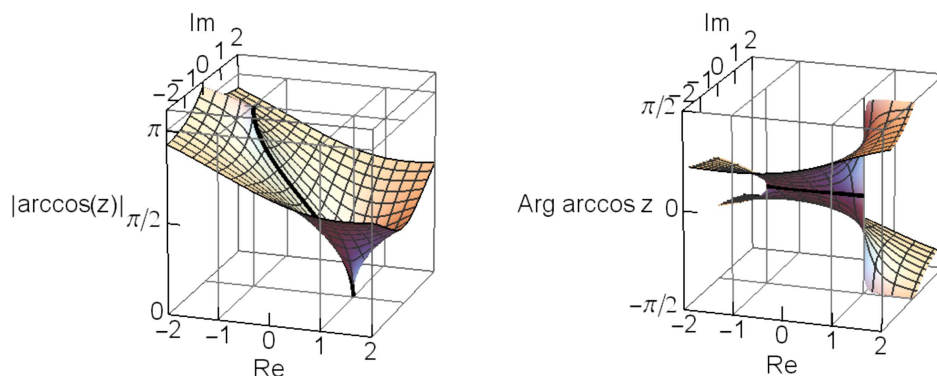


Figura 2.22: Relevo e gráfico do Argumento Principal de Ramo do $\arccos z$ complexo

Como o logaritmo de um número complexo $\neq 0$ pode ser definido por uma escolha num número infinito de valores que diferem de múltiplos inteiros de $i2\pi$, também $\arccos z$ pode ser definido através de uma escolha em infinitos valores que diferem de múltiplos inteiros de 2π . Os valores possíveis de $\arccos z$ também incluem os simétricos do logaritmo considerado (pois o coseno é uma **função par**, *i.e.* $\cos(-z) = \cos z$) que, em geral, formam um conjunto diferente de pontos que diferem entre si de múltiplos inteiros de $i2\pi$ (os dois conjuntos coincidem se e só se $z + \sqrt{z^2 - 1}$ é um número real positivo).

A inversão da função complexa seno é imediata de $\sin w = \cos(\frac{\pi}{2} - w)$, e dá $\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z$ e

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} \mp i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

que também pode ser definido por uma escolha em infinitos valores que diferem de múltiplos inteiros de 2π .

2.9 Limite e continuidade

Como as estruturas topológicas de \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 coincidem, dada uma função $f: S \rightarrow \mathbb{C}$, com $S \subset \mathbb{C}$, e um ponto $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$, diz-se que o **limite** de $f = (u, v)$ em z_0 existe e é $Z = (X, Y)$, e escreve-se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = Z$, se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [(u, v)](x, y) = (X, Y)$ no sentido dos limites de funções em \mathbb{R}^2 . Também se consideram limites infinitos e no infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, & \quad \text{se} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \|(u, v)(x, y)\| = \infty, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = Z, & \quad \text{se} \quad \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} (u, v)(x, y) = (X, Y), \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty, & \quad \text{se} \quad \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \|(u, v)(x, y)\| = \infty. \end{aligned}$$

Diz-se que f é **contínua num ponto** $z_0 \in S$ se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Diz-se que f é **contínua num conjunto** $C \subset S$ se é contínua em cada ponto de C , e diz-se que f é **contínua** se é contínua em todo o domínio S . É claro que, $f = (u, v)$ é contínua em $z_0 = (x_0, y_0)$ se e só se (u, v) é contínua em (x_0, y_0) como função real de variável em \mathbb{R}^2 .

Em consequência, o limite da soma, produto e quociente de funções complexas num ponto é, resp., igual à soma, produto e quociente dos correspondentes limites das parcelas (no caso do quociente, se o limite do denominador não é zero).

Analogamente, somas, produtos, quocientes, composições de funções contínuas são funções contínuas (no caso do quociente nos pontos em que o denominador não é zero). Em particular, as funções polinomiais complexas são contínuas em \mathbb{C} . As funções racionais são contínuas em todos pontos do domínio, *i.e.* em todos pontos em que o denominador não se anula.

A função que a cada complexo faz corresponder o seu conjugado, $z \mapsto \bar{z}$ é contínua em \mathbb{C} , assim como as funções $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$. A função $\operatorname{Arg} z$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$. As funções complexas exponencial, coseno, seno, coseno hiperbólico e seno hiperbólico são contínuas em \mathbb{C} . A tangente complexa é contínua no domínio, *i.e.* no conjunto de pontos em que o denominador no quociente de funções que a define não se anula, ou seja em $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Aplica-se o mesmo à tangente hiperbólica, que tem domínio $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercícios

- 2.1 Determine os valores de $2^i, i^i, (-1)^{2i}$ na forma $a+ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
- 2.2 Determine os valores de $\sin i, \cos i, \tan(i+1)$.
- 2.3 Determine todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ para os quais e^z é igual a $2, -1, i, -\frac{i}{2}, -1-i, 1+2i$.
- 2.4 Obtenha expressões para $\arctan w$, em que w é um número complexo, em termos de logaritmos.
- 2.5 Prove que $|z^i| < e^\pi$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- 2.6 Prove que a função complexa $|\cos z|$ é ilimitada.

- 2.7 Prove que para $a \in \mathbb{R}$ e $-\pi < \theta \leq \pi$ é $(\cos \theta + i \sin \theta)^a = \cos(a\theta) + i \sin(a\theta)$ e mostre que a restrição aos valores de θ é necessária. Mostre que se $a \in \mathbb{Z}$, a fórmula verifica-se para todo $\theta \in \mathbb{R}$; neste caso é conhecida por **fórmula de De Moivre**⁴⁹.
- 2.8 Determine equações cartesianas para os conjuntos do plano complexo que são transformados em rectas paralelas aos eixos coordenados pela função complexa definida por $z + e^z$ e represente-os graficamente.
- 2.9 Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ existe para todo $z \in \mathbb{C}$ e é igual a e^z .
- 2.10 Determine o contradomínio da restrição da função complexa $\tan z$ à faixa vertical do plano complexo $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{\pi}{4}$ e indique as imagens das rectas verticais e dos segmentos de rectas horizontais desta faixa.

⁴⁹A fórmula de De Moivre apareceu publicada pela primeira vez em 1748 no livro de L. Euler *Introductio*. De Moivre, Abraham (1667-1754).

Capítulo 3

Derivada

3.1 Introdução

O 1º estudo sistemático das funções complexas e das suas aplicações a problemas de análise matemática, hidrodinâmica e cartografia deve-se a L. Euler, em 1776-77. Funções deste tipo tinham sido consideradas antes, principalmente por J.R. d'Alembert⁵⁰ que utilizou funções complexas em 1752 no estudo do movimento de fluidos. L. Euler obteve então as condições de Cauchy-Riemann necessárias para diferenciabilidade de uma função complexa, mas não as explorou. Estas condições resultam da correspondência básica de diferenciabilidade de uma função num ponto e a possibilidade de a aproximar bem numa vizinhança do ponto por uma função linear.

Cerca de 1825 A.-L. Cauchy deu um sentido preciso a derivada de função, com uma noção rigorosa de limite da sua razão incremental, seguindo uma ideia de d'Alembert cerca de 1752. A.-L. Cauchy avançou decisivamente o estudo de funções complexas com base nas condições necessárias de diferenciabilidade obtidas por L. Euler, mas só com trabalho de B. Riemann em 1851 estas condições começaram a ser plenamente exploradas; é por isso que são chamadas condições de Cauchy-Riemann. São equações que relacionam as derivadas parciais das partes real e imaginária da função em relação às partes real e imaginária da variável independente estabelecendo que a diferenciabilidade de funções complexas implica uma forte interligação das partes real e imaginária da função, ausente para diferenciabilidade de funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que restringe severamente funções complexas diferenciáveis em comparação com funções diferenciáveis de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .

As condições de Cauchy-Riemann são necessárias para diferenciabilidade de funções complexas num conjunto aberto e são suficientes para funções com partes real e imaginária C^1 como funções das partes real e imaginária da variável independente, pois tais funções são diferenciáveis como funções de variável em \mathbb{R}^2 , mas ainda são suficientes se a função é contínua no conjunto aberto considerado, como provado por D. Menchoff⁵¹ em 1936.

⁵⁰d'Alembert, Jean le Rond (1717-1783).

⁵¹Corrigindo uma lacuna prova iniciada em 1923 por de Herman Looman (1896-1983). Men-

As transformações lineares definidas pelas derivadas de funções complexas diferenciáveis num conjunto aberto correspondem a relações geométricas de semelhança do domínio para o contradomínio, *i.e.* transformações que preservam ângulos entre rectas e em cada ponto expandem (ou contraem) comprimentos uniformemente em todas as direcções. Como as derivadas de uma função definem transformações lineares que são boas aproximações locais da função, as propriedades referidas tendem a ser satisfeitas pela função no limite quando a variável independente tende para um ponto de diferenciabilidade. L. Euler chamou a estas funções “transformações infinitesimalmente semelhantes” para traduzir a ideia de na vizinhança de cada ponto tenderem a definir transformações de semelhança no sentido da geometria elementar (triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais com a mesma constante de proporcionalidade). L. Euler considerou estas transformações em trabalhos de 1777 sobre cartas geográficas da Rússia, que tinha sido encarregado de elaborar pela Academia das Ciências de S. Petersburgo. Um aspecto essencial para o uso prático de cartas é que o “traçado de rumos” definindo um ângulo de direcção de percurso com uma direcção de referência (*e.g.* com o Norte magnético ou celeste) possa ser feito marcando o mesmo ângulo numa carta plana, o que exige a preservação de ângulos na construção de cartas planas da superfície do globo terrestre e, portanto, a propriedade de serem “transformações infinitesimalmente semelhantes”. A designação Transformações Conformes foi introduzida para transformações do plano com as propriedades geométricas referidas em 1789 por F.T. Schubert⁵², académico de S. Petersburgo.

3.2 Diferenciabilidade e derivada

Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num conjunto aberto não vazio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diz-se que f é **diferenciável** num ponto $z_0 \in \Omega$ se existe o limite da razão incremental de f de z_0 para $z \in \Omega$ quando $z \rightarrow z_0$:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

A $f'(z_0)$ chama-se **derivada de f em z_0** . Se f é diferenciável em todos pontos de um conjunto aberto $S \neq \emptyset$, diz-se que é **Holomorfa**⁵³ em S , se $S \subset \Omega$ não é aberto, diz-se que f é Holomorfa em S se tem extensão Holomorfa a um conjunto aberto que contém S . O conjunto de todas funções Holomorfas em S designa-se $H(S)$. Chama-se **função inteira** a uma função Holomorfa em \mathbb{C} . Logo, o conjunto das funções inteiras é $H(\mathbb{C})$.

(3.1) Exemplos:

1. A função complexa $f(z) = |z|^2$ só é diferenciável no ponto $z = 0$, pois,

choff, Dmitrii (1892-1988). A prova usa o Teorema de Morera, categoria de Baire, medida de Lebesgue e a Regra de Barrow para integral de Lebesgue. Esta Regra e o Teorema de Loomis-Menchoff estão incluídos no apêndice I do livro Magalhães, L.T., *Quasiconformal Mappings in the Plane and Complex Dynamics*, to publish.

⁵²Schubert, Friedrich Theodor von (1758-1825).

⁵³Nome introduzido em 1875 por Charles Briot (1817-1882) e Jean Bouquet (1819-1885).

com $h = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, é

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h})-z\bar{z}}{h} = \frac{z\bar{z}+z\bar{h}+h\bar{z}+h\bar{h}-z\bar{z}}{h} = z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h} = ze^{-i2\theta} + \bar{z} + \bar{h}.$$

Logo⁵⁴, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = ze^{-i2\theta} + \bar{z}$. Para $z \neq 0$ este limite varia com θ , pelo que não existe, e para $z=0$ o limite existe e é zero. Portanto a derivada de f só existe no ponto 0 e $f'(0)=0$.

2. Para uma função complexa constante $f(z)=c$ é

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Funções constantes em \mathbb{C} são funções inteiras com derivada nula em todos pontos de \mathbb{C} .

3. Para a função identidade $f(z)=z$ é

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = 1.$$

A função identidade é inteira e tem derivada 1 em todos os pontos de \mathbb{C} .

4. Para uma função potência de expoente inteiro positivo $f(z)=z^n$, com $n \in \mathbb{N}$, da fórmula binomial de Newton⁵⁵ é

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(z+h)^n - z^n] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - z^n \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[z^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - z^n \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} = nz^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, $f(z)=z^n$ é uma função inteira com derivada $f'(z)=nz^{n-1}$ para $z \in \mathbb{C}$.

As derivadas nos exemplos anteriores foram calculadas directamente a partir da definição, como limites de razões incrementais. Contudo, da definição de derivada resultam propriedades de derivação de operações de funções análogas às de funções reais e que se estabelecem da mesma maneira. Em particular, somas, produtos e quocientes com denominadores não nulos de funções complexas diferenciáveis num ponto são diferenciáveis nesse ponto, e composições de funções complexas diferenciáveis em pontos correspondentes na decomposição são

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

Logo, somas, produtos e quocientes com denominadores não nulos de funções Holomorfas num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ são Holomorfas em Ω , e composições de funções Holomorfas são Holomorfas, *i.e.* se $g \in \Omega$ e $f \in H(g(\Omega))$, é $f \circ g \in H(S)$. Em particular, o conjunto $H(S)$ das funções Holomorfas num conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é um espaço linear complexo com a soma e a multiplicação por escalares complexos usuais, e substituindo os escalares por números reais é um espaço linear real.

⁵⁴Este limite é a derivada direccional da correspondente função em \mathbb{R}^2 no ponto $(x, y) = z$ segundo o vector $(\cos \theta, \sin \theta)$.

⁵⁵Newton, Isaac (1642-1727).

(3.2) Exemplos:

1. As **funções polinomiais** complexas $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ são inteiras, pois são somas de produtos de constantes por potências de expoentes inteiros não negativos, que são funções inteiras. As regras de derivação de operações de funções dão $P'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)c_{k+1}z^k$. Logo, a derivada de uma função polinomial de grau n é uma função polinomial de grau $n-1$.

2. As **funções racionais** $\frac{P(z)}{Q(z)}$, em que P, Q são funções polinomiais e Q não é o polinômio zero, são Holomorfas no resp. domínio, *i.e.* no conjunto de pontos em que o denominador $Q(z)$ não é zero, pois são quocientes de funções inteiras. As derivadas de funções racionais podem ser calculadas com a regra de derivação do quociente de funções e a fórmula de derivação de polinômios do exemplo precedente.

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, com $\Omega \subset \mathbb{C}$, é uma função diferenciável no ponto z_0 , a função definida por

$$(3.3) \quad E(z, z_0) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0}, & \text{se } z \neq z_0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

satisfaz $\lim_{z \rightarrow z_0} E(z, z_0) = 0$ e a função $T_{z_0}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $T_{z_0}(z) = f'(z_0)z$ é uma transformação linear no espaço linear complexo \mathbb{C} . Portanto, da correspondência entre pontos de \mathbb{C} e de \mathbb{R}^2 , a diferenciabilidade de uma função complexa f num ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ corresponde à diferenciabilidade da função $(u, v) = f$ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 no ponto $(x_0, y_0) = z_0$ cuja derivada é uma transformação linear em \mathbb{R}^2 que corresponde a uma transformação linear no espaço linear complexo \mathbb{C} . Designando $(A, B) = f'(z_0)$, é

$$T_{z_0}((x, y)) = (A + iB)(x + iy) = (Ax - BY) + i(Ay + Bx) = (Ax - BY, Ay + Bx).$$

A representação matricial da correspondente transformação linear em \mathbb{R}^2 na base canônica coincide com a matriz jacobiana da função (u, v) em (x_0, y_0)

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix},$$

o que é consistente com a observação em Álgebra Linear das representações matriciais das transformações lineares em \mathbb{R}^2 que correspondem a transformações lineares complexas em \mathbb{C} serem na base canônica de \mathbb{R}^2 as matrizes reais 2×2 com as componentes na diagonal principal iguais e as outras duas componentes simétricas uma da outra.

Ficou provado o resultado seguinte.

(3.4) Equações de Cauchy-Riemann: Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ com $\Omega \subset \mathbb{C}$ é diferenciável em $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ e $f = (u, v)$, em z_0 verificam-se as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

e a derivada de f é dada por qualquer das quatro fórmulas seguintes:

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{def}{=} -i \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

As equações de Cauchy-Riemann estabelecem fortes restrições de interligação das partes real e imaginária de funções complexas diferenciáveis, mas também estabelecem restrições às partes real e imaginária, como se vê nos exemplos seguintes.

(3.5) Exemplos:

1. Se $f = (u, v)$ é uma função Holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ com parte real $u(x, y) = x^2 - xy - y^2$, é $(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = (2x - y, -x - 2y)$, e, das equações de Cauchy-Riemann, é $(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) = (x + 2y, 2x - y)$. Primitivando as duas componentes em relação às variáveis das resp. derivadas parciais dá

$$(v(x, y), v(x, y)) = (\frac{1}{2}x^2 + 2xy + k_1(y), 2xy - \frac{1}{2}y^2 + k_2(x)),$$

e equacionando as duas componentes obtém-se $v(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + c$, com c uma constante real. Logo, a parte imaginária v de uma função Holomorfa numa região com a parte real u dada tem de ser desta a forma.

2. Se $f = (u, v)$ é uma função Holomorfa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ com parte real $u(x, y) = x^2 + y^2$, obtém-se analogamente ao exemplo precedente $(v(x, y), v(x, y)) = (-2xy + k_1(y), 2xy + k_2(x))$ e equacionando as duas componentes $-2xy + k_1(y) = 2xy + k_2(x)$, que é impossível. Portanto, não há funções complexas Holomorfas com parte real $u(x, y) = x^2 + y^2$, ou seja não há funções Holomorfas f com $\mathcal{R}ef(z) = |z|^2$.

A diferenciabilidade de uma função complexa num ponto z_0 corresponde a acréscimos dos valores da função numa vizinhança de z_0 em relação ao valor da função em z_0 serem bem aproximados por uma função linear complexa, no sentido do quociente do desvio de aproximação do valor da função num ponto pelo desvio do ponto a z_0 tender para zero quando o ponto tende para z_0 , o que corresponde geometricamente ao gráfico da função em \mathbb{R}^2 associada à função complexa admitir um plano tangente (não vertical) no ponto correspondente a z_0 , e implica continuidade em pontos de diferenciabilidade.

(3.6) Funções complexas são contínuas em pontos de diferenciabilidade.

Dem. Com $E(z, z_0)$ como na fórmula (3.3) para z numa vizinhança de z_0 , é $f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = (z - z_0)E(z, z_0)$, e $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. *Q.E.D.*

O exemplo seguinte mostra que as equações de Cauchy-Riemann são necessárias, mas não suficientes para diferenciabilidade.

(3.7) Exemplo: Se $f((x, y)) = \sqrt{|xy|}$ para $(x, y) \in \mathbb{C}$ e $f = (u, v)$, é $u(x, 0) = u(0, y) = v(x, y) = 0$, as derivadas parciais de u e v em $z_0 = 0$ são nulas e, portanto, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em z_0 . A razão incremental de f em z_0 , com $z = re^{i\theta}$, em que $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, é

$$\frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta}} = \frac{r \sqrt{|(\cos \theta)(\sin \theta)|}}{re^{i\theta}} = \sqrt{\frac{|\sin(2\theta)|}{2}} e^{-i\theta},$$

cujos valores variam com θ , *e.g.* o valor é 0 para $\theta=0$ e é $\frac{1}{2}(1-i)$ para $\theta=\frac{\pi}{4}$. Logo, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$ não existe, e, portanto, f não é diferenciável em $z_0=0$, embora satisfaça as equações de Cauchy-Riemann.

Sabe-se do estudo de funções em \mathbb{R}^2 que uma condição suficiente para diferenciabilidade de uma função num conjunto aberto não vazio é que as duas componentes reais da função sejam C^1 , *i.e.* as derivadas parciais existam e sejam contínuas. Esta propriedade permite estabelecer condições em que as equações de Cauchy-Riemann são necessárias e suficientes para diferenciabilidade de uma função complexa.

(3.8) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto não vazio e $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções C^1 , a função complexa $f = (u, v)$ é Holomorfa em Ω se e só se as equações de Cauchy-Riemann se verificam em Ω .

Dem. A função (u, v) como função com valores em \mathbb{R}^2 e variável em \mathbb{R}^2 é diferenciável e a derivada é uma transformação linear em \mathbb{R}^2 que corresponde a uma transformação linear no espaço linear complexo \mathbb{C} se e só se a matriz jacobiana tem as componentes na diagonal principal iguais e as outras duas componentes simétricas, que são as equações de Cauchy-Riemann. *Q.E.D.*

(3.9) Equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares

É por vezes útil considerar as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares. Como a relação de coordenadas cartesianas com polares é $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, a mudança para coordenadas polares no domínio de funções $u(x, y), v(x, y)$ pode ser expressa por

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = U(r, \theta), \quad v(x, y) = v(r \cos \theta, r \sin \theta) = V(r, \theta).$$

Com a regra de derivação da função composta obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

As equações de Cauchy-Riemann em coordenadas cartesianas são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{def}{=} A, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{def}{=} B,$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cos \theta - B \sin \theta & -r(A \sin \theta + B \cos \theta) \\ A \sin \theta + B \cos \theta & r(A \cos \theta - B \sin \theta) \end{bmatrix}.$$

Logo, as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares são

$$(3.10) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = r \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -r \frac{\partial V}{\partial r}.$$

(3.11) Exemplos:

1. Considera-se a função complexa $f(z) = e^z$. Com $f = (u, v)$ e $z = (x, y)$, é $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, pelo que $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Estas funções são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em \mathbb{C} . Logo, do resultado precedente, a exponencial complexa é uma função inteira, com derivada

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

A derivada da exponencial é a exponencial, tal como da exponencial real.

2. As funções complexas $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ e $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ são inteiras, pois somas, produtos e composições de funções inteiras são inteiras, e têm derivadas

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= \left(\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\right)' = \frac{1}{2}(i e^{iz} - i e^{-iz}) = -\sin z, \\ (\sin z)' &= \left(\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\right)' = \frac{1}{2i}(i e^{iz} + i e^{-iz}) = \cos z. \end{aligned}$$

Logo, a derivada do cosseno complexo é o simétrico do seno e a derivada do seno complexo é o cosseno, tal como para as correspondentes funções reais.

Como a tangente complexa $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ é um quociente de funções inteiras, é Holomorfa no seu domínio, *i.e.* no conjunto em que o denominador $\cos z$ não se anula, $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. A derivada é

$$(\tan z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z},$$

que também é a fórmula de derivação da tangente real.

3. Obtém-se analogamente que as funções complexas coseno hiperbólico e seno hiperbólico são funções inteiras com derivadas $(\cosh z)' = \sinh z$ e $(\sinh z)' = \cosh z$, e a tangente hiperbólica é Holomorfa no seu domínio, em que tem derivada $(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z}$.

4. Viu-se na secção sobre logaritmos do capítulo precedente que o logaritmo de números complexos pode ser definido por escolhas em infinitos valores, mas podem-se considerar funções dadas por cada Ramo do logaritmo $\log z$, *e.g.* $\log z + i(\text{Arg } z + k2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Cada um destes Ramos do logaritmo complexo está definido em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e é descontínuo no semieixo real negativo, com a parte imaginária a aproximar-se de $(2k+1)\pi$ quando os pontos do domínio se aproximam deste semieixo pelo semiplano complexo superior $\text{Im } z > 0$ e de $(2k-1)\pi$ quando se aproximam pelo semiplano complexo inferior $\text{Im } z < 0$. As partes real e imaginária de cada um destes Ramos são, em coordenadas polares, $z = r e^{i\theta}$ com $\theta \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, resp. $U(r, \theta) = \log r$ e $V(r, \theta) = \theta$. Verifica-se

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 1.$$

Estas funções são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares em $\{(r, \theta) \in [0, +\infty[\times](2k-1)\pi, (2k+1)\pi]\}$, que em

coordenadas cartesianas corresponde a $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x < 0\}$. A continuidade de U e V no conjunto indicado implica a continuidade das partes real e imaginária em coordenadas cartesianas, u, v , de cada Ramo do logaritmo considerado $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x < 0\}$. De (3.8), cada uma destas funções logaritmo é Holomorfa no conjunto referido. A derivada pode ser facilmente calculada com a regra de derivação da função composta, derivando $e^{\log z} = z$, o que dá $e^{\log z}(\log z)' = 1$, pelo que $(\log z)' = \frac{1}{z}$, analogamente à fórmula de derivação do logaritmo real.

5. Também se viu no capítulo precedente que as potências complexas são definidas para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ por $z \mapsto z^w = e^{w \log z}$. Para⁵⁶ $z \notin \mathbb{R}^+$, z^w pode ser escolhido de infinitos valores, tal como $\log z$, e para $z \in \mathbb{R}^+$ convencionou-se tomar para $\log z$ o logaritmo real, o que dá uma única possibilidade para os valores de z^w que corresponde ao valor principal do logaritmo complexo. Cada um dos Ramos do logaritmo complexo considerados no exemplo precedente corresponde a um Ramo da potência complexa z^w e é uma função complexa definida em $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x < 0\}$, tal como o correspondente Ramo de $\log z$. A fórmula $z^w = e^{w \log z}$ dá cada Ramo de $z \mapsto z^w$ como composição de funções Holomorfas no resp. domínio, pelo que também é uma função Holomorfa no resp. domínio. A derivada de cada Ramo de $z \mapsto z^w$ nos pontos de $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x < 0\}$ calcula-se pelas regras da derivação de operações com funções diferenciáveis, obtendo-se

$$(z^w)' = (e^{w \log z})' = e^{w \log z} \frac{w}{z} = wz^{w-1},$$

análoga à fórmula para a derivada da função real potência de base positiva.

Para $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{Q}$ com $w = \frac{p}{q}$ em termos mínimos com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, é $z^{\frac{p}{q}} = z^w = e^{w \log z}$, pelo que as conclusões anteriores também se aplicam neste caso. Para as potências inteiras positivas z^w com $w \in \mathbb{N}$ já se obteve no exemplo (3.1.4) a mesma fórmula de derivação, e para potências inteiras negativas z^w com $-w \in \mathbb{N}$ obtém-se

$$(z^w)' = (z^{-|w|})' = \left(\frac{1}{z^{|w|}}\right)' = -\frac{1}{(z^{|w|})^2} |w| z^{|w|-1} = -|w| z^{-|w|-1} = wz^{w-1},$$

que é a mesma fórmula de derivação obtida para os casos anteriores.

6. As exponenciais complexas de base complexa foram definidas na correspondente secção do capítulo precedente por $w \mapsto z^w = e^{w \log z}$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para cada um dos Ramos do logaritmo, esta função é uma composição de funções inteiras e, portanto, também é inteira. A derivada calcula-se com as regras da derivação de operações de funções diferenciáveis, obtendo-se

$$(z^w)' = (e^{w \log z})' = e^{w \log z} \log z = z^w \log z,$$

a mesma fórmula da derivada de exponenciais reais com bases positivas.

7. Na secção sobre inversas de funções trigonométricas do capítulo precedente obteve-se $\arccos z = \pm i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \pm i \log(z + i\sqrt{1 - z^2})$. Para

⁵⁶ Designa-se $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.

definir uma função correspondente a um Ramo desta relação há que escolher o sinal, escolher um Ramo da raiz quadrada e um Ramo do logaritmo. Pode-se escolher o valor principal do logaritmo, o Ramo da raiz quadrada definido no plano sem o semieixo real negativo e que assume valores de parte imaginária positiva, e o sinal negativo. Para que $1-z^2$ não esteja no semieixo real negativo, excluem-se do domínio os números reais z da união de intervalos $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Se $z+i\sqrt{1-z^2}$ pertence ao semieixo real negativo, como $z-i\sqrt{1-z^2}$ é o seu recíproco, também este pertence ao semieixo real negativo e a soma dos dois $2z$ é um número real negativo. Como o intervalo $]-\infty, -1]$ está excluído, resta verificar que para $z \in]-1, 0[$ é $\sqrt{1-z^2} > 0$ e $z+i\sqrt{1-z^2}$ não é real, para concluir que se pode considerar a função $\arccos z = -i \log(z+i\sqrt{1-z^2})$ definida na região $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ com o valor principal do logaritmo (ver Figura 2.22). Para números reais $z \in [-1, 1]$ o valor desta função é o mesmo da função real \arccos , que tem contradomínio $[0, \pi]$. A função é definida por composições, produtos e somas de funções Holomorfas, pelo que é Holomorfa em Ω . A derivada desta função $\arccos z$ calcula-se facilmente pela regra de derivação de operações com funções diferenciáveis, obtendo-se

$$\begin{aligned} (\arccos z)' &= [-i \log(z+i\sqrt{1-z^2})]' = -i \frac{1}{z+i\sqrt{1-z^2}} \left(1+i \frac{-2z}{2\sqrt{1-z^2}}\right) \\ &= -\frac{i}{z+i\sqrt{1-z^2}} \left(\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}$$

concordante com a fórmula para a correspondente função real.

Para $\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z$ pode-se tomar o Ramo de $\arccos z$ acima considerado. Como é uma diferença de funções Holomorfas em Ω , também é uma função Holomorfa em Ω . Com as regras de derivação de operações de funções complexas obtém-se,

$$(\arcsin z)' = \left[\frac{\pi}{2} - (\arccos z)\right]' = -(\arccos z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

O resultado seguinte dá condições simples para uma função Holomorfa numa região ser constante. Ilustram, mais uma vez, que a existência de derivada de uma função complexa numa região impõe restrições fortes de interligação entre as partes real e imaginária, e os módulo e argumento.

(3.12) *Uma função Holomorfa f numa região de \mathbb{C} é constante se $f' = 0$ ou uma das funções $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$, $\arg f$ é constante.*

Dem. Se a derivada de $f = (u, v)$ é nula numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, as derivadas parciais de u, v são nulas e, portanto, u, v são constantes em todos segmentos de recta paralelos aos eixos coordenados contidos em Ω . Como Ω é um conjunto aberto e conexo, qualquer par dos seus pontos pode ser ligado por uma linha poligonal em Ω com segmentos sucessivos paralelos a um dos eixos coordenados. Logo, u, v e, portanto, também f , são constantes em Ω .

Se $u = \operatorname{Re} f$ (resp., $v = \operatorname{Im} f$) é constante em Ω , então $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (resp., $f' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$) e, do parágrafo precedente, f é constante em Ω .

Se $|f|$ é constante em Ω , também u^2+v^2 é constante em Ω . Derivando em ordem a x e y e com as equações de Cauchy-Riemann obtém-se

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad -u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

O sistema de equações lineares com a 1ª e a última destas equações é equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = 0.$$

O determinante da matriz de coeficientes é $-(u^2+v^2)$. Se u^2+v^2 se anula num ponto, como é constante em Ω anula-se em toda esta região e $f=0$ em Ω . Caso contrário, o sistema tem solução única 0, e $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, pelo que, do penúltimo parágrafo anterior, f é constante em Ω .

Se o argumento de f é constante em Ω , u e v têm valores numa mesma semirecta com extremidade na origem, pelo que ou $u=0$ em Ω e do penúltimo parágrafo anterior f é constante em Ω , ou para algum $c \in \mathbb{R}$ é $v = cu$ e

$$\operatorname{Re}(c+i)f = \operatorname{Re}[(c+i)(u+iv)] = u - cv = 0,$$

e, desse parágrafo, $(c+i)f=0$, e, como $c+i \neq 0$, é $f=0$ em Ω . *Q.E.D.*

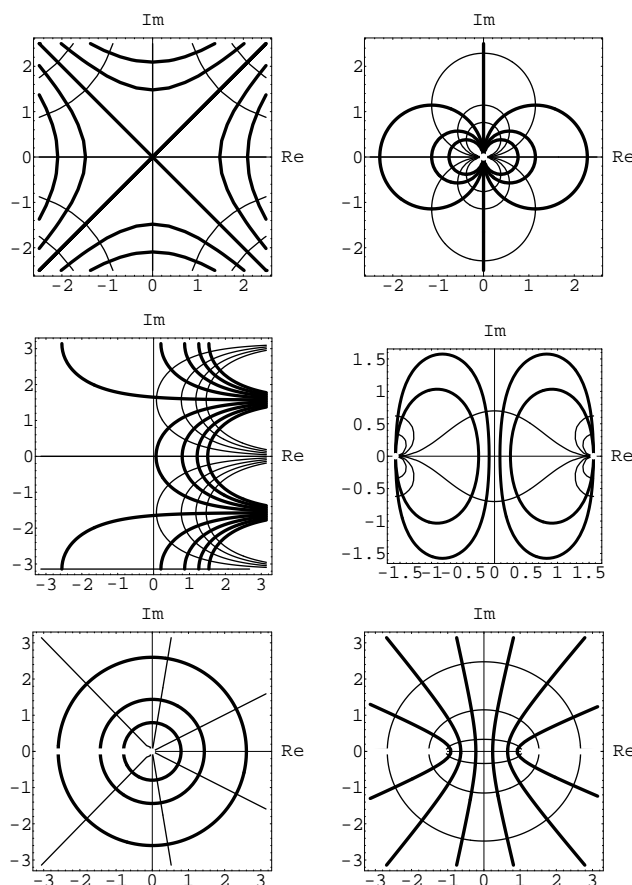


Figura 3.1: Intersecção ortogonal de curvas de nível das partes real (a grosso) e imaginária (a fino) de funções Holomorfas z^2 , $\frac{1}{z}$, e^z , $\tan z$, $\log z$, $\arccos z$

A consequência seguinte das equações de Cauchy-Riemann é muito útil para representação geométrica de funções Holomorfas. Mais uma vez, verifica-se que a diferenciabilidade de uma função complexa num conjunto aberto impõe fortes restrições de interligação das suas partes real e imaginária, neste caso com uma expressão geométrica muito simples.

(3.13) *Curvas de nível das partes real e imaginária de uma função Holomorfa intersectam-se ortogonalmente (Figura 3.1).*

Dem. Se $f = (u, v)$, das equações de Cauchy-Riemann, o produto interno canónico em \mathbb{R}^2 de ∇u , ∇v satisfaz

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Logo, $\nabla u, \nabla v$ são ortogonais, e as curvas de nível de u e v também. *Q.E.D.*

3.3 Transformações conformes

Para analisar como transformações definidas num plano deformam o espaço é útil observar o efeito em curvas dos domínios das transformações.

As noções de curva e caminho em subconjuntos de \mathbb{C} e em \mathbb{R}^2 são análogas. Em particular, um **caminho** em $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma função contínua definida num intervalo de números reais com valores em Ω . Chama-se **curva** γ^* em Ω ao contradomínio de um caminho γ em Ω . Um **caminho regular** é um caminho C^1 com derivada que não se anula. Para um caminho regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, $\gamma'(t) \neq 0$ é um vector tangente à curva γ^* no ponto $\gamma(t)$, para $t \in I$.

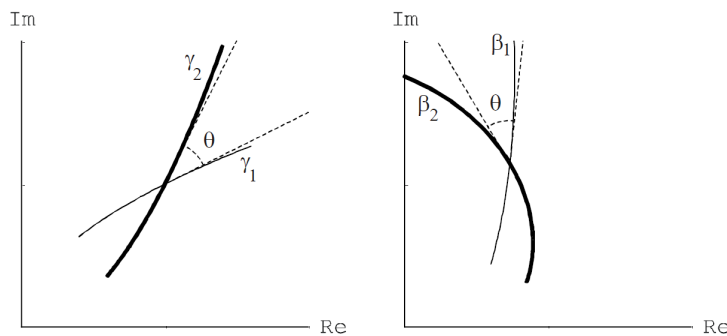


Figura 3.2: Transformação de curvas por uma função Holomorfa

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, $f \in H(\Omega)$ e γ é um caminho regular em Ω , $\beta = f \circ \gamma$ também é um caminho em $f(\Omega)$. A curva β^* correspondente é a imagem da curva γ^* pela função f (Figura 3.2). Da regra de derivação da função composta, $\beta'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$, para $t \in I$. Se f é C^1 , β é um caminho regular se e só se $f'(z) \neq 0$, para $z \in \gamma^*$, e $\arg \beta'(t) = \arg f'(\gamma(t)) + \arg \gamma'(t)$, para $t \in I$ com $f'(\gamma(t)) \neq 0$. Se $t_0 \in I$, $z_0 = \gamma(t_0)$ e $f'(z_0) \neq 0$, o ângulo entre as tangentes dirigidas $\gamma'(t_0)$ e $\beta'(t_0)$ aos caminhos, resp., γ e β nos pontos, resp., $z_0 = \gamma(t_0)$ e $w_0 = f(z_0)$ é igual a $\arg f'(z_0)$. Logo, caminhos regulares

que formam um ângulo θ em z_0 são transformados por f em caminhos que formam o mesmo ângulo θ em w_0 (Figura 3.3). Também é

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|,$$

pele que pequenos segmentos de recta com origem em z_0 são, no limite quando $z \rightarrow z_0$, contraídos ou expandidos na razão $|f'(z_0)|$. Portanto, a mudança de escala no ponto z_0 resultante da transformação f é independente da direcção (Figura 3.3). Quando uma função satisfaz estas duas propriedades diz-se que é uma **Transformação Conforme**.

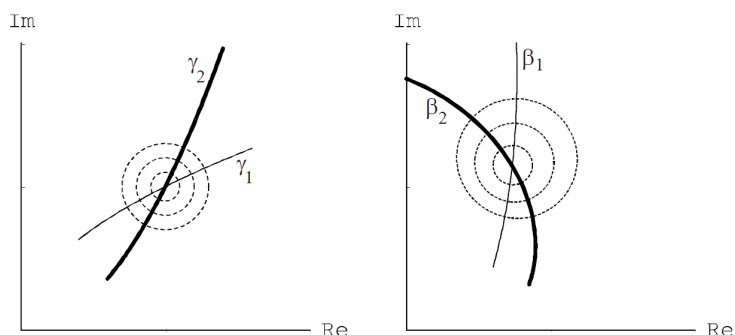


Figura 3.3: Preservação de ângulos e mudança de escala em cada ponto sob transformações definidas por funções Holomorfas

Assim, as funções Holomorfas satisfazem restrições geométricas muito fortes, como já se tinha observado com as curvas de nível das partes real e imaginária de uma função Holomorfa a intersectarem-se ortogonalmente.

Os dois tipos de conformidade para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ num ponto $z_0 \in \Omega$ implicam que $f'(z_0)$ existe: o módulo de $f'(z_0)$ é a razão de contracção ou expansão de pequenos segmentos com origem em z_0 e o argumento é, para cada caminho regular γ que passa em z_0 , a diferença dos argumentos das tangentes dirigidas dos caminhos γ e $\beta = f \circ \gamma$ em, resp., z_0 e $f(z_0)$.

O resultado seguinte dá, sob a hipótese adicional de $f = (u, v)$ ser C^1 numa vizinhança de z_0 como função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , que o 1º tipo de conformidade implica diferenciabilidade de f em z_0 e o 2º tipo de conformidade implica a diferenciabilidade de f ou \bar{f} em z_0 , com derivadas $\neq 0$.

(3.14) Se $B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ com $r > 0$ é um círculo aberto centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que nos pontos $z = (x, y) \in B_r(z_0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas:

1. A preservação dos ângulos entre caminhos regulares em z_0 equivale à existência $f'(z_0) \neq 0$.
2. A existência de uma razão de expansão (ou contracção) de distâncias de pontos a z_0 no limite quando tendem para z_0 equivale à existência de $f'(z_0) \neq 0$ ou $\bar{f}'(z_0) \neq 0$ (no último caso f preserva valores absolutos de ângulos entre caminhos regulares que se intersectam em z_0 mas inverte sentidos).

Dem. Já se provou que a existência de $f'(z_0) \neq 0$ implica a validade das duas condições de conformidade. Como os valores absolutos de complexos conjugados são iguais e os ângulos definidos por complexos conjugados não nulos são iguais em valor absoluto mas de sentidos contrários, a existência de $(\bar{f})'(z_0) \neq 0$ em z_0 também implica a validade das duas condições de conformidade, com inversão de sentidos de ângulos.

De (3.8), a existência de derivada de f (resp., \bar{f}) em z_0 é equivalente à validade das equações de Cauchy-Riemann de f (resp., \bar{f}) em z_0 , pelo que basta mostrar que, separadamente, cada uma das condições de conformidade implica a validade das equações de Cauchy-Riemann em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$ (resp., $(\bar{f})'(z_0) \neq 0$).

Para um caminho regular $z : I \rightarrow B_r(z_0)$, com $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in I$, $z(t) = (x(t), y(t))$ e $w(t) = f(z(t))$, é $x' = \frac{1}{2}(z' + \bar{z}')$, $y' = \frac{1}{2i}(z' - \bar{z}')$, $y' = -i\frac{1}{2}(z' - \bar{z}')$,

$$w' = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) z' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bar{z}'$$

em que as derivadas parciais de f são calculadas em z_0 e as derivadas de x, y, z, w são calculadas em t_0 .

Prova de 1): Se os ângulos entre caminhos regulares em z_0 são preservados,

$$(3.15) \quad \frac{w'}{z'} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\bar{z}'}{z'}$$

deve ser $\neq 0$ e ter argumento independente de z' . Quando z' percorre todos os possíveis valores complexos, o quociente $\frac{\bar{z}'}{z'}$ percorre a circunferência do plano complexo com raio 1 e centro na origem, pelo que os valores de (3.15) percorrem a circunferência com centro em $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ e raio $\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right|$. A única situação em que o argumento permanece constante é com raio nulo, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, que, om $f = (u, v)$, equivale a $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, que são as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, f é diferenciável em z_0 . Como a expressão (3.15) tem de ser $\neq 0$ e o 2º termo no lado direito é zero e $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, resulta de (3.15) que $\frac{w'}{z'} = \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ e, de (3.4), $f' = \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$.

Prova de 2): Se pequenos segmentos de recta com origem em z_0 são, no limite quando os comprimentos tendem para zero, expandidos (ou contraídos) numa razão constante pela transformação f , é $\frac{|w'|}{|z'|} \neq 0$ e independente de z' , pelo que o valor absoluto da expressão (3.15) tem de permanecer constante quando z' percorre todos os possíveis valores complexos. Como os valores assumidos por (3.15) percorrem uma circunferência, os seus módulos só permanecem constantes se o raio da circunferência é nulo ou o centro está na origem. Já se viu que o 1º caso implica a validade das equações de Cauchy-Riemann e, portanto, a diferenciabilidade de f em z_0 . O 2º caso corresponde a $\frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$, ou seja a $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = -i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}$, que implica a validade das equações de Cauchy-Riemann de \bar{f} e, portanto, a diferenciabilidade desta função em z_0 . Como no parágrafo precedente, obtém-se

$$(\bar{f})'(z_0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \neq 0.$$

Q.E.D.

(3.16) **Exemplos:** As funções Holomorfas consideradas em secções anteriores dão exemplos de Transformações Conformes. Consideram-se sem seguida três exemplos específicos mais detalhadamente.

1. *A transformação exponencial*

Considera-se a função exponencial $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, com $z = (x, y)$. Como a exponencial é uma função periódica de período $i2\pi$, cada faixa horizontal do plano complexo com largura 2π é transformada em todo o contradomínio da exponencial, *i.e.* em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

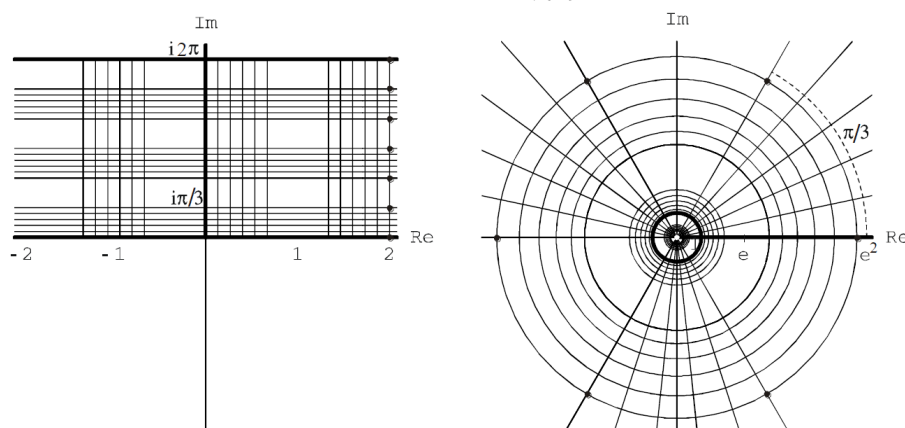


Figura 3.4: Transformação do plano definida pela exponencial complexa

As rectas verticais $x = a$ são transformadas em circunferências com centro na origem e raio e^a (Figura 3.4). Em particular, o eixo imaginário é transformado na circunferência com centro na origem e raio 1, as rectas verticais do semiplano direito em circunferências com raio > 1 e as rectas verticais do semiplano esquerdo em circunferências com raio < 1 .

As rectas horizontais $y = b$ são transformadas em semirectas com extremidade na origem sem a conter que fazem ângulo b com o semieixo real positivo (Figura 3.4).

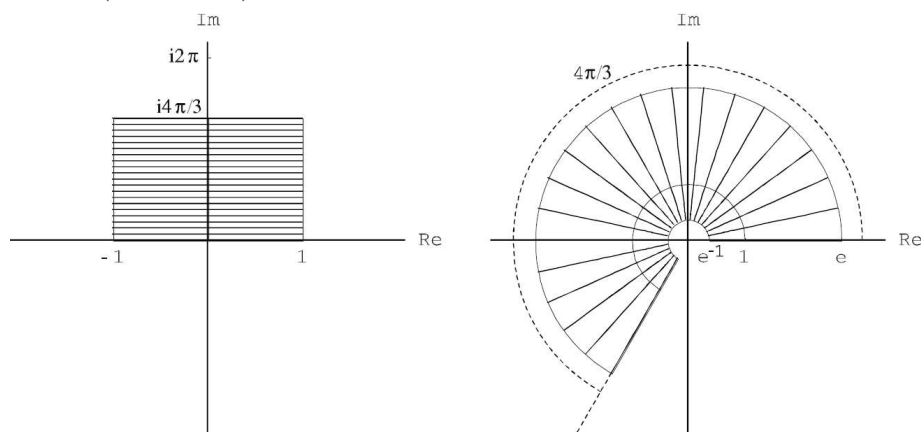


Figura 3.5: Transformação de um rectângulo pela exponencial complexa

Uma vez que as rectas horizontais são ortogonais às rectas verticais, têm imagens que têm de ser curvas ortogonais, pois $(e^z)' = e^z \neq 0$ para $z \in \mathbb{C}$, o que se confirma pelas semirectas que passam pela origem serem ortogonais às circunferências de centro na origem.

A exponencial transforma biunivocamente rectângulos de altura inferior a 2π em sectores de coroas circulares (Figura 3.5). Rectângulos de altura superior a 2π são transformados em coroas circulares não injectivamente.

2. Transformações de Möbius

Chama-se **Transformação de Möbius**⁵⁷ a uma função complexa

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0.$$

O exemplo (2.2) é o caso particular com $a=0, b=c=1, d=-1$. Vê-se em capítulos seguintes que estas transformações desempenham um papel fundamental no esclarecimento da diversidade de Transformações Conformes.

Com as regras de derivação de operações obtém-se

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2},$$

se $cz+d \neq 0$. Logo, se $c \neq 0$, a derivada existe e $f' \neq 0$ em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$; se $c=0$, a derivada existe e $f' \neq 0$ em \mathbb{C} . Portanto, as Transformações de Möbius com $c=0$ são conformes em \mathbb{C} , e com $c \neq 0$ são conformes em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Verifica-se

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \iff czw+dw=az+b \iff z(cw-a) = -dw+b \iff z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

em que

$$cw-a = c \frac{az+b}{cz+d} - a = \frac{caz+cb-acz-ad}{cz+d} = \frac{cb-ad}{cz+d} \neq 0.$$

Portanto, a função f é injectiva e a inversa é

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Como $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$, a inversa de uma Transformação de Möbius também é uma Transformação de Möbius.

É especialmente simples de analisar o caso $a=d=0, b=c=1$, nomeadamente a função recíproco $R(z) = \frac{1}{z}$, que tem domínio e contradomínio iguais a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como $R(e^{i\theta}z) = e^{-i\theta}R(z)$ para $\theta \in \mathbb{R}$, a imagem por R da rotação de um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ de um ângulo θ em torno de 0 é a rotação de ângulo $-\theta$ em torno de 0 da imagem de S por R . Para ver como R transforma rectas ou circunferências, note-se que com $z = (x, y)$ toda recta ou circunferência tem equação cartesiana da forma

$$(3.17) \quad A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Se $A \neq 0$, completando quadrados de somas,

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2},$$

e se também $B^2+C^2-4AD > 0$, (3.17) é uma equação da circunferência com centro $(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A})$ e raio $\frac{\sqrt{B^2+C^2-4AD}}{2|A|}$; conforme B^2+C^2-4AD é < 0 ou 0

⁵⁷Também são chamadas **Transformações Homográficas** ou **Transformações Lineares Fraccionárias**.

(3.17) não tem soluções ou tem como solução só um ponto. Se $A=0$ e B or C não é 0, é uma equação de uma recta. Com as substituições

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z\bar{z}, & x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), & y &= \frac{1}{i2}(z - \bar{z}), \\w &= \frac{1}{z} = u + iv, \\u^2 + v^2 &= w\bar{w}, & u &= \frac{1}{2}(w + \bar{w}), & v &= \frac{1}{i2}(w - \bar{w}),\end{aligned}$$

a equação (3.17) transforma-se sucessivamente em

$$\begin{aligned}Az\bar{z} + \frac{B}{2}(z + \bar{z}) + \frac{C}{i2}(z - \bar{z}) + D &= 0. \\A\frac{1}{w\bar{w}} + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + \frac{C}{i2}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right) + D &= 0. \\A + \frac{B}{2}(\bar{w} + w) + \frac{C}{i2}(\bar{w} - w) + Dw\bar{w} &= 0.\end{aligned}$$

$$(3.18) \quad D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0.$$

A última equação tem a mesma forma de (3.17) com coeficientes diferentes; logo, é uma equação cartesiana de uma recta se $D=0$ e B, C não são ambos 0, ou de uma circunferência se $D \neq 0$ e $B^2 + C^2 - 4AD > 0$. Portanto, as imagens de rectas ou circunferências pela função $R(z) = \frac{1}{z}$ são rectas ou circunferências. Em particular, rectas verticais $x = -D$ ((3.17) com $A = C = 0, B = 1$) são transformadas na recta $u = 0$ se $D = 0$, ou na circunferência $D(u^2 + v^2) + u = 0$ se $D \neq 0$, que, por analogia com (3.17), tem centro em $(-\frac{1}{2D}, 0)$ e raio $\frac{1}{2|D|}$, e, portanto, é tangente ao eixo imaginário (Figure 3.6).

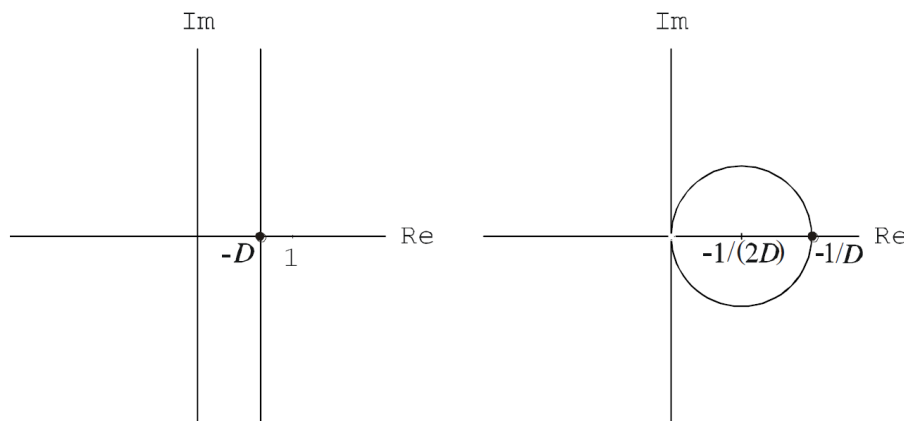


Figura 3.6: Transformação de uma recta vertical por $z \mapsto \frac{1}{z}$

Da análise anterior conclui-se que uma grelha de rectas verticais e horizontais é transformada pela função $R(z) = \frac{1}{z}$ numa grelha de circunferências, que são ortogonais a circunferências com que se intersectam e são tangentes a 0 (0 não é imagem de qualquer ponto) a um dos eixos coordenados e eventualmente pelos próprios eixos coordenados (Figura 3.7).

Para analisar o caso geral, nota-se que se $c \neq 0$, é

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}.$$

Portanto, uma Transformação de Möbius geral com $c \neq 0$ é a composição de três transformações A_1, R, A_2 na forma $A_1 \circ R \circ A_2$, em que:

- $A_1: z \mapsto z_1 = A_1(z) = cz + d$
(homotetia e rotação centradas na origem seguidas de translação),
- $R: z_1 \mapsto z_2 = R(z_1) = \frac{1}{z_1}$ (transformação recíproca analisada acima),
- $A_2: z_2 \mapsto w = A_2(z_2) = \alpha z_2 + \beta$
(homotetia e rotação centradas na origem seguidas de translação),

em que $\alpha = \frac{bc-ad}{c}$ e $\beta = \frac{a}{c}$. As funções A_1 e A_2 são funções afins. Se $c=0$, $f(z) = \frac{a}{d}z + b$ é uma função afim, pelo que é uma homotetia e rotação centrada na origem seguida de translação.

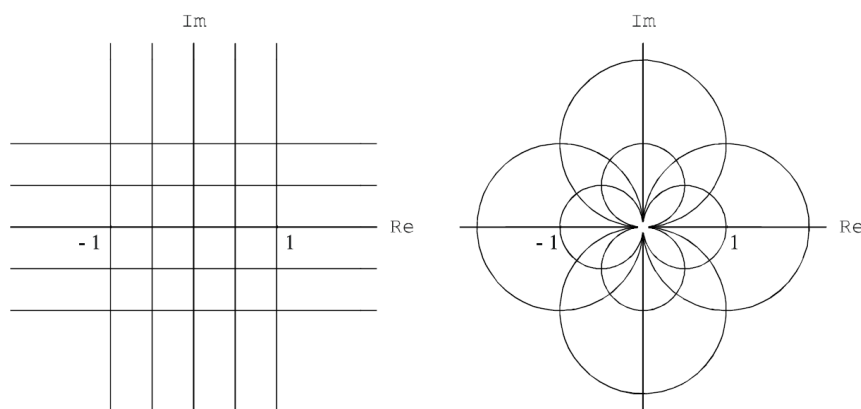


Figura 3.7: Transformação de Möbius $z \mapsto \frac{1}{z}$

3. Transformação de Joukowski

A **transformação de Joukowski**⁵⁸ é a função

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

que tem domínio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. É uma função racional e, portanto, é Holomorfa no domínio. A derivada é $J'(v) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$, que se anula nos pontos ± 1 e apenas nestes pontos, que são pontos fixos de J pois $J(\pm 1) = \pm 1$. Portanto, a transformação de Joukowski é Transformação Conforme na região $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Verifica-se a simetria $J\left(\frac{1}{z}\right) = J(z)$, ou seja a imagem de um ponto $z \neq 0$ coincide com a imagem do seu recíproco $\frac{1}{z}$ e

$$J(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta = \mathcal{R}e e^{i\theta},$$

pelo que a circunferência com raio 1 e centro na origem é transformada no segmento de recta no eixo real entre os números -1 e 1 . Pares de pontos conjugados dessa circunferência são transformados no mesmo ponto do segmento de recta, que é a parte real desses pontos.

A imagem da circunferência de raio $r \neq 1$ obtém-se com $z = re^{i\theta}$ e de

$$(3.19) \quad X + iY = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2} \left(re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \frac{i}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta,$$

⁵⁸Joukowski, Nicolai (1847-1921).

pelo que

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2} = 1.$$

Logo, a circunferência com raio $r \neq 1$ e centro na origem é transformada na elipse com semieixos ao longo do eixo real e do eixo imaginário de comprimentos, resp., $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ e $\frac{1}{2}|r-\frac{1}{r}|$ (Figura 3.8). Portanto, toda região exterior à circunferência com raio 1 e centro na origem é transformada no complementar em \mathbb{C} do segmento de recta no eixo real de extremos nos números ± 1 e o mesmo acontece para o complementar da origem no círculo com raio 1 e centro na origem.

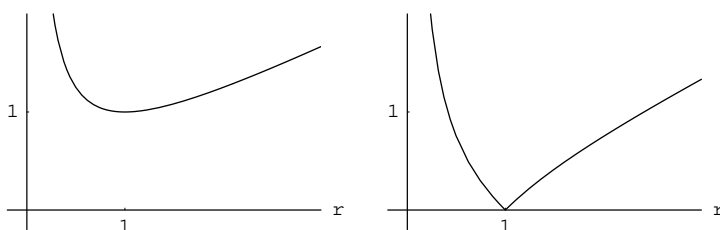


Figura 3.8: Gráficos das funções $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ e $\frac{1}{2}|r-\frac{1}{r}|$

Da fórmula (3.19) também se obtém, para $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos \theta \neq 0$ e $\sin \theta \neq 0$, $\frac{X^2}{\cos^2 \theta} + \frac{Y^2}{\sin^2 \theta} = 1$, pelo que as rectas de declive com valor absoluto $|\tan \theta|$ que passam na origem são transformadas na hipérbole com semieixo real de comprimento $|\cos \theta|$ ao longo do eixo real e eixo transversal de comprimento $|\sin \theta|$ ao longo do eixo imaginário (Figura 3.9). Estas hipérbolas são ortogonais às elipses acima consideradas, pois são imagens de curvas ortogonais por uma Transformação Conforme.

O eixo real (excluindo a origem) é transformado na união das semirectas que se obtém retirando ao eixo real o segmento de recta com extremidades nos números ± 1 , e cada um dos semieixos imaginários $\{iy : y > 0\}$, $\{iy : y < 0\}$ é transformado em todo o eixo imaginário (Figuras 3.9). Os conjuntos $\{iy : y > 1\}$, $\{iy : -1 < y < 0\}$ são transformados no semieixo imaginário $\{iy : y < 0\}$ e os conjuntos $\{iy : 0 < y < 1\}$, $\{iy : y < -1\}$ são transformados no semieixo imaginário positivo.

Com $w = f(z)$, obtém-se

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{z+1/z-2}{z+1/z+2} = \frac{z^2-2z+1}{z^2+2z+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

Como $w \mapsto \frac{w-1}{w+1}$ é uma Transformação de Möbius com inversa $\zeta \mapsto \frac{\zeta+1}{\zeta-1}$, a transformação de Joukowski $w = J(z)$ resulta da composição de três transformações, $w = (M^{-1} \circ Q \circ M)(z)$, em que

$$M : z \mapsto z_1 = \frac{z-1}{z+1}, \quad Q : z_1 \mapsto z_2 = (z_1)^2, \quad M^{-1} : z_2 \mapsto w = \frac{z_2+1}{z_2-1},$$

com M e M^{-1} Transformações de Möbius e Q a função potência de expoente 2. Verifica-se $M \in H(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$, $Q \in H(\mathbb{C})$ e $M^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{1\})$. Como estas transformações são conformes, preservam os ângulos entre curvas regulares em todos os pontos dos seus domínios. Q duplica os argumentos em relação

a $z_1 = 0$, que corresponde ao ponto do domínio $z = M^{-1}(0) = 1$. Com a função recíproco $R(z) = \frac{1}{z}$ obtém-se que a transformação de Joukowski também é a composição $R \circ N \circ Q \circ M^{-1}$, e, como R é uma Transformação de Möbius Holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e conforme no seu domínio, as transformações R, M, M^{-1} preservam os ângulos entre curvas regulares em todos os pontos dos seus domínios e a transformação Q duplica os argumentos em relação a $z_1 = 0$, que corresponde ao ponto do domínio $z = (M^{-1})^{-1}(0) = M(0) = -1$. Portanto, a transformação de Joukowski duplica os argumentos em relação a qualquer dos pontos $z = \pm 1$.

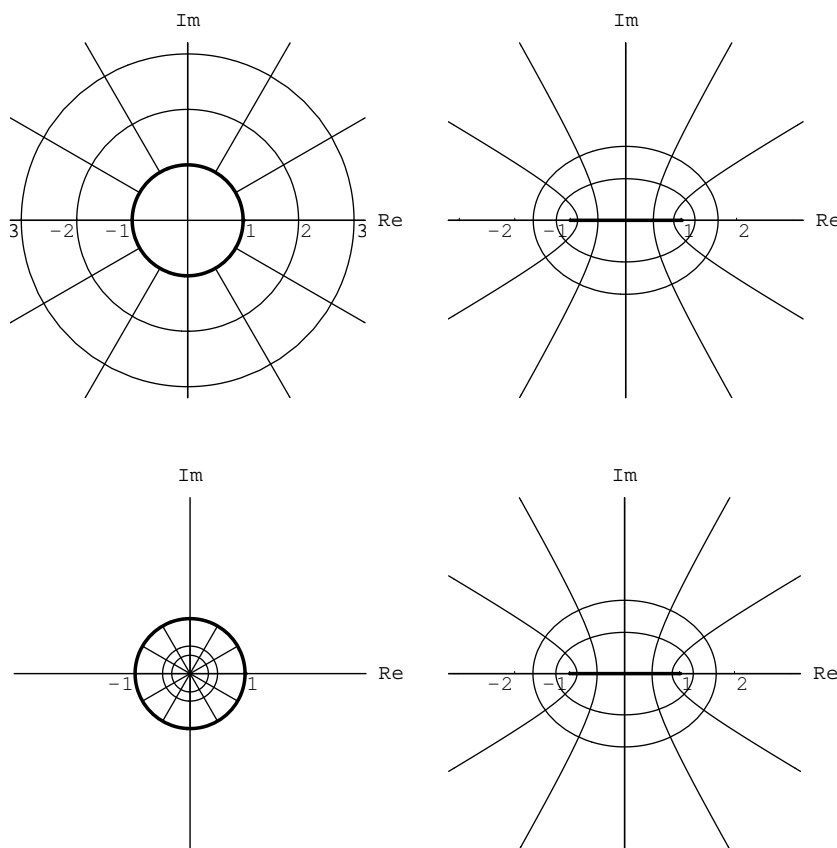


Figura 3.9: Transformação de Joukowski

Qualquer circunferência S que passa nos pontos ± 1 tem centro num ponto ia do eixo imaginário e raio $\sqrt{1+a^2}$, com $a \geq 1$. A imagem do arco de S contido no semiplano complexo inferior pela transformação R é um arco de circunferência que passa nos pontos ± 1 incluída no semiplano complexo superior, ou seja é o arco da circunferência S incluído no semiplano complexo superior. Como $J \circ R = J$, a imagem do arco de S no semiplano complexo inferior coincide com a do arco de S no semiplano complexo superior. Esta imagem é um arco de uma circunferência C que passa nos pontos ± 1 . Designando por $\alpha > 0$ o ângulo da tangente a S no ponto $+1$

com a semirecta com origem neste ponto contida no semieixo real positivo (Figura 3.10), obtém-se que a transformação de Joukovski J é uma função bijectiva conforme do interior do círculo delimitado por S para $U = \mathbb{C} \setminus C$ e o arco de circunferência C faz um ângulo 2α com a semirecta de origem neste ponto contida no semieixo real positivo. Também se obtém que J é uma função bijectiva conforme do exterior desse círculo para U . A transformação de Joukovski transforma a região delimitada pela circunferência S e por uma outra qualquer circunferência tangente a S no ponto 1 numa região semelhante ao perfil clássico da asa de um avião planador (Figura 3.10).

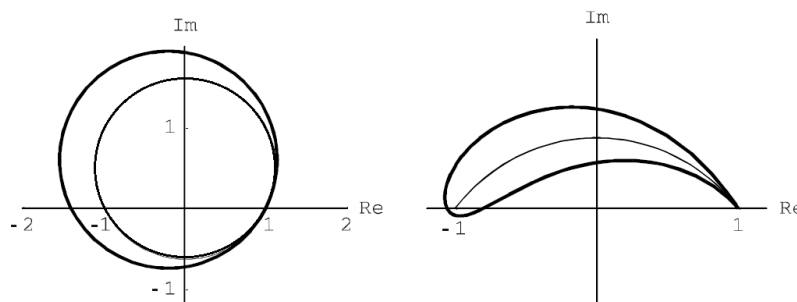


Figura 3.10: Transformação de Joukovski da região delimitada por duas circunferências tangentes em 1, com uma delas a passar no ponto -1

Os exemplos precedentes mostram que as propriedades de conformidade podem ser úteis para obter o traçado das imagens de certas curvas do plano complexo que resultam da aplicação de uma função Holomorfa. Pode-se assim ter uma ideia geométrica de como a função deforma regiões do plano.

O estudo de Transformações Conformes tem grande interesse tanto de um ponto de vista matemático como para aplicações em diversas outras áreas. Por exemplo, com início em 1939 as foram usadas Transformações de Möbius em electrotecnia e linhas de transmissão em comunicações no estudo de variações de impedância de circuitos quando certos componentes do circuito são variam, através do diagrama de Smith⁵⁹, e a transformação de Joukovski foi usada em 1906 para calcular a força de sustentação de um perfil de asa de avião e foi a base do 1º método de cálculo da aerodinâmica de asas de aviões, directamente ou com outras funções com propriedades semelhantes adaptadas a outros perfis de asas. Este último exemplo é um caso particular da utilidade mais geral útil para resolução de certas equações diferenciais parciais, nomeadamente no âmbito de hidrodinâmica, aerodinâmica, elasticidade, electroestática, entre outras áreas. Em certos casos de interesse prático é possível resolver com relativa facilidade uma dada equação diferencial numa região adequada, como por exemplo um rectângulo ou um círculo, e com Transformações Conformes apropriadas obter soluções da equação diferencial noutras regiões por simples mudanças de variáveis.

⁵⁹Em inglês diz-se *Smith chart*. Foi introduzidos em 1939 por Philip Smith (1905–1987) para cálculo de linhas de transmissão e melhorado em 1944. Os diagramas de Smith em papel ou plástico foram substituídos por software digital, mas o diagrama de Smith ainda é a apresentação gráfica mais utilizada para resultados de cálculo computacional para circuitos de Radio-Frequência.

Exercícios

- 3.1 Determine o conjunto em que a função complexa dada é diferenciável:
 a) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + i2y(x-1)$. b) $f(x, y) = e^{y+ix}$.
 c) $f(x, y) = x^2y^2 + i2x^2y^2$.
- 3.2 Determine os polinômios de duas variáveis com todos os termos de grau 4 sem monômios proporcionais a x^2y^2 que adicionados à parte real e à parte imaginária da função em 3.1.c) dão uma função inteira.
- 3.3 Determine a função inteira $f = (u, v)$ tal que $v(x+iy) = 3x^2y - y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 1$.
- 3.4 Mostre que a função f tal que $f(z) = e^{-\frac{1}{z^4}}$ para $z \neq 0$ e $f(0) = 0$ satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em \mathbb{C} e não é diferenciável em 0.
- 3.5 Mostre que $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ prolongada por continuidade a 0 é uma função contínua em \mathbb{C} que satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em 0 e não é diferenciável em 0.
- 3.6 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto. Prove: $f \in H(\Omega)$ se e só se $g \in H(\Omega)$ com $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$.
- 3.7 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ com $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto aberto. Prove: f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann se e só se a função $F(z, \bar{z}) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{i2}\right)$ satisfaz $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$.
- 3.8 Defina uma função numa região apropriada que seja a soma de raízes quadradas de $1+z$ e $1-z$, com z complexo, procurando uma região tão grande quanto possível. Determine o conjunto em que a função é Holomorfa.
- 3.9 Resolva o exercício precedente para uma composição de dois logaritmos complexos.
- 3.10 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região e $f \in H(\Omega)$ tal que $|f^2 - 1| < 1$ em Ω . Mostre que $\operatorname{Re} f > 0$ ou $\operatorname{Re} f < 0$ em Ω .
- 3.11 Prove o **Truque de Herglotz**⁶⁰: toda função $f \in H(B_R(0)) \subset \mathbb{C}$ para algum $R > 1$ que satisfaz a **fórmula de duplicação** $2f(2z) = f(z) + f(z + \frac{1}{2})$, para todo $z, z + \frac{1}{2}, 2z \in B_r(0)$, é constante. .
 (Sugestão: Obtenha $4 \max_B |f'| \leq 2 \max_B |f'|$ para $B = \text{cl } B_r(0)$ com $0 < r < R$).
- 3.12 Prove: Se f é uma função ímpar (i.e. $f(-z) = -f(z)$) Holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ com $(z-p)f(z)$ Holomorfa numa vizinhança de cada $p \in \mathbb{Z}$ que satisfaz a fórmula de duplicação do exercício precedente em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, então $f(z) = \pi \cot(\pi z)$.
 (Sugestão: Comece por obter $\tan z = \cot z - 2 \cot(2z)$ e $\tan(\pi z) = \cot(z + \frac{1}{2})$).
- 3.13 Diz-se que uma função com valores reais ou complexos f é **Harmônica** num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se satisfaz a **equação de Laplace** em cada ponto $(x, y) \in \Omega$, i.e. $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
 a) Determine as funções polinomiais de duas variáveis reais com todos os termos de grau 3 que são funções Harmônicas em \mathbb{C} .
 b) Prove: u é Harmônica em Ω se e só se $v(z) = u(\bar{z})$ é Harmônica em Ω .
 c) Prove: As partes real e imaginária de uma função Holomorfa com derivada contínua num conjunto aberto são Harmônicas nesse conjunto.
 d) Prove: Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é C^2 , f é Harmônica se e só se $\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$, com F a função definida como no exercício 3.7.
- 3.14 Mostre que se $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ estão situados do mesmo lado de uma recta que passa na origem, então $\sum_{k=1}^n z_k \neq 0$, e se $\sum_{k=1}^n (z_k)^{-1} = 0$, então os pontos não podem estar situados do mesmo lado de uma recta que passa na origem.
- 3.15 Prove: Todos os zeros da derivada de uma função polinomial $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ pertencem ao **invólucro convexo** dos zeros dessa função polinomial, i.e. ao menor

⁶⁰Em inglês diz-se *Herglotz Trick*. Gustav Herglotz (1881-1953) incluía-o nas suas lições, mas não o publicou. Apareceu publicado em 1950 na 1ª edição do livro de C. Carathéodory referido na bibliografia final. Anteriormente, tinha sido incluído em notas de lições sobre funções complexas de várias variáveis de Solomon Bochner (1899-1982) de 1936. Foi usado em 1964 por Emil Artin (1898-1962) para a Função Gama.

conjunto convexo⁶¹ que os contém (que é um polígono convexo em que os vértices são zeros da função polinomial).

- 3.16 Prove que $z \mapsto \bar{z}$ não é Transformação de Möbius.
- 3.17 Prove: A **Transformação de Cayley**⁶² $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ é um difeomorfismo complexo do semiplano superior complexo $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ no círculo $B_1(0)$ com inversa $\phi^{-1}: B_1(0) \rightarrow H$ tal que $\phi^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w}$.
- 3.18 Determine uma Transformação de Möbius que transforma os pontos $0, i, -i$, nos pontos, resp., $1, -1, 0$.
- 3.19 Determine uma Transformação Conforme que transforma a intersecção dos círculos do plano complexo $|z| < 1$ e $|z-1| < 1$ no círculo $|z| < 1$.
- 3.20 Determine uma Transformação Conforme que transforma a região entre as circunferências do plano complexo $|z|=1$ e $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ no semiplano $\text{Im } z > 0$.
- 3.21 a) Prove: Uma Transformação de Möbius tem 0 e ∞ como únicos pontos fixos se e só se é uma expansão uniforme.
b) Prove: Uma Transformação de Möbius tem ∞ como único ponto fixo se e só se é uma translação.
- 3.22 Prove: Uma Transformação de Möbius comuta com uma Transformação de Möbius T diferente da identidade se tem os mesmos pontos fixos de T .
- 3.23 Identifique as Transformações de Möbius correspondentes a rotações da Superfície Esférica de Riemann (ver exercício 1.16) em torno de diâmetros.
- 3.24 Prove: Para cada par ordenado de ternos (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) de pontos distintos de \mathbb{C} existe uma e só uma Transformação de Möbius que transforma cada z_k em w_k , para $k=1, 2, 3$. (Sugestão: Comece por provar para $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$).

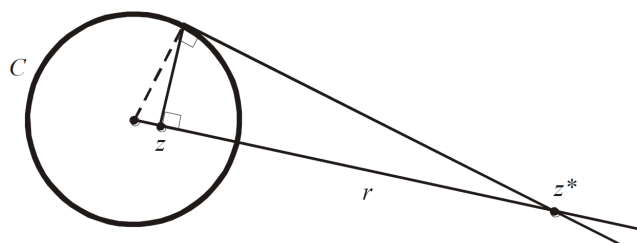


Figura 3.11: Geometria de pontos simétricos em relação a circunferência

- 3.25 **Pontos $z, z^* \in \mathbb{C}$ são simétricos em relação a uma circunferência C** se são colineares com o centro de C e o produto das distâncias dos pontos ao centro de C é igual ao quadrado do raio. Chama-se **simetria em relação a C** à função que transforma cada ponto z no seu simétrico z^* em relação à circunferência C .
- a) Prove: $z, z^* \in \mathbb{C}$ são pontos simétricos em relação a uma circunferência C se e só se toda circunferência que passa nos dois pontos é ortogonal a C .
- b) Mostre que é válida a seguinte construção geométrica simples: o simétrico z^* de um ponto z do interior do círculo delimitado por C em relação à circunferência C é a intersecção da recta r que passa em z e no centro de C com a tangente a C no ponto de intersecção de C com a recta perpendicular a r que passa por z (Figura 3.11); vice versa, o simétrico z de um ponto z^* no exterior do círculo delimitado por C em relação a C é a intersecção da recta r que passa por z^* e pelo centro de C com a perpendicular à recta que passa no ponto de tangência a C de uma recta que passa por z^* ; o simétrico de cada ponto de C é esse próprio ponto.

⁶¹Diz-se que $S \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto convexo** se todos os segmentos de recta com extremidades em S estão totalmente contidos em S .

⁶²Cayley, A. (1821-1895).

c) Prove: *As Transformações de Möbius transformam pontos simétricos em relação a uma circunferência ou a uma recta em pontos simétricos em relação à imagem da circunferência ou recta (propriedade de conservação da simetria).*

**Exercícios com aplicações a hidrodinâmica,
electroestática e propagação de calor em equilíbrio**

3.26 Considera-se um escoamento hidrodinâmico plano estacionário, ou seja tal que o campo de velocidades (u, v) do fluido não varia com o tempo, está definido numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ e é constante em pontos numa mesma recta perpendicular ao plano complexo. Supõe-se que o campo de velocidades é C^1 e é **lamelar** ou **irrotacional**, i.e. $\text{rot}(u, v, 0) = (0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$, e **solenoidal**, i.e. $\text{div}(u, v, 0) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. A 1ª condição corresponde à circulação do campo de velocidades em caminhos fechados que delimitam subconjuntos de Ω ser zero (não há vórtices totalmente contidos em Ω) e a 2ª condição corresponde a um princípio de conservação (há conservação de massa e o fluido é incompressível). Se Ω é uma região simplesmente conexa, existem campos escalares **potenciais** φ e ψ tais que $(u, v) = \nabla\varphi$ e $(-v, u) = \nabla\psi$; chama-se **potencial do campo de velocidades** à função φ . Numa curva de nível $\psi(x, y) = c$ de ψ , em que $u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0$, fica definida implicitamente y em função de x de tal modo que $\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$, pelo que $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{u} \frac{dx}{dt}(u, v)$ e, portanto, a curva de nível é uma **linha de corrente** ou **linha de fluxo**, razão por que se chama a ψ **função de corrente** ou **função de fluxo**. Chama-se **potencial complexo** do campo de velocidades à função complexa $f = (\varphi, \psi)$.

Observação: Um campo electrostático num conjunto sem cargas eléctricas também é irrotacional e solenoidal, pelo que a cada situação de um escoamento hidrodinâmico plano estacionário com campo de velocidades irrotacional e solenoidal corresponde uma situação análoga em electroestática plana num conjunto sem cargas eléctricas e vice-versa. É análogo em propagação do calor em equilíbrio, substituindo o potencial do campo de velocidades por temperatura e as linhas de fluxo do fluido por linhas de fluxo de calor.

a) Prove: *Uma função complexa f definida e C^1 em Ω é o potencial complexo de um campo irrotacional e solenoidal se e só se $f \in H(\Omega)$.*

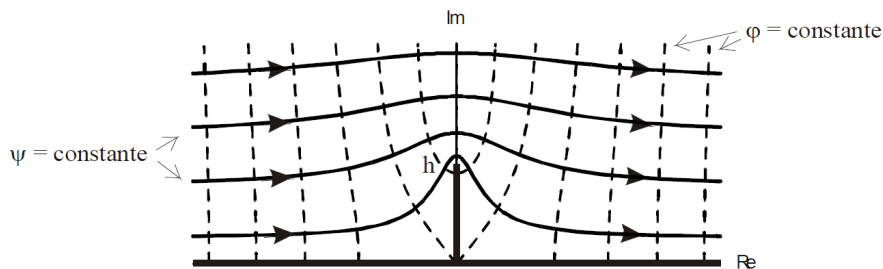


Figura 3.12: Escoamento sobre um leito plano com um obstáculo vertical

b) Determine o potencial complexo, as linhas de corrente e a velocidade de um escoamento plano de profundidade infinita sobre um leito plano com um obstáculo vertical de altura h perpendicular ao leito e velocidade no infinito perpendicular ao plano do obstáculo e com magnitude 1 (Figura 3.12).

Observação: Este potencial também determina o campo eléctrico na mesma região se a fronteira é um isolador eléctrico perfeito e a intensidade do campo eléctrico no infinito é perpendicular ao plano da barra condutora na vertical e tem magnitude 1. Neste caso, o potencial φ é o simétrico do potencial eléctrico e as linhas de corrente são as linhas de fluxo do campo eléctrico. Por outro lado, o campo eléctrico na mesma região com intensidade no infinito igual a 1, mas com fronteira que é um condutor perfeito, tem potencial proporcional à função de corrente ψ e as linhas de fluxo do correspondente campo eléctrico são as linhas de nível do potencial φ do campo de velocidades.

(Sugestão: Considere o escoamento no semiplano superior complexo e o obstáculo como um segmento de recta vertical no eixo imaginário de comprimento h a partir da origem. Determine uma Transformação Conforme do domínio no semiplano superior. Mostre que as linhas de fluxo satisfazem $y = \psi_0 \left(1 + \frac{h^2}{x^2 + (\psi_0)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$).

3.27 Considere $f(z) = \arccos z$ como potencial complexo (ver exercício anterior) em electrostática, mostre que as linhas equipotenciais e as linhas de corrente são as representadas na Figura 3.13 e descreva como este potencial permite obter cada um dos campos eléctricos seguintes:

1. Exterior a um condutor cilíndrico de secção ortogonal elíptica carregado, inclusivamente no caso limite de uma fita condutora;
2. Entre duas superfícies condutoras cilíndricas com secções ortogonais elípticas confocais, ou entre uma destas superfícies e a fita condutora de secção igual ao segmento entre os focos;
3. Entre folhas conexas de duas superfícies condutoras cilíndricas com secções ortogonais hiperbólicas confocais, ou entre uma destas e um semiplano condutor com aresta a passar pelo foco e pertencente ao plano de simetria da superfície cilíndrica;
4. Entre dois semiplanos condutores coplanares de arestas separadas paralelas;
5. Entre um plano e um semiplano ortogonal de aresta paralela ao plano e não o intersectando.

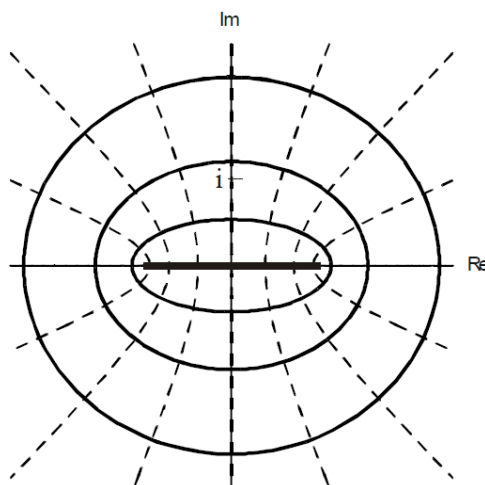


Figura 3.13: Linhas de nível das partes real e imaginária de $f(z) = \arccos z$

Capítulo 4

Integral

4.1 Introdução

Uma 1ª referência a integral de função complexa e a algumas das suas aplicações aparece num trabalho de L. Euler apresentado na Academia das Ciências de S. Petersburgo em 1777. A noção não era rigorosa nem era mencionado que o integral é sobre caminhos no plano complexo, pois ainda não se conhecia a identificação dos números complexos com pontos de um plano.

A 1ª referência a uma noção de integrais de funções complexas sobre caminhos com preocupação de rigor aparece numa carta de C.F. Gauss a F.W. Bessel em 1811, que também menciona um resultado de independência do integral em caminhos de integração com as mesmas extremidades, equivalente ao Teorema de Cauchy. Estes resultados nunca foram publicados, mas C.F. Gauss usou integrais complexos em 1816 num dos seus artigos com o objectivo de provar o Teorema Fundamental da Álgebra.

A 1ª publicação com integrações de funções complexas foi de S.D. Poisson⁶³ em 1813.

Em 1814 A.-L. Cauchy apresentou na Academia das Ciências de Paris uma memória que referia integrais de funções complexas analogamente a L. Euler em 1777, que só foi publicada em 1825 com uma nota adicionada por A.-L. Cauchy em 1822 mencionando que os integrais sobre a fronteira de um rectângulo de lados paralelos aos eixos coordenados são nulos para funções complexas continuamente diferenciáveis no fecho do rectângulo. Este resultado, que pode ser obtido do Teorema de Green⁶⁴ para funções reais definidas em subconjuntos de \mathbb{R}^2 , é um caso particular do Teorema de Cauchy, embora com a hipótese excessivamente forte de continuidade das derivadas da função integranda.

A definição rigorosa de integral, mesmo de funções reais contínuas num intervalo limitado e fechado, só apareceu em 1823, também por A.-L. Cauchy. Em 1854, B. Riemann estendeu a noção de integral a funções reais limita-

⁶³Poisson, Siméon Denis (1781-1840).

⁶⁴A 1ª afirmação e utilização do Teorema de Green, embora sem prova, foi em 1846 por A.-L. Cauchy e no contexto de Análise Complexa. Green, George (1793-1841).

das num intervalo limitado de números reais sem exigir continuidade e, em 1902, H. Lebesgue estendeu a noção de integral de funções reais na tese de doutoramento que apresentou com o título *Intégrale, Longueur, Aire*.

O Teorema de Cauchy estabelece que integrais em caminhos fechados num conjunto em que a função integranda é Holomorfa são zero, sob certas condições topológicas ou geométricas relativas ao conjunto e aos caminhos considerados. Esta propriedade equivale a igualdade dos integrais em caminhos no conjunto com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final. Portanto, a validade do Teorema de Cauchy num conjunto equivale à invariância do integral em classes de caminhos com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final obtidos por deformações contínuas possíveis sem deixar o conjunto, logo à propriedade referida na carta de C.F. Gauss a F.W. Bessel acima mencionada. Esta é a propriedade que A.-L. Cauchy considera para caminhos bem mais gerais do que fronteiras de retângulos na *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, também publicada em 1825, ainda com a hipótese de continuidade das derivadas das funções integrandas. O mesmo trabalho inclui uma definição rigorosa de integrais complexos que, embora correspondam aos integrais sobre caminhos, são aí definidos sem qualquer referência geométrica e considerados relativamente a funções auxiliares que se viu forçado a introduzir para tornar consistente a definição. Parece claro que A.-L. Cauchy desconhecia na altura a identificação dos números complexos com pontos de um plano, que, embora tivesse aparecido em 1799 num trabalho de C. Wessel e esteja implícita na tese de doutoramento de C.F. Gauss do mesmo ano, e aparecesse em 1806 em publicações de J.-R. Argand e A.-Q. Buée, só ficou amplamente conhecida após disseminação de um artigo de C.F. Gauss publicado em 1831.

Em 1900 E. Goursat provou uma versão do Teorema de Cauchy sem a hipótese de continuidade da derivada da função e abriu o caminho para estabelecer que funções Holomorfas num conjunto aberto são indefinidamente diferenciáveis. Outra consequência interessante é que a existência de primitiva de uma função complexa contínua num conjunto aberto implica que a função é Holomorfa e, portanto, indefinidamente continuamente diferenciável no conjunto. Estas propriedades contrastam com as de funções de variáveis reais.

Neste capítulo estabelece-se uma versão do Teorema de Cauchy em conjuntos convexos e no capítulo 7 uma versão global. Do Teorema de Cauchy decorre a Fórmula de Cauchy, que dá os valores de uma função Holomorfa num conjunto de pontos fora de uma curva fechada por integrais que só envolvem os valores da função sobre a curva. Para circunferências, esta fórmula foi obtida em 1831 pelo próprio A.-L. Cauchy numa memória dedicada a Mecânica Celeste. Uma consequência da Fórmula de Cauchy é a Propriedade de Valor Médio de funções Holomorfas que estabelece que o valor de uma função no centro de um círculo fechado em que é Holomorfa é a média dos

valores que tem na fronteira do círculo. Esta propriedade apareceu em 1823 numa publicação de S.D. Poisson.

A Fórmula de Cauchy envolve a consideração do sentido e do nº de voltas de um caminho em torno de um ponto, o que é expresso pela noção de Índice, ou Número de Rotação, introduzida por L. Kronecker em 1869 e redescoberta mais tarde por H. Poincaré. Este Índice é invariante sob deformações contínuas do caminho na região complementar ao ponto considerado, ideia tornada rigorosa com a noção de Homotopia de caminhos por C. Jordan em 1866, embora tivesse sido implicitamente usada antes por vários autores em Cálculo de Variações (em que foi introduzida em 1761 por J.L. Lagrange) e mais tarde em integração complexa, e foi depois desenvolvida por H. Poincaré e veio a constituir um dos elementos de base da Topologia Algébrica⁶⁵.

4.2 Integral em caminho

As noções de caminho em \mathbb{C} e em \mathbb{R}^2 são idênticas, pelo que há apenas que clarificar e relembrar a terminologia e a notação adoptadas. Como para subconjuntos de \mathbb{R}^2 um **caminho** em $S \subset \mathbb{C}$ é uma função contínua γ de um intervalo de \mathbb{R} em S . Uma **curva** em S é o contradomínio γ^* de um caminho γ em S . Diz-se que γ representa ou percorre a curva γ^* e que esta curva corresponde ao caminho γ . Neste livro consideram-se os caminhos definidos em intervalos limitados e fechados de \mathbb{R} e as correspondentes curvas.

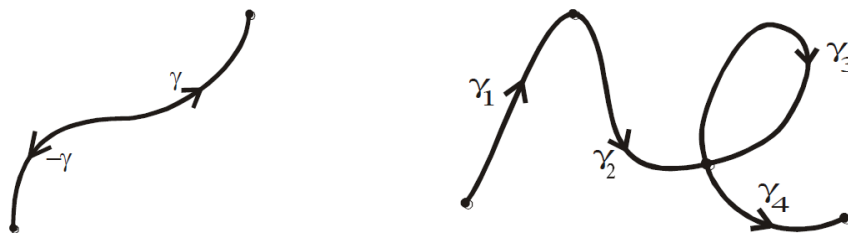


Figura 4.1: Simétrico de caminho e concatenação de caminhos

O **simétrico de um caminho** $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $(-\gamma)(t) = \gamma(b - (t - a))$, que é um caminho que representa a mesma curva em sentido contrário (Figura 4.1 à esquerda). Chama-se **concatenação dos caminhos** $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, cada um com com ponto final igual ao ponto inicial do seguinte, ao caminho que percorre sucessivamente as curvas correspondentes pela ordem indicada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, com $t_0 = a$, $t_j = a + \sum_{k=1}^j (b_k - a_k)$, $b = t_n$ e a restrição de γ a cada intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ igual ao caminho $t \mapsto \gamma_j(t - t_{j-1} + a_j)$ para $j = 1, \dots, n$, que se designa $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ (Figura 4.1 à direita).

Chama-se **caminho regular** a um caminho C^1 com derivada $\neq 0$ em todos os pontos. Diz-se que um caminho é **seccionalmente regular** se existe uma partição finita do domínio em subintervalos tal que a restrição a cada um dos fechos dos subintervalos é um caminho regular.

⁶⁵ Leopold Kronecker (1823-1891). Jordan, Camille (1838-1922).

Um **caminho fechado** é um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\gamma(a) = \gamma(b)$ (Figura 4.2 à esquerda).

Diz-se que um caminho que não é fechado é um **caminho simples** se é uma função injectiva e diz-se que um caminho fechado γ é um caminho simples se é uma função injectiva no intervalo semifechado obtido excluindo um dos extremos do intervalo do domínio de γ . A um caminho fechado simples chama-se **caminho de Jordan** e diz-se que a curva correspondente é uma **curva de Jordan** (Figura 4.2 à direita).



Figura 4.2: Caminhos fechados e curva de Jordan

Um **caminho poligonal** é uma concatenação $\pi = \pi_1 + \dots + \pi_n$ de um número finito de caminhos regulares simples que descrevem segmentos de recta. O comprimento de um caminho poligonal π é a soma dos comprimentos dos segmentos de recta que o compõem, ou seja se os domínios dos caminhos π_k são os intervalos $[a_k, b_k]$ para $k = 1, \dots, n$, o comprimento de π é $\sum_{k=1}^n \|\pi_k(b_k) - \pi_k(a_k)\|$. Um **caminho poligonal inscrito num caminho** γ é um caminho poligonal $\pi = \pi_1 + \dots + \pi_n$ tal que as extremidades dos caminhos regulares simples π_k que descrevem segmentos de recta, consideradas na ordem $k = 1, \dots, n$, são pontos da curva γ^* ordenados de acordo com o sentido de percurso do caminho γ (Figura 4.3).

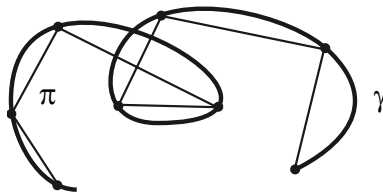


Figura 4.3: Caminho poligonal inscrito num caminho

Chama-se **caminho rectificável** a um caminho γ tal que o conjunto dos comprimentos de todos os caminhos poligonais inscritos no caminho é majorado e ao supremo deste conjunto chama-se **comprimento do caminho**⁶⁶, que se designa L_γ . Um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ seccionalmente regular é rectificável e o seu comprimento é $L_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$, mas há caminhos rectificáveis que não são seccionalmente regulares.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho, γ^* é a curva correspondente e f é uma função complexa definida em γ^* , define-se o **integral de f no caminho** γ

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im}[f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt,$$

⁶⁶Esta noção foi adoptada em 1866, por Jean Marie Duhamel (1797-1872) na sequência de uma definição semelhante em 1833 de Enno Heeren Dirksen (1788-1850).

quando os integrais das funções reais no lado direito da fórmula existem⁶⁷. Com $(X(t), Y(t)) = \gamma(t)$ e $(u, v) = f$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(X(t), Y(t)) + i v(X(t), Y(t))] [X'(t) + i Y'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(X(t), Y(t)) X'(t) - v(X(t), Y(t)) Y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [v(X(t), Y(t)) X'(t) + u(X(t), Y(t)) Y'(t)] dt. \end{aligned}$$

Portanto, o integral tem partes real e imaginária dadas por integrais de linha em \mathbb{R}^2 calculados sobre o caminho $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (X(t), Y(t))$,

$$(4.1) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int u dx - v dy + i \int v dx + u dy = \int (u, -v) \cdot d\alpha + i \int (v, u) \cdot d\alpha.$$

Como para caminhos em \mathbb{R}^2 , dois caminhos em \mathbb{C} , $\gamma_j: [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$, para $j = 1, 2$, dizem-se **equivalentes** se diferem apenas por uma reparametrização que preserva o sentido, *i.e.* se existe uma bijecção C^1 $\varphi: [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ com $\varphi' > 0$ em todos os pontos, tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Em consequência do teorema de mudança de variáveis de integração para integrais de funções reais de variável real, *Os integrais de funções complexas são invariantes sob reparametrizações, i.e. os integrais sobre caminhos equivalentes são iguais.*

Obtém-se propriedades gerais destes integrais a partir das propriedades de integrais de funções reais de variável real, mas convém chamar a atenção para as quatro propriedades seguintes:

1) *Linearidade do integral*

$$\int_{\gamma} (c_1 f_1 + c_2 f_2)(z) dz = c_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + c_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

2) *Simetria do integral de caminhos simétricos*

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

3) *Aditividade do integral em relação à concatenação de caminhos*

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4) *Majoração do integral de funções limitadas*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \|f\|_{\infty} \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \|f\|_{\infty} L_{\gamma},$$

em que $\|f\|_{\infty} = \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)|$ e L_{γ} é o comprimento do caminho γ .

⁶⁷O leitor pode usar o integral de Cauchy ou de Riemann (e os correspondentes integrais impróprios) ou o de Lebesgue, conforme preferir. Naturalmente, os caminhos que podem ser considerados e as funções integráveis são diferentes nos três casos, mas tal é, em geral, indiferente para os resultados que se consideram neste livro, pois, em geral, as funções a integrar são contínuas e podem-se usar caminhos regulares, seccionalmente regulares ou rectificáveis, conforme a noção de integral adoptada. O conjunto das funções limitadas integráveis é mais amplo sucessivamente para integral de Cauchy, Riemann ou Lebesgue.

4.3 Primitiva

Diz-se que uma função F é **primitiva** de uma função f num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se $F' = f$ em Ω . É imediato da definição que *as funções que se obtêm somando constantes a uma primitiva de uma função f também são primitivas de f* . Em regiões de \mathbb{C} a recíproca também é verdadeira.

(4.2) *Se F é primitiva de uma função f numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, todas as primitivas de f em Ω obtêm-se adicionando constantes a F .*

Dem. Se F_1, F_2 são primitivas de f em Ω , a derivada de $G = F_1 - F_2$ é $G' = 0$ e, de (3.12), G é constante em Ω . *Q.E.D.*

Quando se conhece uma primitiva de uma função contínua num subconjunto aberto de \mathbb{C} , os integrais sobre caminhos neste conjunto podem ser simplesmente calculados pelas diferenças dos valores da primitiva nos extremos dos caminhos, como com a regra de Barrow⁶⁸ para funções reais⁶⁹.

(4.3) *Se F é primitiva de uma função f contínua num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho seccionalmente regular em Ω ,*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

e se o caminho γ é fechado,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dem. Seja $\{a_0, \dots, a_n\}$ uma partição finita de $[a, b]$ tal que a restrição de γ a cada subintervalo $[a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, \dots, n$, é regular. Como $F' = f$ é contínua em Ω , F é C^1 em Ω . Da regra de derivação da função composta e da regra de Barrow para funções reais, é

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)' = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} (F \circ \gamma)' \\ &= \sum_{k=1}^n [F(\gamma(a_k)) - F(\gamma(a_{k-1}))] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Se γ é fechado, $\gamma(b) = \gamma(a)$ e o lado direito da fórmula é zero. *Q.E.D.*

(4.4) *Para todo caminho fechado seccionalmente regular γ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ é $\int_{\gamma} z^k dz = 0$.*

Dem. Do resultado precedente, pois $z^k = \left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)'$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Q.E.D.*

⁶⁸Barrow, Isaac (1630-1677).

⁶⁹Com integrais de Cauchy o resultado é válido para caminhos regulares e com integrais de Lebesgue para caminhos rectificáveis. Para a generalidade dos resultados seguintes com integrais de funções contínuas em caminhos seccionalmente regulares é análogo.

Como, em condições relativamente gerais, as derivadas de integrais indefinidos de funções reais contínuas coincidem com a função integranda (Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais), uma ideia natural para provar a existência de primitiva de uma função num conjunto é construir uma candidata a primitiva por integração da função dada de um ponto fixo até cada ponto do conjunto. Para integrais de funções complexas sobre caminhos esta construção exige que todos pares de pontos do conjunto possam ser ligados por caminhos no conjunto (o que para um conjunto aberto corresponde a ser conexo) e que os integrais sobre caminhos diferentes que liguem o mesmo par ordenado de pontos sejam iguais (equivalente à anulação dos integrais sobre todos caminhos seccionalmente regulares fechados).

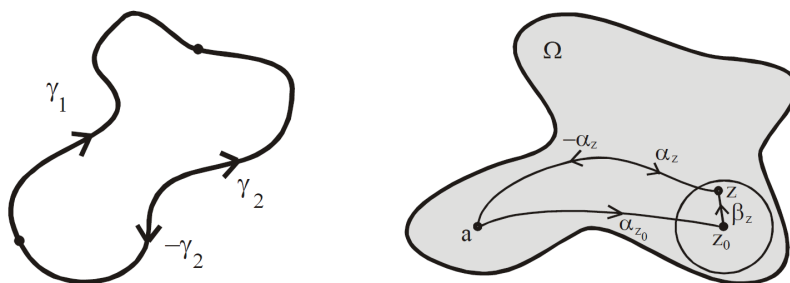


Figura 4.4: Figuras para apoio à prova de (4.5)

(4.5) Se f é uma função complexa contínua numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, as afirmações seguintes são equivalentes:

1. f tem primitiva em Ω .
2. $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo caminho fechado seccionalmente regular γ em Ω .
3. Integrais de f sobre caminhos seccionalmente regulares em Ω com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final são iguais.

Dem. Se γ_1, γ_2 são caminhos seccionalmente regulares em Ω com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final, a concatenação $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ é um caminho fechado seccionalmente regular (Figura 4.4 à esquerda). O integral na concatenação é a soma dos integrais nos caminhos γ_1 e $-\gamma_2$, pelo que é a diferença entre os integrais nos caminhos γ_1 e γ_2 . Logo, estes integrais são iguais se e só se o integral no caminho fechado $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ é zero.

De (4.3), a existência de primitiva de uma função contínua em Ω implica a anulação dos integrais sobre caminhos seccionalmente regulares fechados em Ω . Reciprocamente, como integrais de f sobre caminhos seccionalmente regulares fechados em Ω são nulos, os integrais de f sobre caminhos seccionalmente regulares em Ω com o mesmo par de pontos inicial e final são iguais. Toma-se um ponto arbitrário $a \in \Omega$ e define-se a função

$$F(z) = \int_{\alpha_z} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega,$$

em que α_z é um caminho seccionalmente regular em Ω que liga a a z . Como Ω é um conjunto aberto conexo, existem caminhos com estas propriedades para todo $z \in \Omega$, pelo que a função F fica definida em Ω .

Como Ω é aberto, para cada $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que o círculo aberto $B_r(z_0)$ está contido em Ω . Com z_0 fixo, como os círculos são conjuntos convexos, para qualquer $z \in B_r(z_0)$ tal que $\beta_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\beta_z(t) = (1-t)z_0 + tz$ é um caminho regular em $B_r(z_0) \subset \Omega$ que percorre o segmento de recta de z_0 a z . A concatenação de caminhos $\alpha_z + \beta_z + (-\alpha_z)$ é um caminho seccionalmente regular fechado em Ω (Figura 4.4 à direita), pelo que o integral de f sobre este caminho é nulo e, portanto, a diferença dos integrais de f sobre α_z e α_{z_0} é igual ao integral de f sobre β_z . Logo, $F(z) - F(z_0) = \int_{\beta_z} f(\zeta) d\zeta$ e

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{\beta_z} [f(\zeta) - f(z_0)] d\zeta.$$

A continuidade de f garante que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$ se $|z - z_0| < \delta$. Logo,

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{|z - z_0|} |z - z_0| \varepsilon = \varepsilon, \quad \text{se } |z - z_0| < \delta,$$

e, portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$ para $z_0 \in \Omega$, pelo que $F \in H(\Omega)$ e $F' = f$. Logo, F é uma primitiva de f em Ω . *Q.E.D.*

Considera-se agora a existência de primitivas de funções Holomorfas. Viu-se na prova do resultado precedente que uma ideia natural para provar existência de primitiva de uma função num conjunto é construir uma candidata por integração da função de um ponto fixo até cada ponto do conjunto, o que exige que todos pontos do conjunto possam ser ligados por caminhos seccionalmente regulares nesse conjunto e os integrais sobre caminhos seccionalmente regulares fechados sejam nulos. Para obter uma candidata a primitiva basta que as duas propriedades mencionadas se verifiquem para uma classe particular de caminhos para que os cálculos sejam simples.

Os caminhos mais simples que ligam pares de pontos correspondem a segmentos de recta, pelo que é mais fácil aplicar esta ideia em conjuntos convexos e com caminhos que percorrem segmentos de recta. Em conjuntos convexos a 1ª propriedade mencionada é automaticamente garantida, mas é necessário assegurar a validade da 2ª propriedade, que neste caso é a igualdade dos integrais sobre caminhos poligonais resultantes da concatenação de segmentos de recta que liguem o mesmo par ordenado de pontos. Esta propriedade é equivalente à anulação dos integrais sobre as fronteiras de triângulos fechados contidos no conjunto. O resultado seguinte, que é uma pequena variação de um resultado de E. Goursat publicado em 1900, estabelece esta propriedade para funções Holomorfas num conjunto aberto convexo, excepto possivelmente num dos seus pontos⁷⁰.

⁷⁰Vê-se no capítulo 6 que estas funções são Holomorfas em todo $\Omega \subset \mathbb{C}$, mas a prova nas

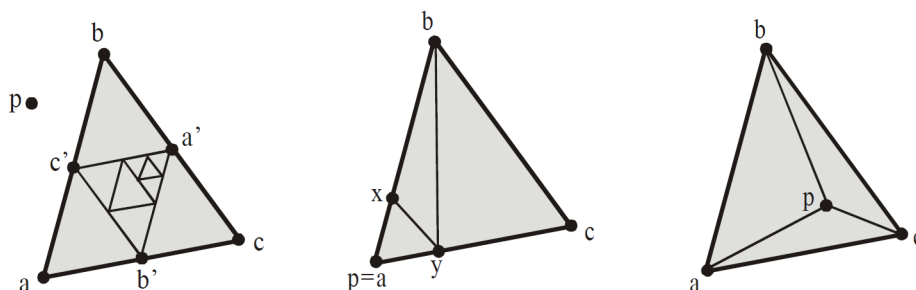


Figura 4.5: Triângulos para apoio à prova do Teorema de Goursat

(4.6) **Teorema de Goursat:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, $\Delta \subset \Omega$ é um triângulo fechado, $p \in \Omega$ e $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ e contínua em p , então $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$, em que $\partial\Delta$ é a fronteira de Δ e o integral é sobre um caminho seccionalmente regular simples que a percorre.*

Dem. Designam-se vértices ordenados de Δ por a, b, c .

Primeiro, supõe-se que $p \notin \Delta$. Designam-se a', b', c' os pontos a meio dos lados, resp., bc, ac, ab . Para os triângulos Δ^j , $j = 1, 2, 3, 4$, com vértices ordenados (a, c', b') , (b, a', c') , (c, b', a') , (a', b', c') (Figura 4.5 à esquerda) é

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta^j} f(z) dz.$$

O valor absoluto de pelo menos um dos integrais na direita é $\geq \frac{|J|}{4}$. Seja Δ_1 um dos quatro triângulos com esta propriedade. Repetindo o argumento com Δ_1 no lugar de Δ , e assim sucessivamente, obtém-se uma sucessão de triângulos Δ_n tal que $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$. Existe um único ponto $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, o comprimento de $\partial\Delta_n$ é $L2^{-n}$, em que L é o comprimento de $\partial\Delta$, e verifica-se

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como f é Holomorfa em Δ , qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|, \quad z \in B_r(z_0).$$

Para n grande é $\Delta_n \subset B_r(z_0)$, e $|z - z_0| < L2^{-n}$ para $z \in \Delta_n$. Como

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \\ &= \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz - f(z_0) \int_{\partial\Delta_n} 1 dz - f'(z_0) \int_{\partial\Delta_n} z dz + f'(z_0) z_0 \int_{\partial\Delta_n} 1 dz, \end{aligned}$$

de (4.4), os integrais no lado direito são nulos com excepção do 1º pelo que

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz.$$

presentes condições é usada para provar o resultado imediatamente depois do resultado seguinte de existência de primitiva e para provar a Fórmula de Cauchy no final deste capítulo, que são ambos usados para provar o resultado mencionado do capítulo 6.

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$ grande é

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \varepsilon (L2^{-n})^2 = \varepsilon L^2.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, é $J = 0$ se $p \notin \Delta$, como se pretendia provar.

Supõe-se agora que p é um vértice de Δ , sem perda de generalidade $p = a$. O integral sobre $\partial \Delta$ é a soma dos integrais sobre as fronteiras dos triângulos de vértices ordenados (a, x, y) , (x, b, y) , (b, c, y) , em que x e y são, resp., pontos dos lados ab e ca do triângulo (Figura 4.5 ao centro). Do caso considerado no parágrafo precedente, os integrais sobre as fronteiras dos dois últimos triângulos são nulos. Portanto, o integral sobre $\partial \Delta$ é igual ao integral sobre o triângulo de vértices (p, x, y) . Como o perímetro deste triângulo pode ser tomado arbitrariamente pequeno tomando x e y próximos de p e f é contínua neste ponto, logo limitada numa sua vizinhança, também se obtém para este caso $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$.

Se p é um ponto arbitrário no triângulo Δ , aplicando o resultado do parágrafo precedente aos triângulos de vértices ordenados (a, b, p) , (b, c, p) , (c, a, p) (Figura 4.5 à direita) obtém-se também $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$. *Q.E.D.*

O resultado seguinte estabelece a existência de primitivas (locais) de funções contínuas em conjuntos convexos em que são Holomorfas excepto possivelmente num ponto.

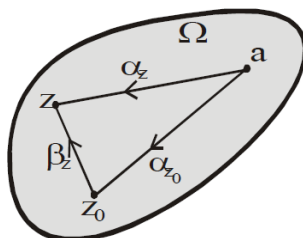


Figura 4.6: Primitiva de função Holomorfa em conjunto convexo

(4.7) **Existência de primitiva:** Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é convexo aberto e $p \in \Omega$, toda função $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ e contínua em p tem primitiva em Ω .

Dem. Seja a um ponto arbitrário de Ω . Como Ω é convexo, contém o segmento de recta az para cada $z \in \Omega$. O caminho $\alpha_z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\alpha_z(t) = (1-t)a + tz$, percorre este segmento de recta. Define-se

$$F(z) = \int_{\alpha_z} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega.$$

Para cada $z_0 \in \Omega$ o triângulo fechado de vértices a, z, z_0 está contido em Ω . Do teorema precedente, $F(z) - F(z_0)$ é o integral de f sobre o segmento de recta de z_0 para z (Figura 4.6). Procedendo como na parte final da prova de (4.5) obtém-se $f = F'$ em Ω . *Q.E.D.*

4.4 Teorema de Cauchy em conjuntos convexos

Os resultados anteriores permitem estabelecer a versão do Teorema de Cauchy em conjuntos convexos⁷¹ seguinte.

(4.8) **Teorema de Cauchy em conjuntos convexos:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto e convexo, γ é caminho fechado seccionalmente regular em Ω , $p \in \Omega$ e $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ é contínua em p , então $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.*

Dem. De (4.7) f tem primitiva e de (4.3) o integral é zero. *Q.E.D.*

Como se referiu na introdução a este capítulo, o Teorema de Cauchy começou por ser obtido por A.-L. Cauchy em rectângulos, com a hipótese excessivamente forte da função integranda ser C^1 , caso em que o resultado é consequência directa do Teorema de Green para funções reais definidas em conjuntos de \mathbb{R}^2 . Mesmo considerando um qualquer Domínio Regular com cantos $D \subset \mathbb{R}^2$ e não apenas rectângulos o Teorema de Green dá

$$\int_{\partial D} (P, Q) \cdot d\alpha = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

para um campo vectorial $(P, Q) C^1$ no fecho de D , em que $\alpha = (X, Y)$ é um caminho seccionalmente regular fechado simples que descreve a fronteira⁷² de D . Da fórmula (4.1), para uma função $f \in H(\text{cl } D)$, com $(u, v) = f$ e $\gamma = X + iY$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int (u, -v) \cdot d\alpha + i \int (v, u) \cdot d\alpha,$$

pelo que para $f C^1$ em $\text{cl } D$ o Teorema de Green aplicado aos dois integrais no lado direito e as equações de Cauchy-Riemann para f dão

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy + \iint_D 0 dx dy = 0.$$

O conjunto D pode não ser convexo, mas a exigência de f ser C^1 é excessivamente forte, pelo que se prefere generalizar no capítulo 7 a formulação em conjuntos convexos.

Este resultado estabelecido com base no Teorema de Green tem a vantagem de tornar directamente visível a ligação entre a anulação dos integrais sobre caminhos fechados e as equações de Cauchy-Riemann, e evidencia que a anulação dos integrais sobre caminhos fechados é uma expressão integral

⁷¹ Usa-se este resultado no capítulo 6 para provar que as funções Holomorfas são sempre indefinidamente diferenciáveis e representáveis por séries de potências, que são usados no capítulo 7 para estabelecer uma versão global do Teorema de Cauchy.

⁷² Um **Domínio Regular com cantos** $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto que é o interior do seu fecho com fronteira que é uma curva seccionalmente regular fechada. O Teorema da Curva de Jordan é que toda curva de Jordan separa o plano em 2 conjuntos conexos abertos, um ilimitado e outro limitado. O conjunto limitado é um Domínio Regular com fronteira a curva de Jordan. A existência de pelo menos 2 componentes conexas no complementar de uma curva de Jordan seccionalmente regular em que uma e só uma é ilimitada é uma consequência dos resultados da secção seguinte, mas é mais difícil provar que só há 1 componente conexa limitada. Este teorema só é usado neste texto no capítulo 10 (apenas para fins primos) e pontualmente no último capítulo. No apêndice I dá-se uma prova com Homologia e indica-se nos exercícios como obter outra prova.

das restrições impostas pela diferenciabilidade de funções complexas. As versões do Teorema de Cauchy consideradas desde a 1ª proposta em 1822 até 1900 consideravam a hipótese adicional de f ser C^1 . Esta hipótese só foi dispensada em 1900 com a contribuição de E. Goursat.

Com o Teorema de Cauchy em conjuntos convexos pode-se estabelecer a Fórmula de Cauchy, que dá os valores de uma função Holomorfa num conjunto de pontos fora de uma curva fechada seccionalmente regular por integrais que envolvem apenas os valores da função nessa curva. Como os valores destes integrais dependem do sentido e do nº de voltas em que o caminho percorre a curva, é necessário tornar precisa e quantificar esta dependência. Para tal introduz-se na secção seguinte o Índice ou Número de Rotação de um caminho fechado seccionalmente regular em relação a um ponto fora da curva que descreve.

4.5 Índice de caminho fechado e homotopia de caminhos

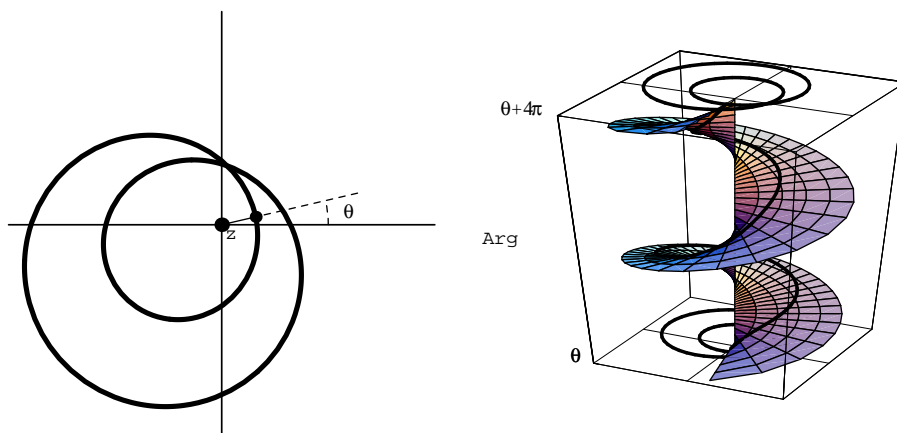
O resultado seguinte permite definir Índice ou Número de Rotação de um caminho fechado seccionalmente regular γ em relação a um ponto $z \notin \gamma^*$. O Índice, designado $\text{Ind}_\gamma(z)$, é um número inteiro que dá informação sobre o sentido e o nº de voltas que o caminho γ dá na curva γ^* em torno de z .

É útil entender geometricamente como calcular um número para o efeito indicado por integração de uma função apropriada num caminho. Com os argumentos de pontos em relação a um par de eixos coordenados ortogonais centrado em z a variarem continuamente ao longo do caminho, a diferença dos valores dos argumentos dos pontos final e inicial de um caminho fechado é um múltiplo inteiro $2\pi n$ de 2π , em que $n \in \mathbb{Z}$ é a diferença entre o nº de voltas do caminho em torno de z nos sentidos positivo e negativo (Figura 4.7). Para obter $2\pi n$ por integração sobre o caminho usa-se uma função integranda tal que o integral dê a variação total do argumento de pontos ao longo do caminho. Recordando que a parte imaginária do logaritmo de um número é um argumento desse número, um argumento de $w \in \gamma^*$ relativamente a z é a parte imaginária de $\log(w-z)$. Nenhum logaritmo pode ser definido como função contínua em todo plano complexo, mas é possível definir continuamente $t \mapsto \log(\gamma(t)-z)$ passando para diferentes Ramos do logaritmo. Como $\frac{d}{dw} \log(w-z) = \frac{1}{w-z}$, é natural considerar como função integranda $w \mapsto \frac{1}{w-z}$. A parte imaginária do integral dá $2\pi n$ como se pretende, e a parte real dá a diferença entre o logaritmo do módulo dos pontos inicial e final do caminho e, como estes coincidem, é zero.

Chama-se **Índice** ou **Número de Rotação**⁷³ de um caminho fechado seccionalmente regular γ em relação a um ponto z a (Figura 4.7)

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw.$$

⁷³Em inglês diz-se *Winding Number*.

Figura 4.7: Índice de caminho γ em relação a ponto z

(4.9) Se γ é um caminho fechado seccionalmente regular em \mathbb{C} ,

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw$$

define uma função de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ em \mathbb{Z} constante em cada componente conexa de Ω e nula na componente conexa ilimitada de Ω .

Dem. Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e fixe-se $z \in \Omega$. Como para $\zeta \in \mathbb{C}$ é $\frac{\zeta}{i2\pi} \in \mathbb{Z}$ se e só se $e^\zeta = 1$, a condição $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ equivale $\varphi(b) = 1$ com $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds\right).$$

Como $\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ excepto no conjunto finito de pontos $S \subset [a, b]$ em que γ não tem derivada, para $s \in [a, b] \setminus S$ é

$$\left(\frac{\varphi(s)}{\gamma(s)-z}\right)' = \frac{\varphi'(s)}{\gamma(s)-z} - \frac{\varphi(s)\gamma'(s)}{[\gamma(s)-z]^2} = 0,$$

pele que $s \mapsto \frac{\varphi(s)}{\gamma(s)-z}$ é contínua em $[a, b]$ e tem derivada 0 em $[a, b] \setminus S$; logo, é constante em cada subintervalo de $[a, b] \setminus S$ e a continuidade nos pontos de S implica que é constante em $[a, b]$. Como $\varphi(a) = 1$, é $\varphi(s) = \frac{\gamma(s)-z}{\gamma(a)-z}$. Como γ é fechado, $\gamma(a) = \gamma(b)$; logo, $\varphi(b) = 1$ e $\text{Ind}_\gamma(\Omega) \subset \mathbb{Z}$.

A função $\text{Ind}_\gamma: \Omega \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ é contínua, pois

$$\begin{aligned} |\text{Ind}_\gamma(z) - \text{Ind}_\gamma(w)| &= \left| \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \left(\frac{1}{s-z} - \frac{1}{s-w}\right) ds \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \left(\frac{z-w}{(s-z)(s-w)}\right) ds \right| \\ &\leq \frac{|z-w|L_\gamma}{2\pi} \max \left\{ \frac{1}{|(s-z)(s-w)|} : s \in \gamma^* \right\}, \end{aligned}$$

em que L_γ é o comprimento de γ , pelo que $|\text{Ind}_\gamma(z) - \text{Ind}_\gamma(w)| \rightarrow 0$ quando $|z-w| \rightarrow 0$. A imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo. Como $\text{Ind}_\gamma(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, Ind_γ é constante em cada componente conexa de Ω . Finalmente, para $|z|$ grande,

$$|\text{Ind}_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds \right| < 1.$$

Logo, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ para z na componente conexa ilimitada de Ω . *Q.E.D.*

O sinal e o valor absoluto de $\text{Ind}_\gamma(z)$ dão, resp., o sentido e o n° de voltas que o caminho γ dá em torno de z , como se ilustra no resultado seguinte para uma circunferência γ^* .

(4.10) *Se γ é o caminho regular fechado que dá n voltas no sentido positivo (ou contrário ao dos ponteiros do relógio) na circunferência com raio $r > 0$ e centro $a \in \mathbb{C}$, $\gamma: [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$,*

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} n & , \text{ se } z \in B_r(a) \\ 0 & , \text{ se } z \notin \text{cl } B_r(a) . \end{cases}$$

Dem. Do resultado precedente basta calcular

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi n} 1 d\theta = n .$$

Q.E.D.

Os Índices de dois caminhos fechados seccionalmente regulares que podem ser deformados continuamente de um para o outro em $\Omega \subset \mathbb{C}$ são iguais em pontos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Tal como em \mathbb{R}^2 , o conceito apropriado para traduzir a noção de deformação contínua de caminhos num conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é Homotopia.

Diz-se que dois caminhos $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \Omega$ fechados (resp., não fechados mas com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = A$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = B$) são **Homotópicos em Ω** se existe uma função contínua $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, chamada **Homotopia de γ_1 para γ_2 em Ω** , tal que $H(t, 0) = \gamma_1(t)$, $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ para $t \in [a, b]$ e $H(a, s) = H(b, s)$ (resp., $H(a, s) = A$ e $H(b, s) = B$) para $s \in [0, 1]$ (Figura 4.8).

Homotopia é uma relação de equivalência⁷⁴, pelo que estabelece no conjunto de todos caminhos seccionalmente regulares fechados em Ω (ou não fechados mas com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final em Ω) classes de equivalência, chamadas **classes de Homotopia em Ω** .

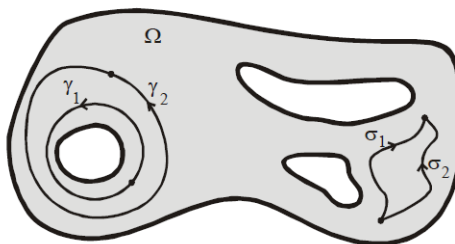


Figura 4.8: Caminhos Homotópicos em $\Omega \subset \mathbb{C}$ (pares γ_1, γ_2 e σ_1, σ_2 separadamente)

O resultado seguinte mostra que o Índice em relação a um ponto no complementar de Ω é invariante em cada classe de Homotopia de caminhos fechados em Ω , e que, para dois caminhos não fechados Homotópicos em Ω

⁷⁴Uma **relação de equivalência** num conjunto é uma relação binária no conjunto com as três propriedades: reflexividade, simetria e transitividade.

o Índice do caminho fechado que é concatenação de um dos caminhos com o simétrico do outro em relação a pontos no complementar de Ω é zero.

(4.11) Se $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ e γ_1, γ_2 são caminhos seccionalmente regulares:

1. Se γ_1, γ_2 são fechados e Homotópicos em Ω , $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$.
2. Se γ_1, γ_2 são Homotópicos mas não fechados (com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final), $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ é caminho fechado e $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$.

Dem. $\text{Ind}_{\gamma_j}(z) = \int_{\gamma_j} f_z(w) dw$ com $f_z(w) = \frac{1}{i2\pi(w-z)}$ para $j = 1, 2$, e $f_z \in H(\mathbb{C} \setminus \{z\})$. O integral de $f_z = (u, v)$ em γ_j é

$$\int_{\gamma_j} f_z(w) dw = \int (u, -v) \cdot d\alpha_j + i \int (v, u) \cdot d\alpha_j,$$

em que α_j é o caminho em \mathbb{R}^2 correspondente ao caminho γ_j em \mathbb{C} para $j = 1, 2$. Pode-se aplicar o que se sabe para integrais de linha de campos vectoriais em \mathbb{R}^2 . u e v são C^1 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em Ω . Logo, os campos vectoriais $(u, -v)$, (v, u) com valores e variáveis em \mathbb{R}^2 são fechados⁷⁵ em Ω . α_1, α_2 em \mathbb{R}^2 são caminhos seccionalmente regulares Homotópicos em Ω . Da invariância de integrais de linha de campos vectoriais fechados sobre caminhos seccionalmente regulares Homotópicos num conjunto em que os campos são C^1 , que pode ser estabelecida a partir do Teorema de Green em \mathbb{R}^2 ,

$$\int (u, -v) \cdot d\alpha_1 = \int (u, -v) \cdot d\alpha_2, \quad \int (v, u) \cdot d\alpha_1 = \int (v, u) \cdot d\alpha_2,$$

pelo que $\int_{\gamma_1} f_z(w) dw = \int_{\gamma_2} f_z(w) dw$.

Se γ_1, γ_2 são caminhos fechados, a última igualdade é $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$. Se não são fechados, $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ é fechado e $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$. Q.E.D.

Para leitores que não disponham da invariância de integrais de linha de campos vectoriais fechados sobre caminhos seccionalmente regulares Homotópicos num subconjunto de \mathbb{R}^2 dá-se a seguir uma prova directa.

Seja $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ uma Homotopia de γ_1 para γ_2 em Ω .

Supõe-se 1º que H é Holomorfa de $[a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$ em \mathbb{C} ; logo, tem extensão Holomorfa a um conjunto aberto que contém o rectângulo fechado $R = [a - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0] \times [-\varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0] \subset \mathbb{C}$ com $\varepsilon_0 > 0$ pequeno; designa-se essa extensão também H . Para $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$ o caminho seccionalmente regular em R com

$$\begin{aligned} \alpha_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha_1(t) &= t, & \alpha_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha_2(s) &= b + is, \\ \alpha_3: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha_3(t) &= t + i, & \alpha_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha_4(s) &= is, \end{aligned}$$

como $f_z \circ H \in H(R)$ para $z \in R$ e R é convexo, do Teorema de Cauchy em

⁷⁵ Diz-se que $\mathbf{h} = (h_1, h_2): S \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S \subset \mathbb{R}^2$, é um **campo fechado** se $\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial y}$ em S .

conjuntos convexos (4.8), $\int_{\alpha} (f_z \circ H)(w) dw = 0$, e

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha} (f_z \circ H)(w) dw = \int_a^b (f_z \circ \gamma_1) \gamma_1' + \int_0^1 f_z(\gamma_1(b)) i - \int_a^b (f_z \circ \gamma_2) \gamma_2' - \int_0^1 f_z(\gamma_1(a)) i \\ &= \int_{\gamma_1} f_z(w) dw - \int_{\gamma_2} f_z(w) dw = \text{Ind}_{\gamma_1}(z) - \text{Ind}_{\gamma_2}(z). \end{aligned}$$

Considera-se agora H não Holomorfa de $[a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$ em \mathbb{C} . Como H é contínua $[a, b] \times [0, 1]$ pode ser estendida a uma função contínua em R e, depois, aproximada em $[a, b] \times [0, 1]$ por funções diferenciáveis H_{ε} , uniformemente em $[a, b] \times [0, 1]$, *i.e.* qualquer que seja $\delta > 0$ existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ tal que $|H(w) - H_{\varepsilon}(w)| < \delta$, $w \in R$. Do parágrafo precedente, $\int_{\alpha} (f_z \circ H_{\varepsilon})(w) dw = 0$ para $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, e, portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} (f \circ H)(w) dw \right| &\leq \left| \int_{\alpha} (f \circ H_{\varepsilon})(w) dw \right| + \left| \int_{\alpha} (f \circ H)(w) - (f \circ H_{\varepsilon})(w) dw \right| \\ &= \left| \int_{\alpha} (f \circ H)(w) - (f \circ H_{\varepsilon})(w) dw \right|. \end{aligned}$$

Como f é contínua e $[a, b] \times [0, 1]$ é compacto, $H([a, b] \times [0, 1])$ é compacto e, do Teorema de Heine-Cantor, f é uniformemente contínua neste conjunto⁷⁶, *i.e.* qualquer que seja $\sigma > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para w_1, w_2 neste conjunto com $|w_1 - w_2| < \delta$ é $|f(w_1) - f(w_2)| < \sigma$. Portanto, o último termo na expressão acima é majorado por σL_{α} , em que L_{α} é o comprimento do caminho α . Como $\sigma > 0$ é arbitrário, $\int_{\alpha} (f \circ H)(w) dw = 0$ e também se tem o resultado. Contudo, falta provar que a aproximação diferenciável H_{ε} de H existe, o que se faz a seguir por um método de utilidade muito mais geral.

Seja⁷⁷ $\Phi_{\varepsilon}: \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty[$ C^{∞} , 0 fora de $[-\varepsilon, \varepsilon]^2 \subset \mathbb{C}$ e $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{\varepsilon}(x, y) dx dy = 1$. Uma tal função é $\Phi_{\varepsilon}(z) = \varphi_{\varepsilon}(\mathcal{R}e z, \mathcal{I}m z)$ com $\varphi_{\varepsilon}: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ C^{∞} , com valor 0 fora de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon} = 1$. Pode-se construir uma função φ_{ε} com estas propriedades a partir de uma função limitada C^{∞} com valores positivos excepto em 0 onde é 0 e tem derivadas de qualquer ordem iguais a 0 como, por exemplo, $\psi(t) = e^{-1/t^2}$ para $t \neq 0$ e $\psi(0) = 0$, e definindo a função $\varphi_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{c} [\psi(t+\varepsilon) \psi(-(t+\varepsilon))]$ para $|t| < \varepsilon$ e igual a 0 para $|t| \geq \varepsilon$, em que, para ter integral 1, $c = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(t+\varepsilon) \psi(-(t+\varepsilon)) dt$. Define-se H_{ε} por **Convolação** de H com Φ_{ε} , *i.e.*

$$H_{\varepsilon}(w) = (H_{\varepsilon} * \Phi_{\varepsilon})(w) = \int_{\mathbb{R}^2} H_{\varepsilon}(x, y) \Phi_{\varepsilon}((\mathcal{R}e w, \mathcal{I}m w) - (x, y)) dx dy.$$

Pode-se derivar indefinidamente esta função aplicando a a regra de Leibniz para derivar o integral trocando-o com a derivada, pois Φ_{ε} é C^{∞} e Φ_{ε} anula-se fora de $[-\varepsilon, \varepsilon]^2$, obtendo-se que H_{ε} é C^{∞} . Com mudança de variáveis de

⁷⁶Ver apêndice I.

⁷⁷A funções com as propriedades de Φ_{ε} chama-se **Molificadores** (em inglês *mollifiers*) e ao método de regularização que se segue **Molificação**.

integração, também

$$H_\varepsilon(w) = \int_{\mathbb{R}^2} H_\varepsilon((\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w) - (x, y)) \Phi_\varepsilon(x, y) dx dy,$$

pelo que

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon(w) - H(w)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |H_\varepsilon((\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w) - (x, y)) - H(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)| \Phi_\varepsilon(x, y) dx dy \\ &\leq \sup_{(x, y) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^2} |H_\varepsilon((\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w) - (x, y)) - H(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)|. \end{aligned}$$

Como H é contínua e R é compacto, do Teorema de Heine-Cantor⁷⁶, é uniformemente contínua em R , *i.e.* qualquer que seja $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que o lado direito da expressão precedente é $< \delta$, assegurando a validade da aproximação considerada no parágrafo precedente.

4.6 Fórmula de Cauchy em conjuntos convexos

A Fórmula de Cauchy dá os valores de uma função Holomorfa num conjunto em pontos fora de uma curva fechada seccionalmente regular nesse conjunto por integrais que envolvem apenas os valores da função na curva. A prova desta fórmula baseia-se no Teorema de Cauchy e como a versão deste teorema de que dispomos é para conjuntos convexos, estabelece-se agora a Fórmula de Cauchy para conjuntos convexos. No capítulo 7 estabelece-se a Fórmula de Cauchy geral com o Teorema de Cauchy Global.

(4.12) Fórmula de Cauchy em conjuntos convexos:

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é conjunto aberto convexo, γ caminho fechado seccionalmente regular em Ω , $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ e $f \in H(\Omega)$,

$$f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Dem. A função definida por

$$g_z(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & , \text{ se } w \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & , \text{ se } w = z \end{cases}$$

satisfaz as hipóteses do Teorema de Cauchy em conjuntos convexos (4.8), pelo que $\int_\gamma g_z(w) dw = 0$, ou seja

$$0 = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{f(z)}{i2\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z).$$

Q.E.D.

A Fórmula de Cauchy é uma expressão integral das fortes restrições impostas pela diferenciabilidade de funções complexas, dado que se obtêm os valores da função em todos pontos z de um conjunto em que é Holomorfa fora de um caminho fechado seccionalmente regular γ com $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \neq 0$ em função dos valores da função na curva γ^* e do valor de $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$. Em particular, os valores de uma função complexa numa curva γ^* (que é conjunto

de medida nula⁷⁸ no plano) num conjunto convexo em que é Holomorfa determinam os valores da função em todas componentes conexas de $\Omega \setminus \gamma^*$ em que $\text{Ind}_\gamma(z) \neq 0$. E é assim para todas curvas γ^* que satisfazem as condições mencionadas.

Uma consequência importante da Fórmula de Cauchy é que o valor de uma função no centro de um círculo fechado em que é Holomorfa é a média dos valores na fronteira do círculo.

(4.13) Propriedade de Valor Médio de funções Holomorfas: *Se f é função Holomorfa num círculo fechado $\text{cl } B_r(a) \subset \mathbb{C}$, o valor de f no centro do círculo é a média dos valores na circunferência que o delimita:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Dem. Como $f \in H(\text{cl } B_r(a))$, é $f \in H(B_{r+\varepsilon}(a))$ para algum $\varepsilon > 0$. Se $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é o caminho regular simples com $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$, da Fórmula de Cauchy no resultado precedente,

$$f(a) \text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta,$$

e, de (4.10), $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$. Q.E.D.

Com a Propriedade de Valor Médio verifica-se mais uma vez que os valores de funções Holomorfas satisfazem fortes restrições de interligação. Vê-se no capítulo 9 que as funções complexas contínuas que satisfazem a Propriedade de Valor Médio em todos círculos fechados contidos num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ são Holomorfas, pelo que esta Propriedade de Valor Médio para funções complexas contínuas caracteriza as funções Holomorfas.

Exercícios

- 4.1 Com $(x, y) = z \in \mathbb{C}$, calcule $\int_\gamma x dz$, em que γ é um caminho regular simples que percorre:
 - a) O segmento de recta orientado de 0 a $1+i$.
 - b) A circunferência com raio $r > 0$ e centro na origem no sentido positivo (calcule de duas formas: directamente e observando que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \frac{r^2}{z})$ na circunferência).
- 4.2 Calcule $\int_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz$, em que γ é um caminho regular simples que percorre a circunferência com centro na origem e raio $r \in [0, +\infty[\setminus \{1\}$.
- 4.3 Calcule uma primitiva da função complexa $f(x+iy) = 2x(1-y) + i(x^2+2y-y^2)$, com $x, y \in \mathbb{R}$.
- 4.4 Mostre que $\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz$ é um imaginário puro, para todo caminho fechado sectionalmente regular γ e toda função $f \in C^1$ numa região que contém γ^* .

⁷⁸Diz-se que $S \subset \mathbb{R}^2$ tem **medida nula** se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura numerável de S por intervalos com soma de áreas $< \varepsilon$ (um intervalo em \mathbb{R}^2 é um rectângulo produto cartesiano de 2 intervalos reais); $S \subset \mathbb{C}$ tem medida nula se como subconjunto de \mathbb{R}^2 tem medida nula.

- 4.5 Mostre que $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ para todo caminho fechado seccionalmente regular γ numa região em que a f é C^1 e satisfaz $|f-1| < 1$.
- 4.6 Descreva condições em que se verifica $\int_{\gamma} \log z dz = 0$.
- 4.7 Calcule os integrais seguintes, em que γ_r é um caminho regular simples que percorre a circunferência com raio $r > 0$ e centro na origem:
- a) $\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z} dz$, b) $\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^2} dz$, c) $\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^n} dz$, d) $\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^3} dz$, e) $\int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z} dz$.
- 4.8 Prove: Se $f \in H(B_R(p) \setminus \{p\})$, $\lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z) = 0$ e $\gamma_{p,r}$ é caminho seccionalmente regular fechado simples que descreve a circunferência com centro p e raio r , $\int_{\gamma_{p,r}} f(z) dz = 0$ para $0 < r < R$. (Sugestão: $\int_{\gamma_{p,s}} \frac{1}{z-p} dz = \pm 2\pi$, $0 < s < R$).
- 4.9 Prove que o Teorema de Cauchy em conjuntos convexos abertos (4.8) pode ser estendido enfraquecendo a hipótese sobre a função f para, em vez de Holomorfa em todos pontos excepto possivelmente um em que é contínua, ser Holomorfa excepto possivelmente num conjunto finito $\{p_1, \dots, p_n\}$ em que $\lim_{z \rightarrow p_j} (z-p_j)^a f(z) = 0$, com $0 < a < 1$; além disso, se esta condição não se verifica em alguns dos pontos indicados mas nesses pontos o limite indicado é 0 com $a=1$, os integrais sobre caminhos fechados seccionalmente regulares que não passam nestes pontos são nulos. (Sugestão: Use o resultado do exercício precedente).

Capítulo 5

Funções analíticas

5.1 Introdução

As funções Analíticas são as representáveis por séries de potências.

Até meados do séc. XVII a noção de função confundia-se com a de fórmula algébrica com variáveis, envolvendo somas, diferenças, produtos, quocientes e raízes de qualquer ordem. A partir da descoberta de uma série de potências para o logaritmo em 1668, independentemente por N. Mercator e W. Brouncker, foram descobertas séries para muitas funções, nomeadamente por J. Gregory, I. Newton, G.W. Leibniz, entre outros, embora a convergência de séries ainda não fosse um conceito rigoroso. J. Gregory sugeriu em 1668 a identificação de função com fórmula que envolve expressões algébricas e séries destas expressões. A obtenção de séries de potências para certas funções racionais e trigonométricas e a descoberta por J. Gregory em 1671 das séries de Taylor de funções levaram a que neste período a noção de função se confundisse com a de função Analítica, mesmo sem se dispor de um esclarecimento cabal da convergência de séries⁷⁹.

Em 1748, após importantes contribuições para o cálculo de somas de certas séries numéricas e do comportamento assintótico de séries divergentes (em particular a relação do logaritmo com a série dos recíprocos dos números naturais, conhecida por série harmónica), L. Euler publicou séries de potências para, entre outras, as funções exponencial, seno e coseno. Em 1755 L. Euler aplicou séries de Taylor para desenvolver o cálculo diferencial e utilizou as séries como instrumento unificador da Teoria de Números e da Análise, utilizando-as para obter propriedades de números, como a distribuição dos números primos com a Função Zeta de Riemann que, para um dado valor da variável, dá a soma da série dos recíprocos dos números naturais elevados a esse valor. Em 1812, C.F. Gauss estudou sistematicamente a convergência da série hipergeométrica e obteve séries para uma ampla classe de funções.

O conceito de convergência de sucessões e séries só foi estabelecido rigorosamente em 1821 por A.-L. Cauchy no *Cours d'Analyse Algébrique da École Polytechnique*, em que também aparece a definição actual de função

⁷⁹Mercator, Nicholas (1620-1687). Brouncker, William (1620-1684). Gregory, James (1638-1675).

como correspondência unívoca de elementos de um par ordenado de conjuntos sem referência a expressões que as definam. Também considerou a noção de função contínua, mas não a explorou noutros contextos, como para de integrais. B. Bolzano⁸⁰ já tinha considerado esta noção de função em 1817, também em relação com continuidade, nas lições na Universidade de Praga, que permaneceram como manuscrito até serem publicadas em 1930. As consequências desta definição de função para integrais só começaram a ser claramente exploradas por P.G. Dirichlet em 1829 e B. Riemann em 1854.

N.H. Abel⁸¹ estabeleceu em 1826 que toda série de potências complexa tem um raio de convergência de 0 a $+\infty$, *i.e.* a série é absolutamente convergente em pontos no interior de um círculo com esse raio e centro no ponto em que a série de potências está centrada, e diverge no exterior desse círculo. A fórmula para o raio de convergência em termos dos coeficientes da série apareceu num trabalho de A.-L. Cauchy de 1821, embora tenha sido provada apenas em 1892 na tese de doutoramento de J. Hadamard.

Em várias situações é preciso calcular integrais de funções definidas por séries, para o que é conveniente poder integrar séries termo a termo. Em 1826 N.H. Abel apresentou exemplos de séries de funções contínuas convergentes com soma que não é contínua, contrariando um artigo de A.-L. Cauchy de 1821. K. Weierstrass introduziu a noção de convergência uniforme⁸² e provou em notas de 1841, só publicadas em 1894, que séries de funções contínuas uniformemente convergentes podem ser integradas termo a termo. Em 1848, G. Stokes e P.L. Seidel introduziram, independentemente, o mesmo conceito para integrar séries de funções termo a termo⁸³.

As funções Analíticas são indefinidamente diferenciáveis e têm derivadas de qualquer ordem que também são funções Analíticas, e, portanto, funções contínuas. Além disso, as representações de uma função em séries de potências são as resp. séries de Taylor, em que o coeficiente de cada ordem é a derivada dessa ordem da função no ponto em que a série de potências está centrada dividida pelo factorial da ordem de derivação.

Neste capítulo são estabelecidas as afirmações referidas e algumas consequências importantes, incluindo: o conjunto dos zeros de uma função Analítica numa região onde não é identicamente zero é finito ou infinito numerável sem pontos limite na região; as estimativas de Cauchy, obtidas por A.-L. Cauchy em 1835 (os valores absolutos dos coeficientes da Fórmula de Taylor de uma função Analítica num círculo aberto em que é limitada são majorados pelo quociente de um majorante do valor absoluto da função pela potência do raio do círculo de expoente igual à ordem do termo da série de

⁸⁰Bolzano, Bernhard (1781-1848).

⁸¹Abel, Niels Henrik (1802-1829).

⁸²Num artigo de 1838 sobre funções elípticas Christoph Gudermann (1798-1852), cujas lições K. Weierstrass seguiu, usou pela 1ª vez o termo convergência uniforme para funções elípticas, embora não tenha aplicado esta propriedade para estabelecer qualquer resultado.

⁸³Stokes, Gabriel (1819-1903). Seidel, Philipp Ludwig (1821-1896).

Taylor); o Teorema de Liouville, provado em 1844 por A.-L. Cauchy (funções inteiras limitadas são constantes) a que C.W. Borchardt⁸⁴ deu em 1879 o nome de J. Liouville por este o afirmar no início das suas lições sobre funções duplamente periódicas de 1847; o Teorema de Unicidade de Funções Analíticas (funções Analíticas numa região que coincidem num conjunto que tem um ponto limite são iguais), o Princípio de Módulo Máximo (funções Analíticas numa região cujo módulo tem um máximo local são constantes) e o correspondente resultado para mínimos (os módulos de funções analíticas não constantes só podem ter mínimos locais em pontos em que são zero).

Os três últimos resultados mencionados no parágrafo precedente apareceram em 1851 na tese de doutoramento de B. Riemann. O Teorema de Unicidade de Funções Analíticas tinha aparecido em embrião numa publicação de N.H. Abel de 1827 em que prova que funções Analíticas iguais num intervalo de números reais são iguais em todo círculo de convergência, num artigo de C. Gauss de 1840 para o caso particular de funções potenciais de massas sob atracção gravitacional, e num artigo de A.-L. Cauchy de 1845 numa versão mais próxima do resultado geral. O Princípio de Módulo Máximo para as partes real e imaginária de funções Holomorfas apareceu num livro de H. Burkhardt de 1897. Embora não se saiba quando o resultado foi enunciado e provado para funções Holomorfas, foi invocado por C. Carathéodory em 1912 quando deu uma prova simples do Lema de Schwarz.

As provas que são aqui apresentadas para os resultados mencionados nos dois parágrafos precedentes baseiam-se na Fórmula de Parseval para séries de potências complexas, que é aqui designada assim por ser um caso particular da Fórmula de Parseval, obtida inicialmente em 1799 para séries trigonométricas por M.-A. Parseval, em espaços lineares complexos euclidianos (*i.e.* com produto interno) de igualdade do quadrado da norma de um vector à soma dos quadrados dos valores absolutos das componentes do vector num sistema ortonormal, generalizando o Teorema de Pitágoras para triângulos. Esta fórmula foi publicada na forma que é aqui usada (a soma da série dos quadrados dos módulos dos termos da série de Taylor da função num ponto calculados numa circunferência com raio menor ao raio de convergência da série de Taylor é igual à média do quadrado do módulo da função na circunferência) por A. Gutzmer em 1888, embora pudesse ser obtida com o método descoberto por M.-A. Parseval 90 anos antes⁸⁵.

5.2 Sucessões e séries de números complexos

Uma **sucessão em \mathbb{C}** ou **sucessão de números complexos** $\{z_n\}$ é uma função de \mathbb{N} em \mathbb{C} , $n \mapsto z_n$. Diz-se que a sucessão $\{z_n\}$ em \mathbb{C} é **convergente** se são convergentes as sucessões em \mathbb{R} $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ cujos termos são, resp., as partes real e imaginária de cada termo de $\{z_n\}$. Em caso de convergência, o

⁸⁴Borchardt, Carl Wilhelm (1817-1880).

⁸⁵Ver capítulo 10. Burkhardt, Heinrich (1861-1914). Parseval, Mark-Antoine (1775-1836). Pitágoras (c. 569 AC – c. 475 AC). Gutzmer, August (1860-1924).

limite da sucessão $\{z_n\}$ é o número complexo com partes real e imaginária que são, resp., os limites das sucessões de números reais $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

Segue-se que as propriedades usuais dos limites de somas, produtos e quocientes de sucessões em \mathbb{R} também se verificam para sucessões em \mathbb{C} .

Diz-se que sucessão $\{z_n\}$ em \mathbb{C} é uma **sucessão de Cauchy** se qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ para $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > M$. Com $(x_n, y_n) = z_n$, é $|z_{n+m} - z_n|^2 = |x_{n+m} - x_n|^2 + |y_{n+m} - y_n|^2$, uma sucessão $\{z_n\}$ em \mathbb{C} é sucessão de Cauchy se e só se as sucessões em \mathbb{R} das suas partes real e imaginária $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sucessões de Cauchy. Como as sucessões de Cauchy em \mathbb{R} são convergentes para números reais, ou seja \mathbb{R} com a distância entre pontos definida pelo valor absoluto da diferença entre eles é um **espaço completo**, também as sucessões de Cauchy em \mathbb{C} , com a distância de pontos definida pelo valor absoluto da diferença desses pontos, são convergentes para números complexos e \mathbb{C} é um *espaço completo*.

Diz-se que uma série de números complexos $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, em que $(x_n, y_n) = z_n \in \mathbb{C}$, é **convergente** se as séries das partes real e imaginária, resp., $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ são convergentes; caso contrário, diz-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é **divergente**. Em caso de convergência, chama-se **limite** ou **soma da série** $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ao limite S da sucessão das suas somas parciais $S_N = \sum_{n=0}^N z_n$ e escreve-se $S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

Como as sucessões de termos de séries convergentes de números reais convergem para zero, também *as sucessões de termos de séries convergentes de números complexos convergem para zero*.

Diz-se que uma série de números complexos $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é **absolutamente convergente** se a série de números reais dos valores absolutos dos seus termos é convergente.

Se $(x_n, y_n) = z_n$, é $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ e a convergência absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ implica a convergência absoluta das séries de números reais $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, logo, também a convergência simples destas séries e a independência das resp. somas de reordenações dos termos, o que é equivalente à convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e à independência da soma de reordenações dos termos. Portanto, tal como para séries de números reais, *convergência absoluta de uma série de números complexos implica convergência (simples) e a soma de séries absolutamente convergentes é independente de reordenações dos termos*.

5.3 Sucessões e séries de funções uniformemente convergentes

Diz-se que uma sucessão de funções complexas $\{f_n\}$ definidas em conjuntos $U_n \subset \mathbb{C}$ é **sucessão uniformemente convergente** em $U \subset \mathbb{C}$ se para cada $z \in U$ a sucessão $\{f_n(z)\}$ em \mathbb{C} é convergente e, designando por $f(z)$ o limite, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \subset U_n$ e $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

5.3 Sucessões e séries de funções uniformemente convergentes 75

para todos $n > N, z \in U$ (ou seja $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ pode ser uniformemente assegurada em todos pontos $z \in U$, por⁸⁶ $n > N$).

Diz-se que uma série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ é **série uniformemente convergente** num conjunto $U \subset \mathbb{C}$ se a sucessão das somas parciais $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ é uniformemente convergente em U .

Os dois resultados seguintes estabelecem que limites de sucessões e séries uniformemente convergentes num conjunto $U \subset \mathbb{C}$ com termos que são funções contínuas em U são funções contínuas em U e podem ser integradas termo a termo sobre caminhos seccionalmente regulares em U .

(5.1) Se $\{f_n\}$ é sucessão de funções com cada f_n definida e contínua em $U_n \subset \mathbb{C}$, $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $U \subset \mathbb{C}$, e γ é caminho fechado seccionalmente regular em U , então f é contínua em U e $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$.

Dem. Como $f_n \rightarrow f$ uniformemente em U , qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \subset U_n$ e $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todos $n > N, z \in U$, pelo que para $n > N$ e quaisquer $z, z_0 \in U$,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \varepsilon + |f_n(z) - f_n(z_0)| + \varepsilon.$$

Como f_n é contínua em U_n , $\lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = f_n(z_0)$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} |f_n(z) - f_n(z_0)| \leq 2\varepsilon$, e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, f é contínua em todo $z_0 \in U$.

Se $n > N, z \in U$ e L_{γ} é o comprimento do caminho γ ,

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} [f_n(z) - f(z)] dz \right| \leq \varepsilon L_{\gamma}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$. Q.E.D.

(5.2) Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ é uniformemente convergente com cada f_n uma função contínua em $U \subset \mathbb{C}$ e γ é um caminho seccionalmente regular em U , então f é contínua em U e $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$.

Dem. É consequência imediata de aplicar o resultado precedente à sucessão de somas parciais $S_N = \sum_{n=0}^N f_n(z)$ com $U_n = U$. Q.E.D.

Para assegurar convergência uniforme é muitas vezes útil o seguinte.

(5.3) Uma sucessão de funções complexas $\{f_n\}$ definidas em $U \subset \mathbb{C}$ tal que $|f_m(z) - f_n(z)| \leq |a_m - a_n|$ para $z \in U$, com $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ convergente, é uniformemente convergente em U .

Dem. É consequência imediata das sucessões em \mathbb{C} convergentes serem as sucessões de Cauchy. Q.E.D.

⁸⁶A distinção da definição de sucessão de funções convergente em cada ponto de um conjunto U e uniformemente convergente em U é apenas a troca do quantificador universal 'qualquer que seja' do início dos quantificadores na definição para o fim, ou seja de $\forall z \in U \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall z \in U : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Um caso particular simples é: se $|f_n(z)| \leq M|a_n|$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e alguma constante $M > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente (**teste-M de Weierstrass**). Este teste só se aplica para séries absolutamente convergentes, mas o campo de aplicação do resultado anterior é mais amplo.

5.4 Séries de potências

As **séries de potências** complexas são da forma

$$(5.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

com $z, a, c_n \in \mathbb{C}$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Diz-se que é uma **série de potências centrada no ponto a** e chama-se a $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ sucessão dos **coeficientes da série de potências**.

Com $a, c_n \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixos, se $C \subset \mathbb{C}$ designa o conjunto de pontos z em que a série (5.4) converge, a **soma da série define uma função** $S: C \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Para uma série de potências complexa centrada em a existe um círculo aberto $B_R(a)$ com raio $R > 0$ e centro em a em que a série converge e em cujo exterior diverge, ou a série converge em todo o plano complexo (designando $B_{\infty}(a) = \mathbb{C}$ pode-se dizer que converge em $B_R(a)$ com $R = +\infty$), ou converge com $z = a$ e diverge com $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ (designando $B_0(a) = \{a\}$ pode-se dizer que converge em $B_R(a)$ com $R = 0$), e que a convergência é uniforme em cada círculo fechado com centro em a contido em $B_R(a)$. O valor de R é dado pelo **limite superior** (diz-se “lim sup”) de sucessões de números reais, definido por $\overline{\lim} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{m > n} u_m$, como indicado no resultado seguinte.

(5.5) Círculo de convergência de série de potências:

Uma série de potências complexa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ com

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

e $R = 0$ ou $= +\infty$ conforme o denominador é, resp., $= +\infty$ ou $= 0$, é:

1. uniformemente convergente em $\text{cl } B_r(a)$ se $0 < r < R$,
2. absolutamente convergente em cada $z \in B_R(a)$,
3. divergente em cada $z \in \mathbb{C} \setminus \text{cl } B_R(a)$,

em que $B_0(a) = \{a\}$ e $B_{\infty}(a) = \mathbb{C}$.

Se $L = \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ existe, então $R = \frac{1}{L}$.

Dem. A prova baseia-se no teste da raiz para convergência de séries, que, por seu lado, se baseia na convergência de progressões geométricas de números reais com razão < 1 e divergência com razão ≥ 1 .

1. Se $0 < r < r' < R$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$ implica $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{r'}$. Portanto, para $z \in \text{cl } B_r(a)$ é $|z-a| < r$ e $|c_n(z-a)^n| < \left(\frac{r}{r'}\right)^n$ para $n > M$. A

série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{r}{r'} < 1$, pelo que é convergente. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ é absolutamente convergente e, do teste-M de Weierstrass no final da secção precedente, é uniformemente convergente em $\text{cl } B_r(a)$ com $0 < r < R$.

2. Foi provada na prova de 1 no parágrafo precedente.

3. Se $z \in \mathbb{C} \setminus \text{cl } B_R(a)$ e $R < \rho < |z-a|$, existe $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande tal que $\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{\rho}$. Logo, $|c_n(z-a)^n| > \frac{|z-a|^n}{\rho^n} > 1$ para infinitos termos, pelo que $\{c_n(z-a)^n\}$ não converge para 0 e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ diverge.

Se $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ existe, é $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|c_n(z-a)^n|} = L|z-a|$, e o teste da razão para séries reais implica convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n|$ se $L|z-a| < 1$ e divergência se $L|z-a| > 1$, pelo que, dos pontos precedentes, $R = \frac{1}{L}$. *Q.E.D.*

Chama-se **raio de convergência da série** de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ a⁸⁷ $R = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$, e $R = 0$ ou $+\infty$ conforme o denominador é, resp., $+\infty$ ou 0, e chama-se a, resp., $B_R(a)$, $B_0(a) = \{a\}$, $B_{\infty}(a) = \mathbb{C}$, **círculo de convergência da série** de potências.

A convergência uniforme de uma série de potências centrada em a em $\text{cl } B_r(a)$, com $0 < r < R$ em que R é o raio de convergência da série, conjugada com (5.2) garante que a série define uma função contínua em $B_R(a)$ e integrais em caminhos seccionalmente regulares em $\text{cl } B_r(a)$ podem ser calculados integrando a série termo a termo, o que se usa abaixo para provar que funções Holomorfas são representáveis por séries de potências.

Em pontos da fronteira do círculo de convergência uma série de potências complexa pode ser ou não convergente. Por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^a} z^n$ com $a > 0$ tem raio de convergência 1 e é absolutamente convergente se $a > 1$ e divergente se $0 < a \leq 1$ em todos pontos da fronteira do círculo de convergência. Em qualquer ponto da fronteira do círculo de convergência em que a série converge verifica-se a propriedade seguinte⁸⁸.

(5.6) **Teorema de limite de Abel:** Se $R > 0$ é o raio de convergência da série complexa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ que converge em $z = z_0 = a + Re^{i\theta_0}$, com $\theta_0 \in \mathbb{R}$, e f_M é a restrição da soma da série ao conjunto $S_M \cup \{z_0\}$, em que $S_M = \{z \in B_R(a) : \frac{|R - e^{-i\theta_0}(z-a)|}{R - |z-a|} \leq M\}$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} f_M(z) = f(z_0)$.

Dem. Se $R > 0$ é o raio de convergência da série complexa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ que converge em $z = z_0 = a + Re^{i\theta_0}$, com $\theta_0 \in \mathbb{R}$, e f_M é a restrição da soma da série ao conjunto $S_M \cup \{z_0\}$, em que $S_M = \{z \in B_R(a) : \frac{|R - e^{-i\theta_0}(z-a)|}{R - |z-a|} \leq M\}$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} f_M(z) = f(z_0)$. Pode-se supor sem perda de generalidade $a = 0$,

⁸⁷ Esta é a **Fórmula de Hadamard** para o raio de convergência de séries de potências.

⁸⁸ Os conjuntos S_M no enunciado deste teorema são a intersecção do círculo de convergência com um ângulo $< \pi$ simétrico em relação ao diâmetro do círculo que passa em z_0 . A um ângulo deste tipo chama-se **Ângulo de Stolz**. Stolz, Otto (1842-1905).

$z_0 = 1$, pois tal obtém-se com uma mudança de variáveis por translação da origem para o ponto a seguida de uma rotação de ângulo $-\theta_0$ em torno da origem e de uma divisão por R . Com esta simplificação a série é $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ com $z_0 = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergente e $S_M = \{z \in B_1(0) : \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq M\}$, e, também sem perda de generalidade, pode-se supor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0$, pois pode-se subtrair a c_0 a soma da série se não for 0. Os termos da sucessão de somas parciais da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ são $s_k(z) = \sum_{n=0}^k c_n z^n$, pelo que $c_k = s_k(1) - s_{k-1}(1)$ para $k \in \mathbb{N}$, e, agrupando termos como indicado,

$$\begin{aligned} s_k(z) &= \sum_{n=0}^k c_n z^n = \sum_{n=0}^k [s_n(1)z^n - s_{n-1}(1)z^n] \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} s_n(1)(z^n - z^{n+1}) + s_k z^k = (1-z) \sum_{n=0}^{k-1} s_n(1)z^n + s_k z^k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k z^k = 0$, $f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n(1)z^n$. Como $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_n(1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 0$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow |s_n(1)| < \varepsilon$, pelo que $|\sum_{k=N}^{\infty} s_k(1)z^k| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} |z|^n$. Esta série é geométrica com razão $|z|$ e, como $|z| < 1$ para $z \in S_M$,

$$|f(z)| \leq |1-z| \left(\left| \sum_{k=0}^{N-1} s_k(1)z^k \right| + \varepsilon \frac{|z|^N}{1-|z|} \right) \leq |1-z| \left(\sum_{k=0}^{N-1} |s_k(1)z^k| + M\varepsilon \right), \quad z \in S_M.$$

Como $\lim_{z \rightarrow 1} |1-z| \sum_{k=0}^{N-1} s_k(1)z^k = 0$, é $\lim_{z \rightarrow 1} |f(z)| \leq M\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, pelo que $\lim_{z \rightarrow 1} |f(z)| = 0 = f(1)$. Q.E.D.

(5.7) Exemplos:

1. Considera-se a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$, que é $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ com $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. De (5.5), como $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, o raio de convergência da série é $R = 1$. Como $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \right)' = (-z)^{n-1}$ e a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1}$ é uma série de funções contínuas uniformemente convergente em $\text{cl } B_r(0)$, com $0 < r < 1$, de (5.2), pode ser integrada termo a termo em qualquer caminho seccionalmente regular em $\text{cl } B_r(0)$. Como para $|z| < 1$ é $\sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z}$, integrando ambos os lados no caminho $\gamma: [-x, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = t$, com $0 < x < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-x}^0 (-t)^{n-1} dt = \int_{-x}^0 \frac{1}{1+t} dt$, o que dá $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$. Como a série alternada com $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$, é convergente porque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, do teorema de limite de Abel precedente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n = -\lim_{x \rightarrow -1} \log(1-x) = -\log 2$, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

2. A série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}} z^{2k-1}$ é $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ com $c_{2k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}}$ e $c_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^{k-1}}} = 1$, pelo que o raio de convergência é $R = 1$. Como $\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}} z^{2k-1} \right)' = (-1)^{k+1} z^{2(k-1)} = (-z^2)^{k-1}$, analogamente ao exemplo 1, considera-se $\sum_{k=1}^{\infty} (-z^2)^{k-1} = \frac{1}{1+z^2}$. Integrando am-

bos os lados desta igualdade no caminho γ , $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} x^{2k-1} = \arctan x$. Para $x = -1$ a série no lado esquerdo desta igualdade é a série alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$, que converge pois $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k-1} = 0$, e, do teorema de limite de Abel, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \arctan x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. A série de potências geométrica de razão z , $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ é convergente se e só se $|z| < 1$ e neste caso $\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Apesar da divergência da série fora do círculo aberto com raio 1 e centro na origem, a função no lado direito está definida e é Holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, pelo que *pode ser que uma função possa ser estendida como função Holomorfa para além do círculo de convergência de uma sua série de potências.*

5.5 Definição e propriedades básicas de funções analíticas

Diz-se que uma função complexa definida num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **função Analítica**⁸⁹ em Ω se para cada círculo aberto $B_r(a) \subset \Omega$ existe uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ centrada em a com soma $f(z)$ para cada $z \in B_r(a)$ (Figura 5.1). Assim, as funções Analíticas são as funções representáveis por séries de potências.

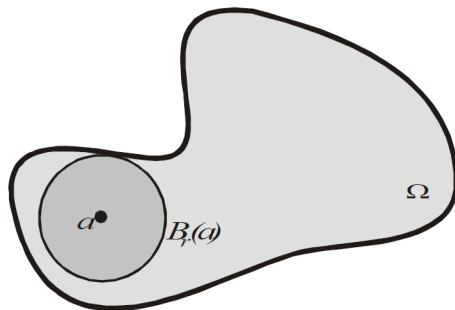


Figura 5.1: Analiticidade de f em Ω : a série de Taylor em a dá f em $B_r(a) \subset \Omega$

O conjunto das funções Analíticas num subconjunto Ω de \mathbb{C} é um espaço linear complexo com a adição e a multiplicação por escalares complexos usuais. O resultado seguinte dá uma classe de funções Analíticas definida por integrais que será usado várias vezes. No capítulo seguinte estabelece-se que também são Analíticas as funções obtidas por limites de sucessões e séries de funções Analíticas uniformemente convergentes em subconjuntos limitados e fechados do domínio da função definida pelo limite. Este processo de passagem ao limite de sucessões e séries de funções que estende as funções polinomiais às funções Analíticas, aplicado a estas não leva a outra extensão.

⁸⁹ Alguns autores preferem definir função Analítica como função diferenciável, identificando na definição Analiticidade e Holomorfia. Prefere-se a definição de Analiticidade pela existência de representações em séries de potências, seguindo a opção de K. Weierstrass e de E. Cartan.

(5.8) Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é conjunto aberto, γ é caminho seccionalmente regular em \mathbb{C} e g é função complexa definida e absolutamente integrável em γ , então a função f definida por $f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w-z} dw$ é Analítica em $\Omega \setminus \gamma^*$ e, em cada círculo aberto $B_r(a) \subset \Omega \setminus \gamma^*$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n, \quad z \in B_r(a).$$

Dem. Se $B_r(a) \subset \Omega \setminus \gamma^*$, como $|\frac{z-a}{w-a}| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$ para $z \in B_r(a)$ e $w \in \gamma^*$, para cada $z \in B_r(a)$ fixo a série geométrica em função de w , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} = \frac{1}{w-z}$ converge uniformemente em γ^* . Com $S_z(w) = \frac{1}{w-z}$ e $S_{z,N}(w) = \sum_{n=0}^N \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para $N > M$ e $w \in \gamma^*$ é $|S_{z,N}(w) - S_z(w)| < \varepsilon$ e

$$\left| \int_{\gamma} S_{z,N}(w) g(w) dw - \int_{\gamma} S_z(w) g(w) dw \right| \leq \int_{\gamma} |S_{z,N}(w) - S_z(w)| |g(w)| dw \leq \varepsilon \int_{\gamma} |g(w)| dw.$$

Logo,

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \left(\frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n, \quad z \in B_r(a),$$

pelo que f é Analítica em $B_r(a)$. Portanto, f é Analítica em $\Omega \setminus \gamma^*$. *Q.E.D.*

O resultado seguinte estabelece que funções Analíticas são indefinidamente diferenciáveis com derivadas que podem ser obtidas derivando termo a termo as correspondentes séries de potências.

(5.9) Toda função Analítica f num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é indefinidamente diferenciável em Ω (em particular $f \in H(\Omega)$) e as derivadas $f^{(k)}$ de qualquer ordem $k \in \mathbb{N}$ são Analíticas em Ω . Se

$$(5.10) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in B_r(a) \subset \Omega,$$

então

$$(5.11) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}, z \in B_r(a),$$

$$(5.12) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Dem. Os raios de convergência da série (5.10) e das séries (5.11) são, resp., $R_0 = 1/\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ e $R_k = 1/\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(n!/(n-k)!)|c_n|}$, pelo que, como⁹⁰ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!/(n-k)} = 1$, $R_k = R_0$ para $k \in \mathbb{N}$.

Se for provado que f é diferenciável em a e tem derivada dada pela fórmula (5.11) com $k=1$, a validade desta fórmula para derivadas de ordem superior obtém-se por aplicação sucessiva da fórmula para a 1ª derivada. A fórmula (5.12) para os coeficientes da série de f é (5.11) com $z=a$.

⁹⁰É $1 < \frac{n!}{(n-k)!} < kn$, $1 < \sqrt[n]{\frac{n!}{(n-k)!}} < \sqrt[n]{k} \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Resta provar que f é diferenciável em a e tem derivada dada por (5.11) com $k = 1$. Sem perda de generalidade, $a = 0$ (translação de variáveis). Fixa-se $z \in B_{R_0}(0)$ e $r > 0$ tal que $|z| < r < R_0$ e a função g definida pelo lado direito de (5.11) com $k=1$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. Para $w \in B_r(0) \setminus \{z\}$,

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{w^n - z^n}{w-z} - n z^{n-1} \right).$$

Para $n = 1$ a expressão entre parêntesis é 0 e para $n \geq 2$, como se tem $w^n - z^n = (w-z) \sum_{k=1}^n w^{n-k} z^{k-1}$,

$$\frac{w^n - z^n}{w-z} - n z^{n-1} = \sum_{k=1}^n w^{n-k} z^{k-1} - n z^{n-1}.$$

Verifica-se

$$\begin{aligned} (w-z) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{n-k-1} z^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} k w^{n-k} z^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k w^{n-k-1} z^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k w^{n-k} z^{k-1} - \sum_{k=1}^n (k-1) w^{n-k} z^{k-1} = \sum_{k=1}^n w^{n-k} z^{k-1} - n z^{n-1}. \end{aligned}$$

Com as três últimas fórmulas obtém-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z) \right| &\leq |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n-1} k |w|^{n-k-1} |z|^{k-1} \\ &\leq |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = |w-z| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} |c_n| r^{n-2}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1)/2} = 1$, é $\overline{\lim} \sqrt[n]{[n(n-1)/2] |c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$, e como $r < R_0$, a série no último termo é convergente, pelo que o limite desse termo quando $w \rightarrow z$ é 0 e, portanto, $f'(z) = g(z)$. Q.E.D.

Este resultado estabelece que *para uma função ser representável por uma série de potências centrada num ponto $a \in \mathbb{C}$ tem de ser indefinidamente diferenciável e a série é a série de Taylor da função centrada em a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

É possível ter séries de Taylor de funções reais indefinidamente diferenciáveis que não convergem para essas funções, *i.e.* há funções reais indefinidamente diferenciáveis que não são Analíticas (*e.g.* as derivativas de todas ordens em 0 da função $C^\infty e^{-1/x^2}$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e 0 em $x = 0$ são nulas, todos termos da série de Taylor em 0 são 0 e $e^{-1/x^2} \neq 0$ para $x \neq 0$). No capítulo seguinte prova-se que tal não pode acontecer para funções complexas. Para estas funções basta existir a 1ª derivada num conjunto aberto para que a função seja indefinidamente diferenciável e Analítica nesse conjunto.

5.6 Zeros de funções analíticas

O resultado seguinte estabelece que o conjunto $Z(f)$ dos zeros de uma função f não identicamente zero Analítica numa região é um conjunto de pontos isolados e cada zero tem uma **ordem** ou **multiplicidade**, *i.e.* um número $m \in \mathbb{N}$ que é o menor inteiro positivo para que a derivada de ordem m da função nesse zero não se anula.

(5.13) Se f é função Analítica complexa numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ onde não é identicamente zero, então o conjunto $Z(f)$ dos zeros de f em Ω não tem pontos limite em Ω , *i.e.* não existe qualquer sucessão $\{z_n\} \subset Z(f) \setminus \{z\}$ convergente para $z \in \Omega$, $Z(f) \cap K$ é finito para todo $K \subset \Omega$ compacto, $Z(f)$ é finito (possivelmente \emptyset) ou infinito numerável, e a cada $a \in Z(f)$ corresponde um único $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$, com g Analítica em Ω e $g(a) \neq 0$; m é a ordem do zero a de f .

Dem. Designa-se A o conjunto dos pontos limite de $Z(f)$ em Ω . Como f é contínua em Ω , $A \subset Z(f)$ e pontos limite de A pertencem a A que, portanto, é fechado.

Se $a \in Z(f)$ e $r > 0$ é tal que $B_r(a) \subset \Omega$, como f é Analítica em Ω , tem representação em série de potências $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ para $z \in B_r(a)$, e tem-se a alternativa seguinte: (i) $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou (ii) existe um menor inteiro $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_m \neq 0$.

No caso (i) $f(z) = 0$ para $z \in B_r(a)$, pelo que $B_r(a) \subset A$ e $a \in \text{int } A$.

No caso (ii) a função

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & , \text{ se } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & , \text{ se } z = a \end{cases}.$$

satisfaz $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z-a)^k$ para $z \in B_r(a)$; logo, g é Analítica em Ω e $g(a) = c_m \neq 0$. Da continuidade de g , existe vizinhança de a em que $g \neq 0$, e a é ponto isolado de $Z(f)$, pois $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para $z \in \Omega$.

Como no caso (ii) a é ponto isolado de $Z(f)$, se $a \in A$, é o caso (i) e, portanto, $a \in \text{int } A$, pelo que A é conjunto aberto.

Como A é conjunto aberto e fechado, com $B = \Omega \setminus A$ é $\Omega = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ com A e B abertos e disjuntos, e, como Ω é conexo, tem de ser $A = \Omega$ ou $A = \emptyset$. Se $A = \Omega$, f é identicamente zero em Ω e $Z(f) = \Omega$, e se $A = \emptyset$, como toda sucessão de pontos distintos num conjunto compacto tem pelo menos um ponto limite nesse conjunto, $Z(f)$ tem um n.º finito de pontos em cada subconjunto compacto de Ω . Como qualquer subconjunto aberto de \mathbb{C} é união numerável de uma família expansiva de conjuntos compactos⁹¹, $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, em que $K_n \subset K_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $Z(f)$ é finito ou é infinito numerável.

Prova-se por indução que as derivadas de $f(z) = (z-a)^m g(z)$ são

$$f^{(k)}(z) = \frac{m!}{(m-k)!} (z-a)^{m-k} g(z) + (z-a)^{m-k+1} h_k(z), \quad k \in \mathbb{N}, k \leq m,$$

⁹¹Ver exercícios do apêndice I.

em que cada h_k é Analítica em Ω . Logo, $f^{(k)}(a) = 0$ para $k < m$, e $f^{(m)}(a) = m!g(a)$. m é o menor $k \in \mathbb{N}$ para que $f^{(k)}(a) \neq 0$. *Q.E.D.*

Uma consequência é o resultado seguinte obtido em 1851 por B. Riemann.

(5.14) **Teorema de Unicidade de Funções Analíticas:** *Se f, g são funções Analíticas complexas numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f = g$ num conjunto com um pelo menos um ponto limite em Ω , então $f = g$ em Ω .*

Dem. $f - g$ é Analítica em Ω e $Z(f - g)$ tem pelo menos um ponto limite em Ω . Do resultado precedente, $Z(f - g) = \Omega$ e $f = g$ em Ω . *Q.E.D.*

Este resultado garante que uma função Analítica numa região é determinada pelos seus valores em qualquer conjunto que tenha pelo menos um ponto limite da sua região de analiticidade.

Logo, duas funções diferentes Analíticas numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ só podem coincidir num conjunto finito de pontos em cada subconjunto compacto de Ω , e num conjunto numerável de pontos de Ω sem pontos limite. Em regiões desconexas com infinitas componentes conexas duas funções diferentes Analíticas só podem coincidir num conjunto numerável de pontos, porque as componentes conexas de um subconjunto aberto de \mathbb{C} são numeráveis.

5.7 Fórmula de Parseval para séries de potências

Nesta secção obtêm-se propriedades importantes de funções Analíticas complexas que podem ser provadas com a Fórmula de Parseval para séries de potências complexas, que dá que a média quadrática da soma de uma série de potências sobre uma circunferência de raio menor do que o raio de convergência da série é igual à soma da série dos quadrados dos módulos dos termos da série inicial num ponto da circunferência.

(5.15) **Fórmula de Parseval para séries de potências:**

Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ para $z \in B_R(a)$, em que $R > 0$ é o raio de convergência da série, e $0 < r < R$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Dem. Define-se⁹² $g(\theta) = f(a + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$. Para $0 < r < R$ esta série é uniformemente convergente com $\theta \in [-\pi, \pi]$. Considera-se o produto interno para funções contínuas em $[-\pi, \pi]$ $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \bar{\psi}$. Das propriedades do produto interno e como séries uniformemente convergentes podem

⁹²Com $(x_n, y_n) = c_n$, é uma série trigonométrica complexa com partes real e imaginária que são séries trigonométricas reais, chamadas **séries de Fourier**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n [(x_n \cos(n\theta) - y_n \sin(n\theta)) + i(x_n \sin(n\theta) + x_n \cos(n\theta))].$$

ser integradas termo a termo (5.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta &= \langle g, g \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \right\rangle \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} c_m \overline{c_n} r^{m+n} \langle e^{im\theta}, e^{in\theta} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}, \end{aligned}$$

pois

$$\langle e^{im\theta}, e^{in\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & , \text{ se } m = n \\ 0 & , \text{ se } m \neq n. \end{cases}$$

Q.E.D.

Este resultado permite obter majorações simples para o valor e as derivadas de qualquer ordem de funções Analíticas, como as do resultado seguinte.

(5.16) Estimativas de Cauchy: *Se f é uma função Analítica num círculo aberto $B_R(a)$, com $R > 0$, e $|f(z)| \leq M$ para $z \in B_R(a)$,*

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{Mk!}{R^k}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dem. Da Fórmula de Parseval para séries de potências com $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2.$$

Portanto, é $|c_n|^2 r^{2n} \leq M^2$ e $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $r \in]0, R[$ é arbitrário, $|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$. Da fórmula (5.12),

$$|f^{(k)}(a)| \leq k! |c_k| \leq \frac{Mk!}{R^k}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Q.E.D.

Segue-se outra importante consequência da Fórmula de Parseval.

(5.17) Teorema de Liouville: *Funções inteiras limitadas são constantes.*

Dem. No resultado precedente $R > 0$ pode ser arbitrariamente grande, pelo que $k!|c_k| = f^{(k)}(a) = 0$ e $c_k = 0$, para $k \in \mathbb{N}$. Logo, $f = c_0$. *Q.E.D.*

A hipótese do Teorema de Liouville pode ser enfraquecida para funções Analíticas com módulo sublinear como se segue.

(5.18) *As funções Analíticas $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $|f(z)| \leq C + M|z|^a$ para $z \in \mathbb{C}$, com $0 \leq a < 1$ e $C, M \geq 0$ são constantes.*

Dem. Das estimativas de Cauchy, $|f^{(k)}(z)| \leq \frac{(C+MR^a)k!}{R^k} = \frac{Ck!}{R^k} + \frac{Mk!}{R^{k-a}}$ para $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $R > 0$. Logo, $f^{(k)} = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ e $f = f(0)$. *Q.E.D.*

Ainda outra consequência da Fórmula de Parseval para séries de potências é que o módulo de uma função Analítica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ não pode ter máximos locais a não ser quando a função é constante⁹³ (Figura 5.2).

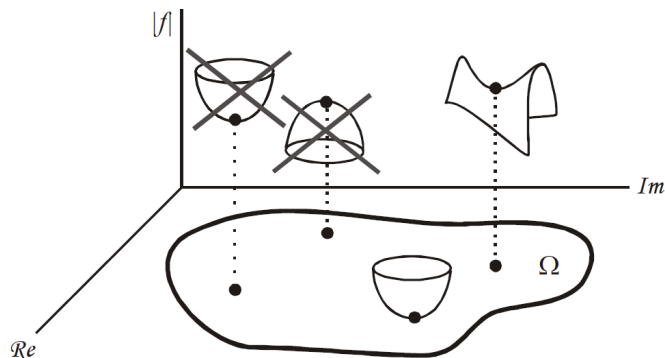


Figura 5.2: Princípio de Módulo Máximo em regiões e do corolário para mínimos

(5.19) **Princípio de Módulo Máximo:** *Se f é função Analítica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, $|f|$ não tem máximos locais em Ω a não ser que f seja constante; se $K \subset \Omega$ é compacto e f não é constante em K , o máximo de $|f|$ em K é assumido em pontos da fronteira de K .*

Dem. Seja $\text{cl } B_r(a) \subset \Omega$, com $r > 0$, tal que $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Da Fórmula de Parseval para séries de potências em (5.15) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2,$$

e, portanto, $c_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, e $f(z) = c_0 = f(a)$ para $z \in \text{cl } B_r(a)$. Da Unicidade de funções Analíticas (5.14), f é constante em Ω .

Como $|f|$ é contínua no conjunto compacto K , do teorema de Weierstrass para extremos de funções contínuas, assume um valor máximo em K . Este valor não pode ser assumido no interior de K porque $|f|$ teria máximos locais em pontos interiores a Ω . Logo, o valor máximo é assumido em ∂K . *Q.E.D.*

O Princípio de Módulo Máximo pode ser provado directamente para funções Holomorfas numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ com a Propriedade de Valor Médio (4.13), que implica $|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta$ se $\text{cl } B_r(a) \subset \Omega$, pois, se $|f|$ tem um máximo local em $a \in \Omega$, existe um círculo aberto $B_R(a)$, com $R > 0$, em que $|f| \leq |f(a)|$ e se existissem $r \in]0, R[$ e $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tais que $|f|(a + re^{i\theta}) < |f(a)|$ com $\theta = \theta_0$, da continuidade de f esta desigualdade também se verificaria para valores de θ numa vizinhança de θ_0 e a média de $|f|$ na circunferência com centro a e raio r pequeno seria $< |f(a)|$, em contradição com a Propriedade de Valor Médio. Logo, $|f| = |f(a)|$ em $B_R(a)$, e, de (3.12), f é constante em $B_R(a)$. O resto é como no final da prova do resultado precedente.

⁹³ Este resultado apareceu provado na tese de doutoramento de B. Riemann, em 1851, com uma demonstração diferente da que aqui se apresenta.

O resultado seguinte estabelece que o módulo de uma função Analítica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ onde não é constante só pode ter mínimos locais em pontos onde se anule (Figura 5.2).

(5.20) **Corolário do Princípio de Módulo Máximo:** *Se f é função Analítica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, então $|f|$ só tem mínimos locais em pontos de Ω em que se anula ou é constante em Ω ; se $K \subset \Omega$ é compacto e f não é constante e não tem zeros em K , o mínimo de f em K é em ∂K .*

Dem. Os pontos em que f se anula são mínimos locais de $|f|$. De (5.13), o conjunto $Z(f)$ dos zeros de f em Ω verifica a alternativa: (i) $Z(f) = \Omega$, ou (ii) $Z(f)$ não tem pontos limite em Ω . No caso (i) $|f|$ tem mínimo local zero em todos os pontos de Ω . No caso (ii) $Z(f)$ é fechado e $U = \Omega \setminus Z(f)$ é aberto. Se A, B são conjuntos disjuntos fechados relativamente a U tais que $U = A \cup B$, $A \cup Z(f)$ e B são conjuntos disjuntos fechados relativamente a Ω e $\Omega = (A \cup Z(f)) \cup B$. Como Ω é um conjunto conexo, tem de ser $B = \emptyset$ ou $B = \Omega$, o que implica que U é conexo, e, como é aberto, é uma região em \mathbb{C} . Como f não se anula na região U , o Princípio de Módulo Máximo em (5.19) pode ser aplicado a $\frac{1}{f}$ e obtém-se que $\frac{1}{|f|}$ não tem máximos locais. Logo, $|f|$ não tem mínimos locais em U a não ser que seja constante em U .

Do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, $|f| > 0$ assume um valor mínimo no conjunto compacto K . Como este valor não pode ser assumido em pontos interiores a K porque, então, $|f|$ teria mínimos locais não nulos nesses pontos de Ω , o que não pode acontecer, o valor mínimo em K é assumido em pelo menos um ponto de ∂K . Q.E.D.

Exercícios

- 5.1 Prove: Uma função Analítica em \mathbb{C} que satisfaz $|f(z)| \leq |z|^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z|$ grande é polinomial.
- 5.2 Desenvolva $\frac{1}{1+z^2}$ em série de potências centrada em cada $a \in \mathbb{R}$ e determine o raio de convergência.
- 5.3 Prove: Se $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, em que a série tem raio de convergência $R > 1$, e $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, então o valor mínimo do desvio quadrático médio de um polinómio P de grau $n \in \mathbb{N}$ a f , $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})|^2 d\theta$, é $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}|^2$ e é assumido se e só se $P = S_n$.
- 5.4 Determine todos os valores de \mathbb{C} para os quais a série dada é convergente:
 a) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{z-2}\right)^k$ e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^k$ f) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kz}$.
- 5.5 Calcule o raio de convergência da série dada, para $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$:
 a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k}\right)^k$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} (kz^k)^k$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} (k2^k)^n z^k$ d) $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^{-k}$.
- 5.6 a) Mostre que a função complexa definida por $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ pode ser estendida por continuidade a $z = 0$ e que essa extensão \tilde{f} é Analítica num círculo centrado na origem. Determine $\tilde{f}(0)$ e o máximo raio de círculos centrados em 0 em que a extensão é Analítica. Designa-se $B_n = \tilde{f}^{(n)}(0)$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
 b) Prove: $z \cot z = iz + \tilde{f}(i2z)$ nos pontos da intersecção dos domínios das funções nos dois membros da igualdade e $z \cot z$ pode ser estendida por continuidade a $z = 0$, a igualdade também válida para essa extensão em $z = 0$, e em consequência

$B_{2k+1} = 0$ para $k \in \mathbb{N}$ e $B_1 = -\frac{1}{2}$.

c) Prove: $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$, que permite calcular recursivamente os números B_{2k} , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, chamados **números de Bernoulli**⁹⁴.

(Sugestão: Multiplique as séries de Taylor no ponto 0 de \tilde{f} e $1/\tilde{f}$).

d) Prove: A sucessão de números de Bernoulli é uma sucessão ilimitada de números racionais que começa com os números:

$$B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}.$$

e) Mostre que a série de Taylor no ponto 0 para a extensão por continuidade à origem de $\frac{z}{2} \cot \frac{z}{2}$ é $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$.

f) Obtenha os coeficientes das fórmulas de Taylor no ponto 0 para $\tan z$ e para a extensão por continuidade de $\frac{z}{\sin z}$ a $z=0$ em termos dos números de Bernoulli⁹⁵.

5.7 Mostre que se f é Analítica numa vizinhança de 0, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{(-1)^n}{n^3}$.

5.8 Prove: Se f, g são funções Analíticas numa região de \mathbb{C} onde $fg = 0$, pelo menos uma é 0 na região.

5.9 Prove: Se $f, g, f\bar{g}$ são funções Analíticas numa região de \mathbb{C} , $f=0$ ou g é constante na região.

5.10 Prove: Uma função Analítica em \mathbb{C} tal que as representações em série de potências centradas em qualquer ponto de \mathbb{C} têm pelo menos um coeficiente 0 é polinomial.

5.11 Prove: Se f, g são funções Analíticas e sem zeros num círculo aberto $B_r(a)$ contínuas em $\text{cl } B_r(a)$ e $|f| = |g|$ em $\partial B_r(a)$, $f = \lambda g$ em $\text{cl } B_r(a)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$.

5.12 Prove: Se f é Analítica em $B_r(a)$ e $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$ para $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$, f é injectiva em $B_r(a)$.

Exercícios com aplicações a hidrodinâmica, electrostática e propagação de calor em equilíbrio

5.13 Consideram-se escoamentos hidrodinâmicos planos estacionários, solenoidais e irrotacionais⁹⁶ (ver exercício 3.26) com potencial de campo de velocidades φ , função de corrente ψ e potencial complexo $f = (\varphi, \psi)$.

⁹⁴ Jakob Bernoulli (1665-1705) descobriu-os para calcular $\sum_{j=1}^n j^k$ para $k, n \in \mathbb{N}$ (só publicado postumamente em 1713) com as fórmulas correctas para k de 1 a 10, sem prova.

⁹⁵ Estas séries aparecem no livro de L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748.

⁹⁶ Quando considerados em \mathbb{R}^3 invariantes por translações ortogonais ao plano do escoamento. Estas situações de hidrodinâmica correspondem a situações de electrostática. As alíneas deste exercício correspondem aos campos eléctricos de:

- (a) um filamento condutor cilíndrico carregado perpendicular ao plano na origem;
- (b) um par de filamentos condutores cilíndricos carregados perpendiculares ao plano e simétricos em relação à origem;
- (c) um dipolo bifilar eléctrico perpendicular ao plano na origem;
- (d) um filamento condutor cilíndrico carregado perpendicular a um semiplano limitado por um isolador eléctrico perfeito plano;
- (e) um par de filamentos condutores cilíndricos perpendiculares ao plano com cargas iguais, sobreposto a um campo eléctrico uniforme; em alternativa, um campo eléctrico uniforme no infinito na presença de um isolador eléctrico perfeito cilíndrico perpendicular ao plano e com secção igual à oval de Rankine;
- (f) um dipolo bifilar eléctrico perpendicular ao plano na origem sobreposto a um campo eléctrico uniforme; em alternativa, um campo eléctrico uniforme no infinito com um isolador eléctrico perfeito cilíndrico de revolução perpendicular ao plano;
- (g) uma corrente eléctrica constante num filamento rectilíneo perpendicular ao plano;
- (h) um canto definido por dois semiplanos isoladores eléctricos perfeitos intersectando-se ao longo de uma recta perpendicular ao plano na origem.

Podem-se obter outras situações de electrostática trocando isoladores por condutores e funções potenciais por funções de corrente. Também se obtêm situações de propagação de calor em equilíbrio substituindo o potencial da velocidade por temperatura e as linhas de fluxo de fluido por linhas de fluxo de calor. Rankine, William (1820-1872).

a) **Fonte ou sumidouro.** Uma fonte ou um sumidouro é uma singularidade de que radiam linhas de corrente (ψ constante) e em torno da qual equipotenciais da velocidade (φ constante) são circulares. Mostre que um potencial complexo para uma fonte de magnitude Q em 0 é $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log z$ (Figura 5.3 à esquerda).

b) **Sobreposição de fonte e sumidouro.** Mostre que um potencial complexo de um fluxo sobreposição linear de uma fonte e um sumidouro de magnitudes $\pm Q$ nos pontos, resp., $\pm re^{i\theta}$, com $r, \theta \in \mathbb{R}$, é $f(z) = \frac{Q}{2\pi} [\log(z - re^{i\theta}) - \log(z + re^{i\theta})]$ (Figura 5.3 ao centro).

c) **Dipolo.** Chama-se dipolo ao limite do par fonte-sumidouro da alínea anterior, quando $r \rightarrow 0$ e $\frac{Qr}{\pi} = m$ é constante. Mostre que um potencial complexo é $f(z) = -\frac{me^{i\theta}}{z}$ (Figura 5.3 à direita).

d) **Fonte perto de parede.** Mostre que um potencial complexo de um fluxo no semiplano complexo superior resultante de uma fonte de magnitude Q situada no ponto ia do eixo imaginário (o eixo real é uma “parede”, *i.e.* a componente da velocidade na direcção normal ao eixo real é zero nos pontos deste eixo) é, para $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$ (Figura 5.4 à esquerda)

$$f(x + iy) = \frac{Q}{4\pi} \left[\log((x^2 + (y-a)^2)(x^2 + (y+a)^2)) + i2 \left(\arctan\left(\frac{y-a}{x}\right) + \arctan\left(\frac{y+a}{x}\right) \right) \right].$$

(Sugestão: Sobreposição da fonte dada com uma fonte auxiliar que é a sua imagem simétrica em relação ao eixo real. Este método é conhecido por **método das imagens**).

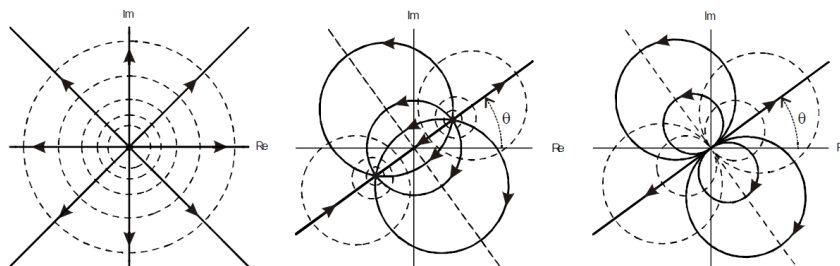


Figura 5.3: Fonte ou sumidouro, fonte e sumidouro, dipolo (com sentido inverso)

e) **Oval de Rankine.** Considere um escoamento sobreposição linear de uma fonte e um sumidouro pontuais de magnitudes $\pm Q$ nos pontos $\pm a$ do eixo real, e um escoamento uniforme (velocidade rectilínea constante) de magnitude V_∞ na paralelo ao eixo real. Mostre que um potencial complexo é (Figura 5.4 ao centro)

$$f(x + iy) = \left[V_\infty x + \frac{Q}{4\pi} \log\left(\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right) \right] + i \left[V_\infty y - \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \right].$$

Mostre que uma das linhas de corrente é oval. Observe que a corrente exterior à oval é a em torno de um obstáculo cilíndrico com secção que é a oval se a velocidade no infinito é constante na direcção e no sentido do eixo real positivo.

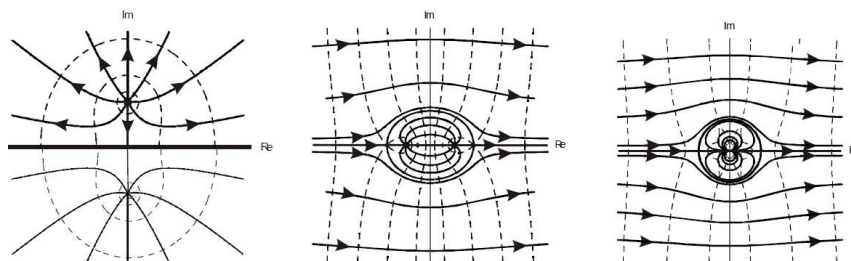


Figura 5.4: Fonte perto de parede, oval de Rankine, obstáculo cilíndrico

f) **Escoamento em torno de obstáculo cilíndrico de revolução com velocidade uniforme no infinito e circulação nula em torno do obstáculo.**

Mostre que o potencial complexo de um escoamento em torno de um obstáculo cilíndrico de revolução de eixo na origem e raio $R > 0$ com velocidade no infinito constante na direcção e no sentido do eixo real positivo e circulação em torno do obstáculo nula é $f(z) = V_\infty(z + \frac{R^2}{z})$ (Figura 5.4 à direita).

(Sugestão: Sobreposição de um fluxo uniforme com um dipolo na origem na direcção do eixo real tal que a circunferência com raio R e centro na origem é uma linha de corrente).

g) **Vórtice potencial.** Um vórtice potencial é uma singularidade pontual em torno da qual as linhas de corrente são circunferências centradas na singularidade e as equipotenciais são semirectas com origem na singularidade. Mostre que um potencial complexo é $f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \log z$, com $\frac{\Gamma}{2\pi}$ a magnitude do vórtice (Figura 5.5).

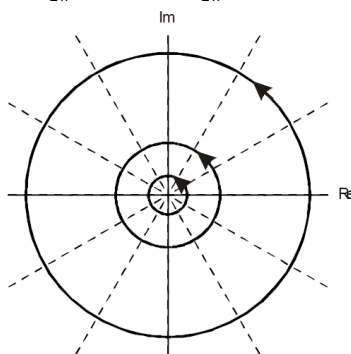


Figura 5.5: Vórtice potencial

h) **Escoamentos em cantos.** Mostre que um potencial complexo para o escoamento num canto de amplitude angular $0 < \theta < 2\pi$, com vértice na origem e um dos lados ao longo do eixo real é $f(z) = Vz^{\frac{\pi}{\theta}}$ (Figura 5.6). (Sugestão: Aplique uma transformação conforme do semiplano superior complexo no canto).

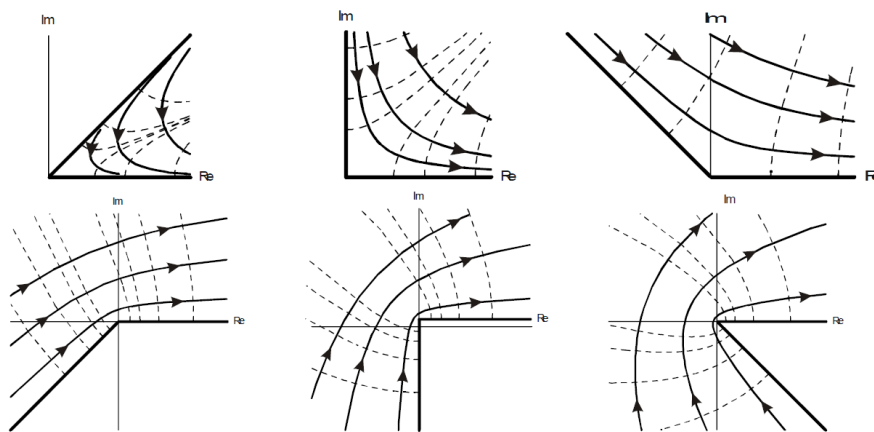


Figura 5.6: Escoamentos em cantos

5.14 Considere dois cilindros condutores paralelos de secções ortogonais circulares de raios $R > 0$ perpendiculares ao plano complexo com eixos sobre os pontos do eixo real $\pm b$ com potenciais eléctricos $\pm V$. Mostre que num plano ortogonal aos cilindros as linhas de fluxo e as linhas equipotenciais do campo eléctrico são como indicado na Figura 5.7, e que a capacidade dos condutores por unidade de comprimento é $C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1} b/R}$ farads/metro, em que ϵ é a constante dielétrica do meio.

(Sugestão: Na alínea e) do exercício anterior, obtenha equações cartesianas para as equipotenciais, observe que são circunferências e relacione a com b e R de modo às circunferências com raio R e centros em $\pm b$ serem equipotenciais, calcule a função de fluxo $\Phi = \epsilon\psi$. Calcule

a carga por unidade de comprimento integrando a função de fluxo em torno de um condutor. Obtenha a capacidade por unidade de comprimento, dividindo a carga por unidade de comprimento pelo potencial V do condutor).

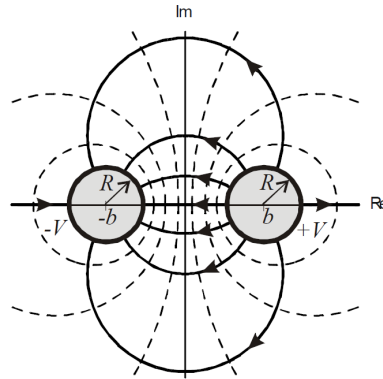


Figura 5.7: Campo elétrico de dois condutores cilíndricos paralelos ortogonais ao plano complexo

Capítulo 6

Unificação de holomorfia, teorema de Cauchy e analiticidade

6.1 Introdução

O cerne deste capítulo é a unificação de Holomorfia, validade do Teorema de Cauchy e Analiticidade, consideradas separadamente nos três capítulos precedentes com base em, resp., derivada, integral e série de potências. É uma ilustração elegante e útil do carácter especial das funções complexas.

A possibilidade de representação de funções Holomorfas em círculos por séries de potências foi comunicada por A.-L. Cauchy à Academia das Ciências de Turim em 1831. A.-L. Cauchy não justificou a integração termo a termo de uma série usada na prova, o que levou P. Chebyshev⁹⁷ a assinalar em 1844 que tal só é possível em casos particulares, dificuldade que foi ultrapassada com convergência uniforme, como referido na introdução do capítulo precedente.

Em 1886 J. Morera⁹⁸ provou um recíproco do Teorema de Cauchy, estabelecendo que funções complexas com integrais nulos sobre as fronteiras dos triângulos fechados contidos no conjunto de continuidade da função integranda são Holomorfas no interior do conjunto.

Com a contribuição de E. Goursat em 1900 que permitiu provar o Teorema de Cauchy para funções Holomorfas em conjuntos convexos sem a hipótese de continuidade das derivadas foi possível estabelecer a equivalência de Holomorfia e analiticidade, e destas com a existência de primitivas.

Neste capítulo também se prova o Teorema Fundamental da Álgebra (todo polinómio real ou complexo não constante tem pelo menos um zero complexo). Este teorema tem uma longa história. Foi previsto para polinómios com coeficientes reais por A. Girard em 1629 e foi formulado claramente em 1743 por L. Euler para utilização na resolução de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes (no ano anterior tinha escrito

⁹⁷Chebyshev, Pafnuty (1821-1894).

⁹⁸Morera, Jacinto (1856-1909).

numa carta a A. Clairaut que o resultado é “indubitável, embora eu não o possa demonstrar perfeitamente”), mas resistiu a várias tentativas de prova durante dois séculos. As 1^{as} tentativas foram para polinómios com coeficientes reais, em particular por J.R. d’Alembert em 1746, L. Euler em 1749, F.D. Foncenex em 1759, J.-L. Lagrange em 1772, P.-S. Laplace em 1795. C.F. Gauss indicou em 1799, na tese de doutoramento, falhas nessas tentativas e propôs uma prova, também incompleta por utilizar uma propriedade de curvas algébricas ainda não estabelecida. Em 1806 J.R. Argand publicou uma tentativa de prova na linha da de J.R. d’Alembert, mas também incompleta por assumir a validade do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas em subconjuntos compactos do plano, o que ainda não estava estabelecido. A ideia central de J.R. d’Alembert e J.R. Argand é a mesma das provas neste capítulo baseadas em propriedades de funções analíticas. As provas iniciadas por J.R. d’Alembert e J.R. Argand foram completadas na viragem do séc. XIX para o séc. XX com a prova do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas em conjuntos compactos⁹⁹. A provável insatisfação de C.F. Gauss com a prova na sua tese é evidenciada por ter publicado mais três artigos sobre provas do Teorema Fundamental da Álgebra, dois em 1816 com ideias diferentes e um em 1849 refinando o argumento da tese para polinómios com coeficientes complexos, mas sem resolver a lacuna referida, só superada em 1920 por A. Ostrowski. Uma das provas de C.F. Gauss de 1816 é um argumento algébrico extenso seguindo a ideia de prova de L. Euler e veio a ser a 1^a prova a ficar completa; ficou apenas pendente do teorema de valor intermédio para funções reais contínuas – Teorema de Bolzano – no essencial provado no ano seguinte por B. Bolzano, mas que, por sua vez, ficou pendente de uma definição rigorosa dos números reais, só dada em 1872 por G. Cantor, o que permitiu a K. Weierstrass completar pouco depois a prova do Teorema de Bolzano nas suas lições, publicadas pela 1^a vez em 1878, preenchendo a lacuna da prova algébrica de C.F. Gauss de 1816. Entretanto apareceram dezenas de outras provas, em geral com Análise Complexa, Topologia ou Geometria Algébrica, a ponto de vários matemáticos terem instado à descoberta de uma prova puramente algébrica¹⁰⁰. As

⁹⁹Uma prova para funções definidas em intervalos limitados fechados de números reais por K. Weierstrass foi publicada em 1878 e Maurice Fréchet (1878-1973) estendeu em 1904 o resultado para funções definidas em espaços compactos com uma noção de convergência de sucessões que inclui funções de várias variáveis reais com a distância euclidiana.

¹⁰⁰A prova de C.F. Gauss em 1816 que foi a 1^a a ser completada, embora intrincada, é tão algébrica quanto possível, pois além de Álgebra só usa o Teorema de Bolzano, que é uma propriedade minimalista de distinção entre números reais e racionais (no sentido de na definição axiomática de números reais como corpo ordenado (como os racionais) que satisfaz o axioma de todo subconjunto não vazio majorado ter supremo, este axioma poder ser substituído pelo Teorema de Bolzano) e em algum ponto esta distinção tem de surgir. Uma prova algébrica mais abstracta é com Teoria de Galois e extensão de corpos. O autor obteve em Fevereiro de 2018 uma prova com Álgebra Linear que pode ser considerada a mais elementar que existe, pois pode ser dada na parte inicial de uma 1^a disciplina de Álgebra Linear porque só usa: desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{C}^n , produto de matrizes, independência linear e o Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas em subconjuntos limitados e fechados de \mathbb{C}^n , que, tal como o Teorema de Bolzano e no mesmo sentido, é uma propriedade minimalista de distinção entre números reais e racionais (Magalhães,

provas referidas não são construtivas, *i.e.* não dão processos para calcular zeros aproximadamente. K. Weierstrass tentou obter uma prova construtiva sem sucesso; a 1ª prova construtiva só foi obtido em 1940 por H. Kneser, e depois simplificado pelo seu filho M. Kneser em¹⁰¹ 1981.

Incluem-se o Teorema da Função Inversa (toda função Holomorfa num conjunto aberto tem inversa local Holomorfa numa vizinhança de cada ponto em que a derivada não é 0 e em tal vizinhança transforma conjuntos abertos em conjuntos abertos), a caracterização local das funções Holomorfas em regiões (somadas de potências inteiras de funções invertíveis Holomorfas com constantes ou constantes), o Teorema da Aplicação Aberta (imagens de regiões por funções Holomorfas não constantes são regiões) e um resultado de K. Weierstrass em notas de 1841 (só publicadas em 1894) estabelecendo que os limites de sucessões e séries de funções analíticas uniformemente convergentes em conjuntos compactos são analíticas e podem ser indefinidamente derivadas termo a termo; em particular, o processo de extensão de funções polinomiais a funções analíticas por séries uniformemente convergentes não conduz a novas funções quando aplicado a funções analíticas.

6.2 Holomorfia, teorema de Cauchy e analiticidade

Prova-se a seguir que holomorfia e analiticidade são equivalentes e dá-se uma Fórmula de Cauchy para as derivadas de funções Holomorfas.

(6.1) Fórmula de Cauchy para derivadas:

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. $f \in H(\Omega)$ se e só se f é analítica em Ω . Em caso afirmativo, se $B_r(z) \subset \Omega$ e γ é um caminho seccionalmente regular fechado em $B_r(z) \setminus \{z\}$, para f e suas derivadas é

$$f^{(k)}(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{k!}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dem. De (5.9), se f é analítica em Ω , $f \in H(\Omega)$.

Se $f \in H(\Omega)$, $B_r(z) \subset \Omega$ e γ é um caminho seccionalmente regular fechado em $B_r(z) \setminus \{z\}$, da Fórmula de Cauchy em conjuntos convexos em (4.12),

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

De (5.8), $f \text{Ind}_\gamma$ é analítica em $B_r(z) \setminus \gamma^*$ e tem em cada círculo aberto $B_{r'}(a) \subset \Omega \setminus \gamma^*$ a representação em série de potências

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{i2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n, \quad z \in B_r(a).$$

A unicidade dos coeficientes c_n das séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ centradas num ponto a que representam uma mesma função, estabelecida

L.T., Simple proof of existence of a complex eigenvalue of a complex square matrix ... and yet another proof of the fundamental theorem of algebra with linear algebra, *Linear and Multilinear Algebra*, **70** (2022), 5329–5333.

¹⁰¹ Girard, Albert (1595-1632). Clairaut, Alexis (1713-1765). Foncenex, François Daviet de (1734-1799). Ostrowski, Alexander (1893-1986). Kneser, Hellmuth (1868-1973). Kneser, Martin (1928-2004).

em (5.9), garante que se obtém a mesma série de potências centrada em a para $f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z)$ qualquer que seja γ com as propriedades indicadas, e $c_n = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$. Esta representação em série de potências centrada em a é válida para $z \in B_r(a) \subset \Omega \setminus \gamma^*$, pelo que f é analítica em $\Omega \setminus \gamma^*$. Para pontos de $z \in \gamma^*$ aplica-se o que foi estabelecido com o caminho γ , substituindo-o por um caminho $\tilde{\gamma}$ seccionalmente regular fechado em $\Omega \setminus \gamma^*$.

A fórmula para as derivadas de f obtém-se directamente de (5.9). *Q.E.D.*

Deste resultado, *o raio de convergência da série de Taylor centrada num ponto a de uma função $f \in H(\Omega)$ é \geq à distância de $\partial\Omega$ ao ponto a .*

Portanto, a única obstrução à convergência da série de Taylor centrada num ponto a de uma função diferenciável complexa para o correspondente valor da função a partir de uma certa distância de a é a função não estar definida ou não ser Holomorfa num ponto a essa distância de a . Isto contrasta com funções reais diferenciáveis e permite explicar a limitação de raios de convergência destas séries pela ocorrência de pontos no plano complexo fora do eixo real em que as extensões complexas naturais das funções reais consideradas não são diferenciáveis. Um exemplo simples é o da função real $\frac{1}{1+x^2}$ referida na introdução deste livro.

Com (6.1) também se obtém que as derivadas de qualquer ordem de funções Holomorfas num conjunto existem e são Holomorfas nesse conjunto.

(6.2) *Funções Holomorfas num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ são indefinidamente diferenciáveis em Ω e têm derivadas de qualquer ordem Holomorfas; em particular, são C^∞ .*

Dem. É consequência imediata do resultado precedente e da existência de derivada num ponto implicar a continuidade da função nesse ponto. *Q.E.D.*

Este resultado implica o recíproco seguinte do Teorema de Cauchy.

(6.3) **Teorema de Morera:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é função contínua tal que $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ para todo triângulo fechado $\Delta \subset \Omega$, então $f \in H(\Omega)$.*

Dem. Se $B_r(a) \subset \Omega$ é um círculo aberto em Ω , como é conjunto convexo, analogamente à prova de (4.7) obtém-se que f tem primitiva F em $B_r(a)$. By (6.1), $F \in H(\Omega)$ e, portanto, $f = F'$ são indefinidamente diferenciáveis. Logo, $f \in H(\Omega)$. *Q.E.D.*

Com (6.2) prova-se que a razão incremental de uma função entre dois pontos distintos de subconjunto aberto de \mathbb{C} em que é Holomorfa pode ser estendida por continuidade como função dos dois pontos com o valor da derivada da função quando os pontos são iguais dada pela derivada da função e as funções de um dos pontos com o outro fixo são Holomorfas.

(6.4) Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto, $f \in H(\Omega)$ e $g: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & , \text{ se } w \neq z \\ f'(z) & , \text{ se } w = z, \end{cases}$$

então g é contínua em $\Omega \times \Omega$ e as funções $w \mapsto g(w, z)$ com $z \in \Omega$ fixo e $z \mapsto g(w, z)$ com $w \in \Omega$ fixo, são Holomorfas em Ω .

Dem. A continuidade de g em pontos de $(\Omega \times \Omega) \setminus \{(a, a) : a \in \Omega\}$ é imediata da continuidade de funções Holomorfas e da continuidade de diferenças e quocientes de funções Holomorfas em pontos em que o denominador não é 0. A diferenciabilidade de g como função de 1 variável com a outra fixa em $a \in \Omega$ implica a continuidade dessas funções (a, a) , mas é preciso provar a continuidade de g como função de 2 variáveis nestes pontos. Para $(w, z) \in \Omega \times \Omega$ com w e z num círculo aberto de \mathbb{C} com centro em a contido em Ω considera-se o caminho regular $\gamma_{w,z}: [0, 1] \rightarrow \Omega$ com $\gamma_{w,z}(t) = tw + (1-t)z$ que descreve um segmento de recta de z a w e designa-se $(u, v) = f$.

$$\begin{aligned} g(w, z) - g(a, a) &= \frac{1}{w-z} \int_0^1 (f \circ \gamma_{w,z})' - f'(a) = \frac{1}{w-z} \int_0^1 f'(\gamma_{w,z}(t)) \gamma'_{w,z}(t) dt - f'(a) \\ &= \frac{1}{w-z} \int_0^1 f'(\gamma_{w,z}(t)) (w-z) dt - f'(a) = \int_0^1 [f'(\gamma_{w,z}(t)) - f'(a)] dt. \end{aligned}$$

De (6.2), f' é contínua em Ω , pelo que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $z, w \in B_\delta(a)$ implica $|f'(\gamma_{w,z}(t)) - f'(a)| < \varepsilon$, pois $\gamma_{w,z}(t) \in B_\delta(a)$ para $t \in [0, 1]$. Logo, $|g(w, z) - g(a, a)| \leq \int_0^1 \varepsilon = \varepsilon$, e g é contínua em (a, a) .

Resta provar diferenciabilidade das funções de uma variável com a outra fixa. Para cada $w \in \Omega$, a função definida em Ω por $z \mapsto g(w, z)$ é diferenciável em todos pontos $z \neq w$ das regras de derivação das operações usuais de funções. De (6.1), funções Holomorfas são analíticas e, como a representação de uma função analítica por série de potências centrada num ponto é a série de Taylor da função nesse ponto, para cada $w \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(w, w+h) - g(w, w)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(w) - f(w+h)] - \frac{1}{h} f'(w) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} h^n - f(w) - f'(w)h \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+2)}(w)}{(n+2)!} h^n = \frac{1}{2} f''(w). \end{aligned}$$

pelo que $z \mapsto g(w, z)$ também é diferenciável em $z = w$. Logo, para cada $w \in \Omega$, esta função é Holomorfa em Ω , e pode-se trocar w com z . *Q.E.D.*

O teorema seguinte unifica em conjuntos abertos de \mathbb{C} Holomorfia, validade do Teorema de Cauchy na fronteira de triângulos fechados contidos nesses conjuntos, analiticidade, existência de primitivas locais em subconjuntos convexos de tais conjuntos.

(6.5) **Teorema de Unificação:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. f é Holomorfa em Ω .
2. f é analítica em Ω .
3. f é contínua em Ω e $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ para todo triângulo fechado $\Delta \subset \Omega$.
4. f tem primitiva em todo subconjunto aberto convexo de Ω .

Dem. A equivalência de 1 e 2 foi provada em (6.1), a de 1 e 3 resulta do teorema (4.6), do Teorema de Morera 6.3 e da continuidade de funções Holomorfas, a de 1 e 4 resulta de (4.7), da continuidade de funções Holomorfas e de (6.2) aplicados a F tal que $F' = f$. Q.E.D.

Cauchy baseou-se na caracterização 3, Weierstrass na 2 e Riemann na 1.

6.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Com a analiticidade das funções Holomorfas e o Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas obtém-se uma prova curta do Teorema Fundamental da Álgebra, que tem interesse especial por os números complexos terem sido introduzidos para obter zeros de polinômios reais sem zeros reais. São dadas mais à frente 6 outras provas alternativas com aplicação de outros resultados.

(6.6) **Teorema Fundamental da Álgebra:** *Um polinómio complexo P de grau $n \in \mathbb{N}$ não constante tem n zeros em \mathbb{C} , contando multiplicidades de acordo com as resp. ordens como zeros de P . Se z_1, \dots, z_k são os zeros distintos de P com multiplicidade, resp., m_1, \dots, m_k , é $\sum_{j=1}^k m_j = n$ e*

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k}, \quad a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dem. Prova-se 1º que se P não tivesse qualquer zero, seria constante. Nesse caso, $\frac{1}{P}$ seria Holomorfa em \mathbb{C} . Como $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|\frac{1}{P}| < \varepsilon$ se $|z| > R$. Do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas¹⁰², a função contínua $\frac{1}{|P|}$ teria máximo no conjunto compacto $\text{cl } B_R(0)$. Logo, a função inteira $\frac{1}{P}$ seria majorada e, do Teorema de Liouville (5.17), seria constante.

Como por hipótese P não é constante, tem pelo menos um zero z_1 em \mathbb{C} . De (5.13), é $P(z) = (z - z_1)^{m_1} P_1(z)$, com P_1 polinómio de grau $n - m_1$. Se $n - m_1 > 0$, aplica-se a P_1 o argumento anterior, e assim sucessivamente, obtendo zeros z_j de ordens m_j até que $P(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k} P_k(z)$ com P_k de grau $n - \sum_{j=1}^k m_k = 0$, logo uma constante, que é a_n . Q.E.D.

¹⁰²Ver apêndice I.

Outra prova simples semelhante do Teorema Fundamental da Álgebra é com o Princípio de Módulo Máximo. Como $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)|$ se $|z| > R$. Se P não tivesse zeros, seria $f = \frac{1}{P} \in H(\mathbb{C})$ e, portanto, f seria analítica em \mathbb{C} , com $|f(0)| > |f(z)|$ para $|z| > R$. Do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, $|f|$ teria máximo em $\text{cl } B_R(0)$, em contradição com o Princípio de Módulo Máximo¹⁰³ (5.19). Portanto, P tem pelo menos um zero.

É útil ter o resultado para polinómios com coeficientes reais seguinte.

(6.7) *Um polinómio complexo com coeficientes reais P de grau $n \in \mathbb{N}$ tem n zeros em \mathbb{C} , contando multiplicidade dos zeros de acordo com as resp. ordens como zeros da função analítica P , e os zeros que não são números reais ocorrem em pares conjugados de zeros de ordens iguais.*

Dem. Se $P(z) = \sum_{j=1}^n a_j z^j$ com $a_j \in \mathbb{R}$, é $\overline{P(z)} = \sum_{j=1}^n a_j \bar{z}^j$, pelo que se w é zero de P , também \bar{w} é, e são distintos se e só se $w \notin \mathbb{R}$. Se $w \notin \mathbb{R}$ e a ordem do zero w de P é m , então $P(z) = (z-w)^m Q(z)$, em que Q é um polinómio com coeficientes reais com $Q(w) \neq 0$, e $P(z) = \overline{P(\bar{z})} = (z-\bar{w})^m Q(\bar{z})$, pelo que a ordem do zero \bar{w} de P também é m . *Q.E.D.*

6.4 Estrutura local de funções holomorfas

Prova-se nesta secção que contradomínios de funções Holomorfas numa região são uma região ou um ponto, e outros aspectos relacionados, incluindo o seguinte Teorema da Função Inversa que estabelece a existência de inversa local Holomorfa de uma função Holomorfa com derivada $\neq 0$ num ponto.

(6.8) **Teorema da Função Inversa:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto, $\varphi \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $\varphi'(z_0) \neq 0$, existe uma vizinhança de z_0 $V \subset \Omega$ tal que:*

1. φ é injectiva e φ' não tem zeros em V ,
2. $W = \varphi(V)$ é um conjunto aberto,
3. A inversa da restrição de φ a V , $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$ é Holomorfa e

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}, \quad \text{em } W.$$

Dem. Com $(u, v) = \varphi$ e $(x, y) = z$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ como função de variáveis reais é C^1 e, das equações de Cauchy-Riemann, tem jacobiano

$$J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |\varphi'|^2,$$

que é $\neq 0$ em $(x_0, y_0) = z_0$. Portanto, do Teorema da Função Inversa para funções de variável em \mathbb{R}^2 , existe vizinhança V de $(x_0, y_0) = z_0$ em que (u, v)

¹⁰³Em alternativa, pode-se substituir o Princípio de Módulo Máximo pela Propriedade de Valor Médio. Agora não só temos uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra com Análise Complexa como três variantes baseadas em propriedades diferentes de funções analíticas complexas. No final da secção seguinte dá-se uma 4ª variante baseada na contagem de zeros de funções Holomorfas.

é injectiva, $J(u, v) \neq 0$, $W = (u, v)(V)$ é aberto e a inversa da restrição de (u, v) a W , $(u, v)^{-1}: W \rightarrow V$ é C^1 , a matriz jacobiana desta função é em cada ponto a inversa da matriz jacobiana de (u, v) no ponto correspondente e, como as componentes da diagonal principal desta matriz são iguais e as outras componentes são simétricas, também é assim para a inversa dessa matriz garantindo que $(u, v)^{-1}$ satisfies as equações Cauchy-Riemann. Logo, φ tem as propriedades no enunciado, a fórmula para a derivada é imediata da regra de derivação da função composta aplicada a¹⁰⁴ $\varphi\varphi^{-1} = 1_W$. *Q.E.D.*

Com este resultado, a propriedade dos zeros de funções Holomorfas não identicamente nulas serem isolados, a noção de ordem de zero de função analítica e a existência de primitiva local em conjuntos convexos de funções Holomorfas pode-se estabelecer a caracterização simples seguinte das funções Holomorfas em regiões: a menos da adição de constantes são localmente potências inteiras de funções invertíveis Holomorfas.

(6.9) Estrutura local de funções Holomorfas: *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ não é constante em Ω , $f \in H(\Omega)$ se e só se para cada ponto $z_0 \in \Omega$ existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de z_0 tal que*

$$f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m, \quad z \in V,$$

em que $w_0 = f(z_0)$, m é a ordem do zero z_0 da função analítica $f - w_0$ e φ é uma bijecção Holomorfa de V sobre um círculo aberto $B_r(0)$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ e φ' não tem zeros em V (Figura 6.1).

Dem. Da Holomorfia de somas e composições de funções Holomorfas, f da forma indicada numa vizinhança de cada ponto de Ω é Holomorfa em Ω .

Se $f \in H(\Omega)$ e $\rho > 0$ é tal que $\text{cl } B_\rho(w_0) \subset \Omega$, como de (5.13) os zeros de $f - w_0$ são isolados e $\text{cl } B_\rho(w_0)$ é compacto, neste conjunto há um n^o finito desses zeros, existe $\tilde{\rho} \in]0, \rho[$ tal que z_0 é o único dos zeros em $\tilde{\Omega} = B_{\tilde{\rho}}(z_0)$ e

$$(6.10) \quad f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in \tilde{\Omega},$$

em que $g \in H(\tilde{\Omega})$ não tem zeros em $\tilde{\Omega}$. Logo, $\frac{g'}{g} \in H(\tilde{\Omega})$ e, como $\tilde{\Omega} = B_{\tilde{\rho}}(z_0)$ é aberto e convexo, de (4.7), $\frac{g'}{g}$ tem primitiva $h \in H(\tilde{\Omega})$. Verifica-se

$$(g e^{-h})' = g' e^{-h} - g e^{-h} h' = g' e^{-h} - g e^{-h} \frac{g'}{g} = 0.$$

Portanto, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $g e^{-h} = c$ em $\tilde{\Omega}$. Sem perda de generalidade supõe-se $c = 1$ e $g = e^h$, pois para tal basta considerar uma primitiva de $\frac{g'}{g}$ obtida adicionando uma constante a h . Define-se $\varphi(z) = (z - z_0) e^{\frac{h(z)}{m}}$ para $z \in \tilde{\Omega}$. A potência m de ambos os lados desta fórmula com (6.10) dá a fórmula no enunciado. Como φ é definida por produtos e composições de funções Holomorfas em $\tilde{\Omega}$, também é Holomorfa em $\tilde{\Omega}$. Como $\varphi(z_0) = 0$ e $\varphi'(z_0) = e^{\frac{h(z_0)}{m}} \neq 0$, do Teorema da Função Inversa precedente, existe uma vizinhança \tilde{V} de z_0 sem zeros de φ' e esta função é uma bijecção de \tilde{V} sobre

¹⁰⁴No que se segue designam-se funções identidade de um conjunto A em $B \supset A$ por 1_A .

o conjunto aberto $\widetilde{W} = \varphi(\widetilde{V})$. Como \widetilde{W} é aberto e $\varphi(z_0) \in \widetilde{W}$, existe um círculo aberto com centro na origem e raio $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \widetilde{W}$. Como φ é contínua em \widetilde{V} , as preimagens por φ de conjuntos abertos são conjuntos abertos, o que conclui a prova com $V = \varphi^{-1}(B_r(0))$. *Q.E.D.*

Como a potência de expoente $m \in \mathbb{N}$ é uma função de m para 1 em qualquer círculo aberto $B_\rho(0) \setminus \{0\}$ sem o centro sobre $B_{\rho^m}(0) \setminus \{0\}$, do resultado precedente, uma função f Holomorfa e não constante numa região é, numa vizinhança V de cada ponto z_0 da região, uma função de m para 1 em $V \setminus \{z_0\}$ sobre $B_{r^m}(w_0) \setminus \{w_0\}$, em que w_0, m, r são como no enunciado do resultado precedente (Figura 6.1). Se $m > 1$, diz-se que z_0 é um **ponto de ramificação**¹⁰⁵ da função f de ordem m .

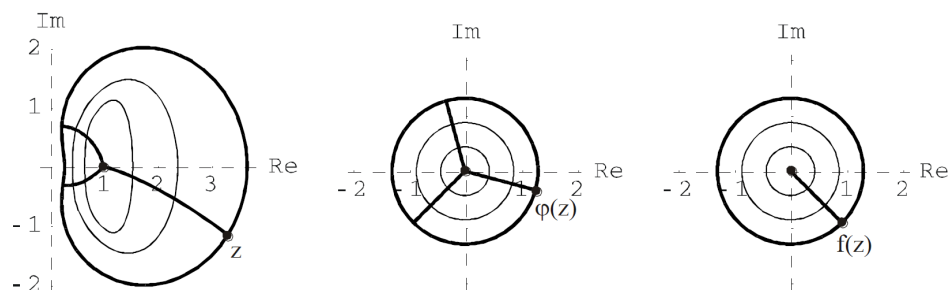


Figura 6.1: Vizinhança de ponto de Ramificação de ordem $m=3$ (exemplo com $z_0=1$, $w_0=0$, $\varphi(z) = \log z$, $f(z) = (\log z)^3$)

Em consequência dos resultados anteriores, obtém-se o resultado seguinte que implica que a não anulação da derivada de funções Holomorfas é necessária e suficiente para injectividade local, em contraste com funções reais.

(6.11) *Se f é uma função Holomorfa e injectiva num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, então f' não se anula em Ω e $f^{-1} \in H(f(\Omega))$.*

Dem. Se $z_0 \in \Omega$ e f é injectiva em Ω , f não é constante em qualquer vizinhança de z_0 , pelo que a fórmula no enunciado de (6.9) dá a sua estrutura local, e f só é injectiva se nessa fórmula é $m=1$, e, portanto, $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$. Do Teorema da Função Inversa (6.8), f^{-1} é Holomorfa numa vizinhança de cada ponto de Ω , pelo que $f^{-1} \in H(f(\Omega))$. *Q.E.D.*

(6.12) **Teorema da Aplicação Aberta:**

Funções Holomorfas não constantes (se f é constante em Ω , $f(\Omega)$ é um ponto) em subconjuntos de \mathbb{C} transformam conjuntos abertos em conjuntos abertos e regiões em regiões.

Dem. De (6.9), se Ω é aberto, para cada $z_0 \in \Omega$ existe um círculo aberto $B_r(f(z_0)) \subset f(\Omega)$, pelo que $f(\Omega)$ é aberto. Como f é contínua em Ω , se este é conexo, de (I.21.1), também $f(\Omega)$ é. *Q.E.D.*

¹⁰⁵Em inglês diz-se *branching point*.

Uma consequência imediata dos dois últimos resultados é: *uma função Holomorfa e injetiva num conjunto aberto é um **homeomorfismo**¹⁰⁶ (i.e. uma bijecção contínua com inversa contínua) deste conjunto na sua imagem.*

Com o Teorema da Aplicação Aberta (6.12) tem-se uma prova alternativa do Princípio de Módulo Máximo para funções analíticas (5.19) clara e curta, pois se f é uma função Holomorfa não constante num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $a \in \Omega$, deste teorema, $f(\Omega)$ é um conjunto aberto que contém um círculo centrado em $f(a)$, e, portanto, pontos com valores absolutos $> |f(a)|$, pelo que $|f|$ não pode ter máximos locais em Ω a não ser que seja constante. Esta prova mostra que o Princípio de Módulo Máximo é consequência de propriedades topológicas de funções analíticas.

Outro aspecto da estrutura local de funções Holomorfas é a contagem de zeros ou de pontos em que a função tem um valor w_0 (contando multiplicidades) num círculo. O resultado seguinte dá uma fórmula para contar estes pontos pela integração de uma função apropriada sobre um caminho que percorre a circunferência fronteira do círculo. Antes de enunciar e provar o resultado convém entender porque se espera uma fórmula deste tipo.

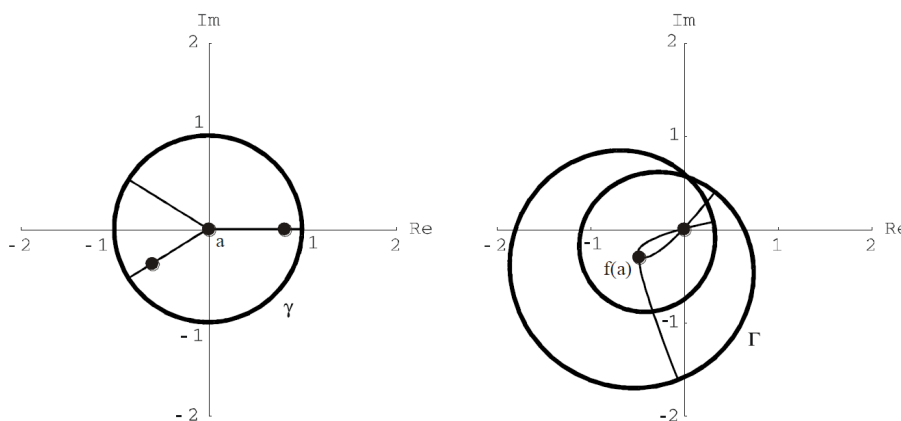


Figura 6.2: Correspondência local entre valores de z e $f(z)$ e contagem de zeros e do número de pontos em que f assume um mesmo valor

Os pontos em que uma função f assume um valor w_0 são os zeros de $f - w_0$. O resultado seguinte estabelece que o n° de zeros de uma função f Holomorfa num círculo fechado de centro num ponto a cuja fronteira não tem zeros de f é $\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} \frac{f'}{f}$, em que γ é um caminho regular simples que percorre a circunferência fronteira do círculo no sentido positivo. A função $w = f(z)$ transforma γ num caminho regular fechado $\Gamma = f \circ \gamma$ e, da regra de derivação da função composta e mudança de variáveis de integração,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_I \frac{(f \circ \gamma)' \gamma'}{f \circ \gamma} = \int_I \frac{(f \circ \gamma)'}{f \circ \gamma} = \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw,$$

em que I é o domínio do caminho γ . O último integral é, por definição,

¹⁰⁶Os homeomorfismos também são chamados **transformações topológicas**.

$(i2\pi)\text{Ind}_\Gamma(0)$, pelo que é o n° de voltas N que Γ dá em torno da origem quando o γ dá uma volta sobre a circunferência. Supondo que os zeros de f no círculo delimitado por γ^* são simples e não há mais de um zero no mesmo raio do círculo, enquanto o raio da circunferência passa uma vez por cada ponto do círculo no domínio durante uma volta em torno do centro, a sua imagem passa N vezes por 0 no contradomínio (Figura¹⁰⁷ 6.2). Se os zeros são simples, há N pontos no círculo considerado em que f é zero, pelo que a fórmula conta os zeros de f . Se os zeros de f não são todos simples ou há mais de um zero num mesmo raio do círculo, da estrutura local das funções Holomorfas em (6.9), também se obtém que a fórmula conta os zeros de f de acordo com as resp. ordens (Figura 6.2).

Se Γ não passa em $f(a)$, existe um círculo no contradomínio de f com centro em $f(a)$ numa componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ e todos pontos deste círculo são varridos o mesmo n° de vezes pela imagem do raio da circunferência considerada no domínio durante uma volta. Portanto, o n° de pontos no círculo do domínio que têm como valor um ponto do círculo no contradomínio é o mesmo do n° de pontos no círculo do domínio em que f assume o valor $f(a)$, contando as resp. ordens como zeros de $f - f(a)$, de acordo com a estrutura local das funções Holomorfas em (6.9).

(6.13) *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto, γ é um caminho fechado regular simples que percorre no sentido positivo a que delimita um círculo $\text{cl } B_r(a) \subset \Omega$, $f \in H(\Omega)$ não é constante e $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(\gamma^*)$, então o n° de pontos em $\text{cl } B_r(a)$ em que f assume w_0 , contando multiplicidades de acordo com as ordens dos zeros de $f - w_0$, é*

$$N_{w_0}(f; B_r(a)) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$

Dem. Os pontos em que f assume w_0 são os zeros de $f - w_0$. Como $(f - w_0)' = f'$, basta provar para $w_0 = 0$, o que corresponde a contar o n° de zeros de f em $B_r(a)$. Como os zeros de uma função Holomorfa não constante são pontos isolados e $\text{cl } B_r(a)$ é compacto, o n° de zeros de f em $\text{cl } B_r(a)$ é finito. Como, por hipótese, f não tem zeros em γ^* , os zeros em $B_r(a)$ e em $\text{cl } B_r(a)$ são os mesmos. Portanto, pode-se designar os zeros de f em $B_r(a)$, sem repetições, por z_1, \dots, z_k , e as resp. ordens por m_1, \dots, m_k , e $N_{w_0}(f; B_r(a)) = \sum_{j=1}^k m_j$. As funções Holomorfas são analíticas, pelo que para cada zero z_0 de f de ordem m_0 , o desenvolvimento de f em série de potências centrada em z_0 dá $f(z) = (z - z_0)^{m_0} g_0(z)$, em que $g_0 \in H(\Omega)$ e $g_0(z_0) \neq 0$. Aplicando sucessivamente esta ideia para todos os zeros de f

¹⁰⁷ A função considerada nesta figura é $z \mapsto (z - z_1)(z - z_2)$, com zeros z_1, z_2 que são os dois pontos marcados no domínio com os círculos maiores a cheio. Cada ponto na componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ que contém a origem é assumido em pares de pontos distintos do círculo delimitado pela circunferência traçada no domínio, com exceção de $f(a)$ que é assumido apenas no ponto a . Cada ponto na outra componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ é assumido num único ponto do círculo considerado no domínio.

em $B_r(a)$, obtém-se $f(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k} g(z)$, em que $g \in H(\Omega)$ e $g(z) \neq 0$ para todos $z \in \text{cl } B_r(a)$. Portanto, $\frac{g'}{g} \in H(\text{cl } B_r(a))$ e

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{m_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in \text{cl } B_r(a).$$

Com $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$, $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$, do Teorema de Cauchy em conjuntos convexos (4.8), $\int_\gamma \frac{g'}{g} = 0$, e $\int_\gamma \frac{f'}{f} = (i2\pi) \sum_{j=1}^k m_j \text{Ind}_\gamma(z_j)$. Como $B_r(a)$ é uma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, de (4.9), Ind_γ é constante em $B_r(a)$, e, de (4.10), $\text{Ind}_\gamma(a) = 1$. Logo, $\int_\gamma \frac{f'}{f} = i2\pi \sum_{j=1}^k m_j = i2\pi N_0(f; B_r(a))$. *Q.E.D.*

Com este resultado dá-se uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra diferente das três referidas em (6.6): se P é um polinômio de grau n , $i2\pi \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ pode ser arbitrariamente aproximado por $i2\pi \int_\gamma \frac{n}{z} dz = n$, em que γ é um caminho regular simples que percorre no sentido positivo a circunferência com centro na origem e raio $r > 0$ grande. Como os dois integrais têm valores inteiros, para $r > 0$ grande, são iguais. Do resultado precedente, P tem n zeros em \mathbb{C} , contando multiplicidades.

6.5 Analiticidade de séries de funções analíticas

Limites de sucessões e séries de funções levaram a alargar o conjunto das funções polinomiais, dando origem ao conjunto das funções analíticas. É natural indagar se a aplicação do mesmo processo a funções analíticas complexas conduz a uma nova extensão ou se, pelo contrário, continua a dar funções analíticas. O resultado seguinte, estabelecido por K. Weierstrass em 1841 nos seus “Cadernos de Munique”, publicados só em 1894, mostra que se verifica este último caso quando a convergência é uniforme em subconjuntos compactos do domínio da função definida pelo limite, propriedade já verificada para as representações de funções analíticas em séries.

(6.14) Teorema de Weierstrass para sucessões de funções:
Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções com f_n analítica num conjunto aberto $\Omega_n \subset \mathbb{C}$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , então f é analítica em Ω e $(f_n)^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dem. Como círculos fechados contidos em Ω são compactos, a sucessão é uniformemente convergente nesses círculos. Como as funções f_n são contínuas nesses círculos, f também é contínua neles; logo, é contínua em Ω . Seja $\Delta \subset \Omega$ um triângulo fechado. Como Ω é aberto, existe um triângulo fechado $\tilde{\Delta} \subset \Omega$ com Δ no interior. Como $\tilde{\Delta}$ é compacto, $\{f_n\}$ converge uniformemente em $\tilde{\Delta}$, pelo que $\int_{\partial\tilde{\Delta}} f_n \rightarrow \int_{\partial\tilde{\Delta}} f$, e, com o Teorema de Goursat (4.6),

$$\int_{\partial\tilde{\Delta}} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\tilde{\Delta}} f_n(z) dz = 0.$$

Do Teorema de Morera (6.3), $f \in H(\Omega)$. Se $K \subset \Omega$ é compacto, existe $r > 0$ menor ou igual à distância de K a $\partial\Omega$ ¹⁰⁸ tal que $U = \text{cl } \cup_{z \in K} B_r(z)$ é

¹⁰⁸Ver no apêndice I (I.18).

compacto. Da estimativa de Cauchy para a derivada de $f - f_n$ em (5.13),

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_U |f - f_n|, \quad z \in K,$$

Como $f_n \rightarrow f$ uniformemente no conjunto compacto U , $(f_n)' \rightarrow f'$ uniformemente em K , o que prova o resultado para $k = 1$. Para $k > 1$ resulta de aplicações sucessivas a derivadas de ordens sucessivas. *Q.E.D.*

Segue-se o resultado análogo para séries que estabelece que somas de séries de funções complexas analíticas uniformemente convergentes em conjuntos compactos são analíticas e as suas derivadas podem ser obtidas por derivação termo a termo que dá séries também uniformemente convergentes em conjuntos compactos, em contraste radical com funções reais, para as quais séries de funções indefinidamente diferenciáveis até podem convergir uniformemente para funções não diferenciáveis em qualquer ponto¹⁰⁹.

(6.15) Teorema de Weierstrass para séries de funções:

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e uma série de funções $f_n \in H(\Omega)$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω para uma função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, então f é analítica em Ω , $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n)^{(k)}(z)$ para todo $z \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, e esta série também converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , para cada $k \in \mathbb{N}$.

Dem. É consequência imediata do resultado precedente, aplicado à sucessão das somas parciais da série, com $\Omega_n = \Omega$. *Q.E.D.*

Verificar que uma sucessão $\{f_n\}$ de funções analíticas converge uniformemente num conjunto compacto K pode ser facilitado pelo Princípio de Módulo Máximo (5.19), pois como $|f_n - f|$ assume o máximo em K na fronteira, basta verificar a convergência uniforme na fronteira.

A noção de convergência uniforme em subconjuntos compactos de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é especialmente útil porque várias propriedades dos termos de sucessões passam para o limite da sucessão. Já se observou que assim é com continuidade em (5.1), analiticidade em (6.14) e derivação de ordem arbitrária em (6.14). Os resultados seguintes¹¹⁰ estabelecem que se a função limite não for constante, inexistência de zeros, injectividade, e inclusão de contradomínios num mesmo conjunto também passam para o limite.

(6.16) Teorema de Hurwitz: *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto, $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções analíticas em Ω tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , as funções f_n não têm zeros em Ω e f não é identicamente zero em Ω , então f não tem zeros em Ω .*

Dem. Do teorema (6.14), f é analítica em Ω . Se não é identicamente zero

¹⁰⁹O 1º exemplo foi dado por K. Weierstrass em 1872.

¹¹⁰Obtidos em 1889 por A. Hurwitz.

em Ω , de (5.13), os seus zeros, caso existam, são isolados. Logo, para cada $a \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $f \neq 0$ em $\text{cl } B_r(a) \setminus \{a\} \subset \Omega$. Em particular, a função contínua $|f|$ tem um mínimo $m > 0$ no conjunto compacto $\partial B_r(a)$, pelo que para $n \in \mathbb{N}$ grande é

$$|f_n - f| > \frac{m}{2}, \quad |f_n| > |f| - \frac{m}{2} \geq \frac{m}{2}, \quad \left| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right| = \frac{|f_n - f|}{|f_n||f|} < \frac{|f_n - f|}{m^2/2}.$$

Como $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $\partial B_r(a)$, tem-se $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ uniformemente em $\partial B_r(a)$. De (6.14), também $(f_n)' \rightarrow f'$ uniformemente em $\partial B_r(a)$. Logo, $(\frac{f_n}{f_n})' \rightarrow (\frac{f}{f})'$ uniformemente em $\partial B_r(a)$, e, de (5.1), $\int_{\partial B_r(a)} f_n \rightarrow \int_{\partial B_r(a)} f$. De (6.13), como as funções f_n não têm zeros em $\text{cl } B_r(a)$, $\frac{f_n'}{f_n}$ têm integrais em $\partial B_r(a)$ nulos, e, portanto, $\int_{\partial B_r(a)} \frac{f_n'}{f_n} = 0$. De (6.13), f não tem zeros em $\text{cl } B_r(a)$. Como $a \in \Omega$ é arbitrário, f não tem zeros em Ω . Q.E.D.

Uma consequência imediata é a seguinte.

(6.17) Teorema de Injecção de Hurwitz:

Se $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções analíticas num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f_n \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω e f não é constante em Ω :

1. Se as funções f_n são injectivas em Ω , f é injectiva em Ω .
2. Se $f_n(\Omega) \subset S$, então $f(\Omega) \subset S$.

Dem. 1. Seja $a \in \Omega$. Da injectividade de f_n , a função $f_n - f_n(a)$ não tem zeros em $\Omega \setminus \{a\}$. Esta função é analítica em Ω e $f_n - f_n(a) \rightarrow f - f(a)$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , pelo que, do teorema precedente, $f - f(a)$ não tem zeros em Ω , e f é injectiva em Ω .

2. Seja $b \in \mathbb{C} \setminus S$. As funções $f_n - b$ são analíticas em Ω e $f_n - b \rightarrow f - b$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω . Como as funções $f_n - b$ não têm zeros em Ω , e $f - b$ não é identicamente zero em Ω , pois f não é constante, o teorema precedente implica que $f - b$ não tem zeros em Ω e f não assume o valor b em Ω . Logo, $f(\Omega) \subset S$. Q.E.D.

Exercícios

- 6.1 Determine o maior círculo em que o prolongamento por continuidade de $\frac{z}{\sin z}$ tem desenvolvimento em série de potências centrada na origem.
- 6.2 Determine o maior círculo centrado na origem em que a função dada é injectiva:
 - a) $z^2 + z$
 - b) e^z .
- 6.3 Prove as propriedades de funções inteiras seguintes:
 - a) Se os valores de $f \in H(\mathbb{C})$ estão no semiplano complexo esquerdo, f é constante.
 - b) Se $f \in H(\mathbb{C})$ e $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = \infty$, f tem pelo menos um zero.
- 6.4 Prove: Toda função inteira com períodos $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $\frac{z}{w} \notin \mathbb{R}$ é constante.
- 6.5 Prove: Se uma função é contínua no círculo aberto $B_r(a)$ e Holomorfa nos semi-círculos $\{z \in B_r(a) : \text{Im } z > 0\}$ e $\{z \in B_r(a) : \text{Im } z < 0\}$, é Holomorfa em $B_r(a)$.
- 6.6 Prove: Se $f \in H(\text{cl } B_r(a))$, $|f| \leq M$ em $\text{cl } B_r(a)$ e $|f(a)| = b > 0$, o n° de zeros de f em $B_\rho(a)$, com $0 < \rho < r$, contando multiplicidades de acordo com a ordem dos zeros da função analítica f , é $\leq \log(\frac{M}{b}) / \log(\frac{r}{\rho} - 1)$.

(Sugestão: Se z_1, \dots, z_n designam os zeros de f em $B_\rho(a)$, repetidos de acordo com as resp. ordens como zeros de f , defina $g(z) = f(z) [\prod_{k=1}^n (1 - \frac{z}{z_k})]^{-1}$ e note que $g(0) = f(0)$).

6.7 Prove as propriedades seguintes:

a) Se as fronteiras de duas regiões disjuntas $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ têm em comum um segmento de recta ou um arco de circunferência L , $f_k \in H(\Omega_k)$ e f_k é contínua em L , para $k=1, 2$, e $f_1 = f_2$ em L , então a função $f = f_k$ em $\Omega_k \cup L$, para $k=1, 2$, é Holomorfa em $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup L$. (Sugestão: Use o Teorema de Morera.)

b) Se $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ é região com fronteira que contém um segmento de recta do eixo real, Ω_2 é a região simétrica de Ω_1 em relação ao eixo real e $f \in H(\Omega_1)$ é prolongável por continuidade a $\Omega_1 \cup \gamma^*$, então a função $\tilde{f}(z) = f(\bar{z})$ obtida por prolongamento de f a $\Omega_1 \cup \gamma^* \cup \Omega_1$ por esta simetria em relação ao eixo real e continuidade é Holomorfa em $\Omega_1 \cup \gamma^* \cup \Omega_1$ e tem valores reais em γ^* . Prove: Se L é segmento de recta ou arco de circunferência, obtém-se um resultado análogo (formule-o). (Sugestão: Use Transformações de Möbius.)

6.8 Prove: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região cuja fronteira numa vizinhança de um dos seus pontos é um segmento de recta ou um arco de circunferência γ^* e $f \in H(\Omega)$ é prolongável por continuidade a γ^* anulando-se neste arco, então $f=0$ em Ω .

6.9 Prove: Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ limitado e $f \in H(\Omega)$ contínua em $\text{cl } \Omega$. Sea $a \in \Omega$ e $|f(z) - f(a)| \geq d > 0$ para $z \in \partial \Omega$, então $f(\Omega) \supset B_d(f(a))$.

6.10 Seja $\mathfrak{F} = \{f \in H(\text{cl } B_1(0)) : f'(0) = 1\}$.

a) Prove o **Teorema de Bloch**¹¹¹ Se $f \in \mathfrak{F}$, existe $a \in B_1(0)$ tal que

$$f(B_1(0)) \supset f(B_{\rho_a}(a)) \supset B_{\beta}(f(a)), \text{ com } \rho_a = \frac{1-|a|}{2}, \beta = \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

(Sugestão: Designe por $a \in B_1(0)$ um ponto de máximo de $|f'(z)|(1-|z|)$ em $\text{cl } B_1(0)$. Observe que $|f'| \leq 2|f'(a)|$ em $B_{\rho_a}(a)$. Estime o resto da fórmula de Taylor de 1ª ordem de f em a com base na Fórmula de Cauchy e prove que, com $K(\rho) = \rho - \frac{\rho^2}{\rho_a - \rho}$, se tem $|f(z) - f(a)| \geq K(\rho)|f'(a)|$ para $|z-a| = \rho < \rho_a$. Aplique o exercício anterior).

b) Prove: Nas condições de a), f é injectiva em $B_{\rho_a/3}(a)$ e $f(B_{\rho_a/3}(a)) \supset B_{1/72}(f(a))$. (Sugestão: Estime com base na Fórmula de Cauchy e aplique o exercício 5.12).

c) Chama-se **constante de Bloch**¹¹² a $\mathfrak{B} = \inf\{\beta(f) : f \in \mathfrak{F}\}$, em que

$$\beta(f) = \sup\{r : \exists \text{ um círculo aberto } C \subset B_1(0) \text{ em que } f \text{ é injectiva tal que } f(C) \text{ contém um círculo aberto de raio } r\}.$$

Prove: A constante de Bloch \mathfrak{B} satisfaz $\frac{1}{72} \leq \mathfrak{B} \leq 1$.

d) Chama-se **constante de Landau**¹¹³ a $\mathfrak{L} = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathfrak{F}\}$, em que

$$\lambda(f) = \sup\{r : f(B_1(0)) \text{ contém um círculo aberto de raio } r\}.$$

Prove: As constantes de Bloch e de Landau satisfazem $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{L} \leq 1$.

e) Prove: Se $f \in \mathfrak{F}$, $f(B_1(0))$ contém um círculo aberto com raio \mathfrak{L} .

f) Prove: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, $f \in H(\Omega)$ e $f'(c) \neq 0$ para algum $c \in \Omega$, então para

¹¹¹ André Bloch (1893-1948) provou o resultado (com $\beta = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \approx 0,12$) em 1924. Em 1926 Edmund Landau (1877-1938) simplificou a prova, mas com $\beta = \frac{1}{16} < \frac{1}{12} < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$. A prova sugerida neste exercício foi proposta em 1971 por Theodor Estermann (1902-1991). A. Hurwitz foi quem 1º provou, em 1904, um resultado do tipo do Teorema de Bloch: se $f \in H(B_1(0))$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f(z) \neq 0$ para todo $z \neq 0$, então $f(B_1(0)) \supset B_r(0)$, para $r = \frac{1}{58}$; C. Carathéodory mostrou em 1907 que neste caso $r = \frac{1}{16}$ é o raio óptimo. Em 1938 L. Ahlfors obteve o resultado com $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx 0,43$, mais do triplo do obtido por A. Bloch (ver capítulo 11).

¹¹² A constante de Bloch foi introduzida por E. Landau em 1929, que provou a estimativa indicada. Em 1937 L. Ahlfors e Helmut Grunsky (1904-1986) provaram

$$0,43 \approx \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \mathfrak{B} \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{11}{12})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \approx 0,47.$$

e conjecturaram que a estimativa superior é o valor de \mathfrak{B} , o que não está estabelecido. Em 1990 Mario Bonk simplificou a prova de L. Ahlfors e H. Grunsky e obteve $\frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-14} \leq \mathfrak{B}$, e em 1996 Huaihui Chen e Paul Gauthier provaram $\frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \times 10^{-4} \leq \mathfrak{B}$.

¹¹³ A constante de Landau foi introduzida por E. Landau em 1929, quando também obteve a estimativa indicada e provou o resultado em e). Em 1943 Hans Rademacher (1892-1969) provou $0,5 < \mathfrak{L} \leq \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \approx 0,543$ e conjecturou que a estimativa superior é o valor de \mathfrak{L} , o que não está estabelecido.

cada $\varepsilon > 0$ $f(\Omega)$ contém um círculo de raio $d(c, \partial\Omega) |f'(c)| / (\mathfrak{L} - \varepsilon)$, em que $d(c, \partial\Omega)$ é a distância de c a $\partial\Omega$.

g) Prove¹¹⁴: *Contra-domínios de funções inteiras não constantes contêm círculos de raios arbitrariamente grandes.*

- 6.11 Prove: *A equação diferencial $\frac{dw}{dz} = P(w, z)$, com P função polinomial de duas variáveis complexas tem uma única solução Holomorfa numa vizinhança de $a \in \mathbb{C}$.*

Exercícios sobre localização de zeros de polinômios

- 6.12 Prove: *Um polinômio $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, com $a_k \leq 0$ para $k=0, 1, \dots, n-1$ e $\sum_{k=0}^{n-1} a_k < 0$ tem um e só um zero positivo.*
- 6.13 Prove: *Se z_0 é um zero de um polinômio $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, então $|z_0| \leq p$, em que p é o único zero positivo do polinômio $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k$.*
- 6.14 Prove: *Se $a_0 \neq 0$, nenhum zero do polinômio $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ tem valor absoluto menor do que o único zero positivo do polinômio $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k$.*
- 6.15 Prove: *Se $a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$, o polinômio $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ não tem zeros em $\text{cl } B_1(0)$.*
- 6.16 Prove: *Se $a_k > 0$ para $k=0, 1, \dots, n-1$, os zeros do polinômio $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ pertencem à coroa circular $\min R \leq |z| \leq \max R$, em que $R = \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} : k=0, \dots, n-1 \right\}$.*
- 6.17 Mostre que os zeros da equação $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$ pertencem ao semiplano complexo esquerdo. (Sugestão: Mostre que não há zeros no 1º quadrante considerando um caminho fechado que percorre a fronteira de um quarto de círculo no 1º quadrante com centro na origem e raio grande).
- 6.18 Prove: *Se todos zeros do polinômio $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ pertencem ao semiplano complexo esquerdo, todos coeficientes $a_k, k=0, 1, \dots, n$, são $\neq 0$ e têm o mesmo sinal.*
- 6.19 Diz-se que uma m -pla ordenada de polinômios reais (P_1, \dots, P_m) é uma **cadeia de Sturm**¹¹⁵ se em cada zero de P_k os polinômios adjacentes P_{k-1} e P_{k+1} têm valores $\neq 0$ de sinais contrários e P_m não tem zeros. Chama-se **cadeia de Sturm generalizada** a uma m -pla ordenada de polinômios reais obtidos de uma cadeia de Sturm multiplicando cada elemento por um mesmo polinômio real.
- a) Prove: *Se P, Q são polinômios reais com o grau de P maior ou igual ao de Q , então a m -pla ordenada (P_1, \dots, P_m) , com $P_1 = P, P_2 = Q$ e cada um dos outros elementos P_k igual ao resto da divisão polinomial dos dois elementos anteriores (resto da divisão de P_{k-2} por P_{k-1}) é uma cadeia de Sturm generalizada.*
- b) Chama-se **índice de Cauchy** de uma função racional real R à diferença $I(R)$ entre o número de saltos de $-\infty$ para $+\infty$ nos valores de $R(x)$ quando x cresce de $-\infty$ para $+\infty$. Prove: *O n° de zeros reais distintos de um polinômio real P é $I\left(\frac{P'}{P}\right)$.*
- c) Dada uma cadeia de Sturm generalizada $P = (P_1, \dots, P_m)$, designa-se por $\Delta S(P)$ a diferença entre os n° s de mudanças de sinal na m -pla ordenada $(P_1(x), \dots, P_m(x))$ quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.
 Prove¹¹⁶: *Se (P_1, \dots, P_m) é uma cadeia de Sturm generalizada, $I\left(\frac{P'}{P}\right) = \Delta S(P)$.*
- d) Prove o **critério de Routh**¹¹⁷: *Todos zeros de um polinômio têm partes reais negativas se e só se todos elementos na q^a coluna da tabela de Routh correspondente são $\neq 0$ e do mesmo sinal, em que para o polinômio complexo com coeficientes reais*

$$P(z) = a_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + b_{n-3} z^{n-3} + \dots$$

¹¹⁴O Pequeno Teorema de Picard (capítulo 11) estabelece o resultado mais forte de funções inteiras não constantes não poderem omitir mais de um ponto de \mathbb{C} .

¹¹⁵Sturm, Jacques (1803-1855).

¹¹⁶Este resultado é o caso particular do Teorema de Sturm sobre o n° de zeros de um polinômio real num intervalo J , em que $J = \mathbb{R}$, estabelecido em 1829 por J. Sturm.

¹¹⁷O critério de Routh foi publicado em 1887 por Edward Routh (1831-1907).

chama-se **Tabela de Routh** a

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \\
 b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-\lceil \frac{n}{2} \rceil} & & \\
 c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & & & \\
 d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & &
 \end{array}$$

em que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ é o menor inteiro $\geq \frac{n}{2}$ e os elementos de cada linha a partir da 2ª são obtidos das duas linhas precedentes subtraindo aos elementos da penúltima linha anterior os elementos correspondentes da última linha anterior multiplicados pelo n° tal que a diferença obtida na 1ª coluna seja nula, omitindo depois esta diferença nula com o correspondente deslizamento de uma posição para a esquerda de todas as outras diferenças calculadas.

(Sugestão: Considere um caminho que percorre o arco da circunferência no semiplano complexo direito com centro na origem e raio $R \rightarrow +\infty$ e o correspondente diâmetro contido no eixo imaginário, mostre que o aumento de um argumento contínuo de $P(i\omega)$ quando $i\omega$ percorre o eixo imaginário de baixo para cima é $\pi I(R)$, em que $I(R)$ é o índice de Cauchy de

$$R(\omega) = \frac{b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \dots}{a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \dots},$$

e calcule $I(R)$ com base na alínea b)).

Exercícios com aplicações a análise e processamento de sinais

- 6.20 a) Para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define-se a função real $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$, chamada **transformada de Fourier**¹¹⁸ de f , considerando integral de Lebesgue. Esta função fica definida em \mathbb{R} se e só se F é integrável à Lebesgue em \mathbb{R} , ou seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. À transformação $\mathfrak{F}[f] = \hat{f}$ chama-se **transformação de Fourier**¹¹⁹. É uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R})$ no espaço das funções reais definidas em \mathbb{R} e pode-se provar que pode ser invertida em condições muito gerais, por exemplo: Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, para $t \in \mathbb{R}$, então g está definida e é contínua em \mathbb{R} , $g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$ e $f = g$ q.t.p.¹²⁰ em \mathbb{R} . Uma consequência imediata é: A transformação de Fourier é injetiva como função definida em¹²¹ $L^1(\mathbb{R})$.

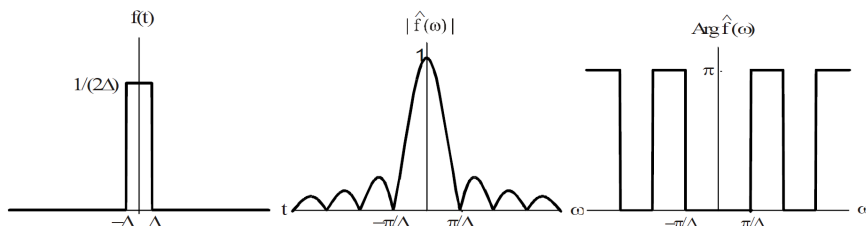


Figura 6.3: Decomposição espectral de um impulso unitário de largura 2Δ

¹¹⁸A transformação de Fourier foi introduzida por J. Fourier, em associação com a introdução de séries de Fourier, numa comunicação sobre a propagação de calor à Academia das Ciências de Paris em 1807, só publicada em 1822 depois de grande controvérsia pela surpresa da afirmação da possibilidade de representação de uma ampla classe de funções por funções trigonométricas. Contudo, a transformação de Fourier só foi tornada rigorosa com trabalhos de vários matemáticos no final do séc. XIX e no início do séc. XX, inclusivamente com a adopção do integral de Lebesgue por H. Lebesgue em 1902. O desenvolvimento da análise de Fourier originou a Análise Harmónica.

¹¹⁹Encontram-se boas introduções à transformação de Fourier nos livros de W. Rudin, *Real and Complex Analysis* e de E. Stein e R. Shakarchi *Complex Analysis*, indicados na bibliografia final. Stein, Elias (1931-1918). Shakarchi, Rami.

¹²⁰q.t.p. significa “quase em toda a parte”, i.e. a menos de um conjunto de medida nula.

¹²¹Pressupõe identificar em $L^1(\mathbb{R})$ funções iguais q.t.p., ou seja tomar como elementos de $L^1(\mathbb{R})$ as classes de equivalência das funções integráveis em \mathbb{R} com a igualdade q.t.p.

A transformação de Fourier é muito útil no estudo e resolução de equações diferenciais, na análise e controlo de sistemas, na análise e processamento de sinais. Neste contexto é usual chamar à transformada de Fourier de uma função **decomposição na frequência** ou **decomposição espectral** de f . Representa-se esta decomposição graficamente em função da frequência pelos gráficos do módulo e de um argumento (ou, na linguagem de análise de sinais, de **amplitude** e **fase**) da transformada de Fourier (Figura 6.3).

b) Prove: Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e existem $M, a > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{-a|t|}$ para $t \in \mathbb{R}$, a transformada de Fourier $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$ definida como função de variável complexa é Holomorfa na faixa horizontal do plano complexo $\{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < a\}$.

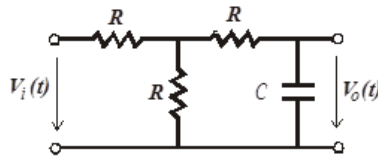


Figura 6.4: Circuito eléctrico

6.21 Considere o circuito da Figura 6.4 e recorde os exercícios 1.17 e 6.20.

a) Supondo que existem, mostre que as transformadas de Fourier das tensões de saída e entrada, resp. \hat{v}_0 e \hat{v}_i , estão relacionadas por $\hat{v}_0 = [2(1 + i\frac{3RC}{2}\omega)]^{-1} \hat{v}_i(\omega)$ e observe que o módulo e o argumento de $\frac{\hat{v}_0}{\hat{v}_i}$ têm as representações gráficas na Figura 6.5. Em particular, as componentes espectrais de alta frequência do sinal de entrada são mais atenuadas do que as de baixa frequência, pelo que se diz que este circuito é um **filtro passa-baixo**.

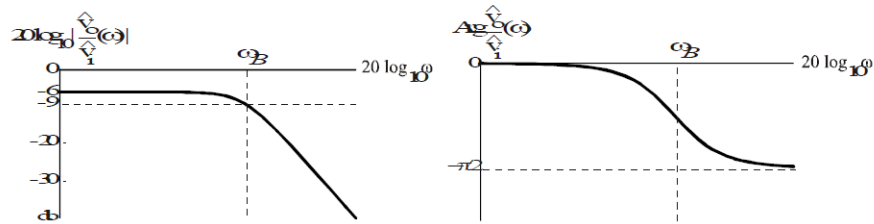


Figura 6.5: Módulo e argumento de $\frac{\hat{v}_0}{\hat{v}_i}$ para o circuito da Figura 6.4

b) Chama-se **largura de banda** de um filtro passa-baixo à frequência $F_B = \frac{\omega_B}{2\pi}$ em que o sinal é atenuado a -3dB ¹²² do seu valor em $\omega = 0$. Mostre que para o circuito considerado ω_B é aproximadamente $\frac{2}{3RC}$. Calcule o valor de RC de modo ao filtro ter largura de banda de 100 Hz.

¹²²dB designa decibéis. É uma medida logarítmica de amplitude de sinais que foi introduzida em acústica para quantificar a intensidade sonora: um sinal de amplitude A tem $20\log_{10} A$ dB.

Capítulo 7

Teorema e fórmula de Cauchy globais

7.1 Introdução

O Teorema de Cauchy Global é descrito neste capítulo em termos de Homologia de Ciclos, definida com a noção de Índice de um caminho fechado em relação a um ponto, segundo uma ideia de E. Artin de 1951 que corresponde a estender o Teorema de Cauchy a um sistema de caminhos fechados (Ciclos) com soma zero de Índices em relação a cada ponto exterior a um conjunto onde a função é Holomorfa (*i.e.* Homólogo a zero). A prova aqui dada do Teorema e Fórmula de Cauchy globais deve-se a J.D. Dixon¹²³ em 1971.

O caso de conjuntos simplesmente conexos foi considerado por A.-L. Cauchy em 1825 para funções com derivada contínua e por E. Goursat em 1900 sem exigir continuidade da derivada. O caso de conjuntos multiplamente conexos é considerado no final do capítulo com a noção de conectividade de conjuntos introduzida para superfícies por B. Riemann em 1857.

As noções de Cadeia, Ciclo e Homologia devem-se a H. Poincaré em 1895-1904, quando contribuiu decisivamente para iniciar a Topologia Algébrica ao estudar propriedades topológicas de superfícies com métodos algébricos.

Na parte final do capítulo incluem-se extensões do Princípio de Módulo Máximo para funções Holomorfas em regiões ilimitadas, inclusivamente com crescimento moderado no infinito, obtidas com o Princípio de Phragmén-Lindelöf estabelecido por L. Phragmén e E. Lindelöf em 1908.

O capítulo termina com uma secção sobre Ordem e Tipo de funções inteiras. Além de propriedades gerais destes conceitos sobre crescimento no infinito de funções inteiras inclui-se uma prova da Conjectura de Denjoy, de A. Denjoy em 1907, afirmando que o n° de valores assintóticos de uma

¹²³Ver E. Artin, *Collected Papers*, Addison-Wesley Publishing Co., 1965. E. Artin resolveu em 1927 o 17º Problema de Hilbert, sobre funções reais polinomiais semidefinidas positivas em n variáveis reais serem uma soma de quadrados de funções racionais; D. Hilbert tinha provado a existência de tais funções polinomiais que não são a soma de quadrados de polinómios, mas o 1º exemplo explícito só foi dado em 1967 por Theodore Motzkin (1908-1970): $z^6+x^4y^2+x^2y^4-3x^2y^2z^2$. Dixon, John D. (1937-).

função inteira sobre curvas que tendem para ∞ é majorado pelo dobro da Ordem da função. Esta conjectura permaneceu em aberto 21 anos, resistindo às incursões de vários matemáticos experientes. O único progresso notável nesse período foi de T. Carleman em 1921 quando obteve o majorante $\frac{\pi^2}{4} \approx 2,5$ vezes a Ordem da função. A Conjectura de Denjoy foi provada em 1929 por L. Ahlfors, quando com 21 anos iniciou a preparação para doutoramento, surpreendendo o mundo matemático e catapultando-o para um amplo reconhecimento que iniciou um percurso que o levou à Medalha Fields 7 anos depois. Depois da elegante prova de L. Ahlfors, com Transformações Conformes e o Princípio de Phragmén-Lindelöf, T. Carleman obteve em 1933 uma prova elementar que é a que se dá neste capítulo.

7.2 Cadeias e ciclos

No capítulo 4 consideraram-se simétricos e concatenações de caminhos, o que exigiu lidar com detalhes sobre os domínios e as relações entre as extremidades de caminhos que são inconvenientes e até irrelevantes para integração. É útil poder juntar caminhos sem preocupações com aspectos secundários, como a ordem em que são considerados e o acerto de extremidades. É por isso que as noções de Cadeia e Ciclo de caminhos são úteis.

Chama-se **Cadeia** em $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ a um conjunto finito de caminhos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ seccionalmente regulares¹²⁴ em Ω , designado $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, identificando Cadeias tais que cada função contínua na união das curvas descritas pelos caminhos que as compõem têm integrais iguais, com o **integral de uma função f numa Cadeia Γ** definido por $\int_{\Gamma} f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f$, quando estes integrais existem. Diz-se que a Cadeia Γ é a **soma dos caminhos** $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. O **simétrico da Cadeia Γ** é $-\Gamma = (-\gamma_1) + \dots + (-\gamma_n)$, em que $-\gamma$ é o simétrico do caminho γ . Se os caminhos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ são fechados, diz-se que a Cadeia Γ é um **Ciclo**. Designa-se $\Gamma^* = \cup_{k=1}^n \gamma_k^*$.

A **soma de Cadeias** $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ e $\Sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_m$ é a Cadeia $\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n + \sigma_1 + \dots + \sigma_m$ e a **diferença de Cadeias** é $\Gamma - \Sigma = \Gamma + (-\Sigma)$. A soma de uma Cadeia Γ consigo mesma $k \in \mathbb{N}$ vezes é designada $k\Gamma$. Define-se $(-k)\Gamma = -k\Gamma$ para $k \in \mathbb{N}$, e **Cadeia nula** ou **Cadeia vazia** por $0 = 0\Gamma = \emptyset$. Assim, podem-se considerar combinações lineares finitas de Cadeias num conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ com coeficientes inteiros. Portanto, se f é uma função complexa contínua definida em $\Omega \subset \mathbb{C}$, Γ, Σ são Cadeias em Ω e $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{a\Gamma + b\Sigma} f = a \int_{\Gamma} f + b \int_{\Sigma} f.$$

As somas e subtracções de um n^o finito de Cadeias em $\Omega \subset \mathbb{C}$ dão Cadeias em Ω e a soma é comutativa, associativa, tem elemento neutro e cada elemento tem simétrico, *i.e.* o conjunto das Cadeias em $\Omega \subset \mathbb{C}$ é grupo comutativo.

Chama-se **Índice de um Ciclo $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ em relação a um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$** a $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma_k}(z)$.

¹²⁴Com integrais de Lebesgue basta considerar caminhos rectificáveis.

É imediato das definições que se Γ, Σ são Ciclos e $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Ind}_{a\Gamma+b\Sigma} = a \text{Ind}_\Gamma + b \text{Ind}_\Sigma .$$

Como as componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ são intersecções das de $\mathbb{C} \setminus \gamma_1^*, \dots, \mathbb{C} \setminus \gamma_n^*$ e, de (4.9), Ind_{γ_k} é constante em cada componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$ e é zero na componente conexa ilimitada deste conjunto, para $k=1, \dots, n$, também se Γ é um Ciclo, Ind_Γ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ e é zero na componente conexa ilimitada deste conjunto.

É conveniente ter um método prático para calcular Índices de Ciclos, para o que é útil o resultado seguinte que se baseia no Índice de um caminho fechado γ em \mathbb{C} aumentar de 1 quando é atravessado “da direita para a esquerda” e, como $\text{Ind}_\gamma = 0$ na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, poder ser calculado sucessivamente em conjuntos de pontos ao longo de um caminho τ que começa na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ e corta transversalmente γ intersectando todas componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (Figura 7.1).

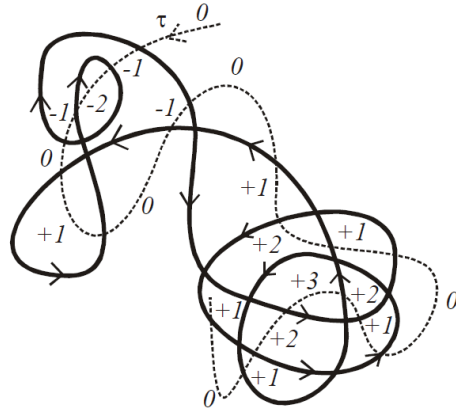


Figura 7.1: Determinação de Ind_γ em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$

(7.1) Se γ é um caminho seccionalmente regular fechado em \mathbb{C} , $a < u < v < b$ são tais que a circunferência com centro no ponto P a meio do segmento de recta com extremidades em $\gamma(u)$ e $\gamma(v)$ que passa nestes dois pontos e não intersecta a curva γ^* em qualquer outro ponto, o círculo por ela limitado intersecta γ^* no conjunto $\gamma([u, v])$, e B_+, B_- designam as componentes conexas de $B \setminus \gamma^*$ com $P \pm iQ \in B_\pm$, em que $Q = \frac{\gamma(v) - \gamma(u)}{2}$, e $z \in B_+, w \in B_-$, então $\text{Ind}_\gamma z = \text{Ind}_\gamma w + 1$ (Figura 7.2).

Dem. Para simplificar notação reparametriza-se γ para ser $u=0$ e $v=\pi$,

$$C(t) = P - Q e^{it}, \text{ para } t \in [0, 2\pi], \quad f(t) = \begin{cases} C(t) & , \text{ se } t \in [0, \pi] \\ \gamma(2\pi - t) & , \text{ se } t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \gamma(t) & , \text{ se } t \in [0, \pi] \\ C(t) & , \text{ se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} \gamma(t) & , \text{ se } t \in [a, 0] \cup [0, \pi] \\ C(t) & , \text{ se } t \in [0, \pi] \end{cases} .$$

Como $\gamma(0) = C(0)$ e $\gamma(\pi) = C(\pi)$, os caminhos f, g, h são fechados (Figura 7.2). Seja $r = \|Q\|$ o raio da circunferência considerada no enunciado. Se

$E \subset \text{cl } B$ e $\zeta \in C^* \setminus E$, $2P - \zeta$ é o ponto na circunferência C^* diametralmente oposto a ζ , e verifica-se $E \subset B_{2r}(2P - \zeta)$ e $\zeta \notin B_{2r}(2P - \zeta)$. Com $E = g^*$, $\zeta = P - iQ$, é $\text{Ind}_g(P - iQ) = 0$. Como $\text{cl } B_-$ é conexo e $B_- \cap g^* = \emptyset$, é $\text{Ind}_g(w) = 0$ para $w \in B_-$. Analogamente, $\text{Ind}_f(z) = 0$ para $z \in B_+$. Logo, é

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(z) &= \text{Ind}_\gamma(z) + \text{Ind}_f(z) = \text{Ind}_h(z) = \text{Ind}_h(w) \\ &= \text{Ind}_h(w) + \text{Ind}_g(w) = \text{Ind}_\gamma(w) + \text{Ind}_C(w) = \text{Ind}_\gamma(w) + 1. \end{aligned}$$

Q.E.D.

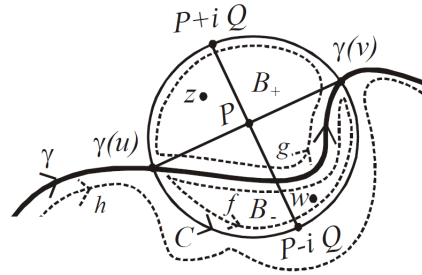


Figura 7.2: Ilustração para prova de (7.1), $\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_\gamma(w) + 1$

Um **Ciclo Homólogo a zero** em $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um Γ tal que $\text{Ind}_\Gamma = 0$ em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (Figura 7.3 à esquerda). Diz-se que Ciclos Γ e Σ em Ω são **Ciclos Homólogos** em Ω se $\Gamma - \Sigma$ é Ciclo Homólogo a zero em Ω , *i.e.* se $\text{Ind}_\Gamma = \text{Ind}_\Sigma$ em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (Figura 7.3 à direita). A Homologia é uma relação de equivalência no conjunto dos Ciclos em $\Omega \subset \mathbb{C}$; às classes de equivalência chama-se **classes de Homologia** de Ω .

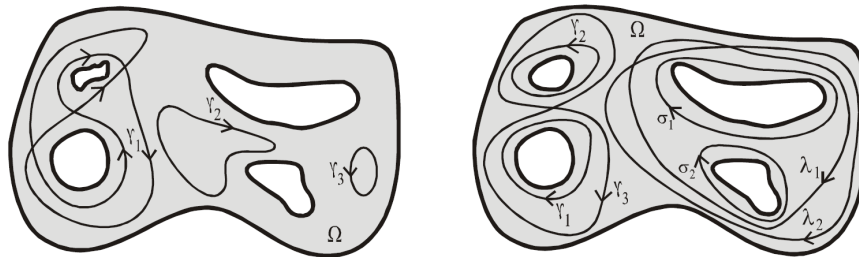


Figura 7.3: Caminhos fechados e Ciclos Homólogos a zero ($\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 0$) e caminhos fechados e Ciclos Homólogos ($\gamma_1 + \gamma_2 \approx \gamma_3$, $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \sigma_1 + \sigma_2$)

Como o Índice de um caminho γ em relação a um ponto fora de γ^* é a diferença do n° de voltas que o caminho dá em torno desse ponto nos sentidos positivo e negativo, um Ciclo é Homólogo a zero em Ω se os caminhos fechados que o compõem dão em torno de cada uma das componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tantas voltas no sentido positivo como negativo (Figura 7.3 à esquerda). Logo, dois caminhos são Homólogos em Ω se ambos têm a mesma diferença entre o n° de voltas que dão no sentido positivo e negativo em torno de cada uma das componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (Figura 7.3 à direita).

A Homotopia de pares de caminhos fechados seccionalmente regulares com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final e de caminhos fechados num dado conjunto estende-se a, resp., Cadeias e Ciclos.

Γ e Σ são **Cadeias (ou Ciclos) Homotópicos em $\Omega \subset \mathbb{C}$** se podem ser decompostos em somas finitas de caminhos Homotópicos em Ω em correspondência biunívoca (Figura 7.4). Homotopia é uma relação de equivalência no conjunto das Cadeias (ou Ciclos) em $\Omega \subset \mathbb{C}$; às classes de equivalência de Ciclos chama-se **classes de Homotopia** de Ω .

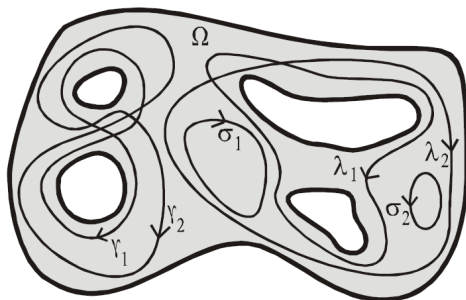


Figura 7.4: Caminhos e Ciclos Homotópicos em Ω ($\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\lambda_1 \sim \lambda_2$, $\sigma_1 \sim \sigma_2$)

Há uma relação simples entre Homologia e Homotopia¹²⁵ de Ciclos.

(7.2) *Ciclos Homotópicos em $\Omega \subset \mathbb{C}$ são Homólogos em Ω .*

Dem. É imediata da definição de Homotopia de Ciclos e da invariância do Índice relativo a pontos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ em cada classe de Homotopia de Ω . *Q.E.D.*

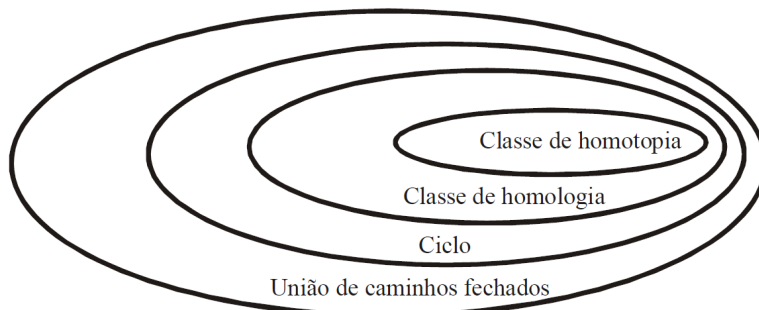


Figura 7.5: Relações de inclusão de classe de Homotopia, classe de Homologia, conjunto dos Ciclos e conjunto das uniões finitas de caminhos fechados seccionalmente regulares (ou, com integral de Lebesgue, rectificáveis) em $\Omega \subset \mathbb{C}$

Há conjuntos $\Omega \subset \mathbb{C}$ com Ciclos Homólogos não Homotópicos em Ω (e.g. γ_1 e γ_2 na Figura 7.3). Em geral, a decomposição em classes de Homotopia é mais fina do que em classes Homologia; toda classe de Homotopia em Ω está contida numa classe de Homologia em Ω e toda classe de Homologia em Ω é união disjunta de classes de Homotopia em Ω (Figura 7.5).

¹²⁵Não se exploram aqui as consequências das importantes noções de Homotopia e Homologia em Topologia Algébrica e de Álgebra Homológica, além da utilização de Homologia na prova do Teorema da Curva de Jordan no apêndice I. O leitor interessado em Topologia Algébrica poderá consultar textos gerais nessa área como, por exemplo, o excelente texto introdutório de W. Fulton, *Algebraic Topology, A First Course*. Springer-Verlag, New York, 1995. Fulton, William (1939-).

7.3 Teorema e fórmula de Cauchy globais

A prova do Teorema de Cauchy Global e da correspondente Fórmula de Cauchy aqui apresentada é de J. Dixon¹²⁶, em 1971.

(7.3) Teorema de Cauchy Global e Fórmula de Cauchy Global:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ Ciclos em Ω e $f \in H(\Omega)$.

1. Se Γ é Homólogo a zero em Ω , então $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
2. Se Γ é Homólogo a zero em Ω , então $f(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$.
3. Se Γ_1 e Γ_2 são Homólogos em Ω , então $\int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz$.

Dem. (2 \Rightarrow 1) Toma-se $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ e define-se $F(z) = (z-a)f(z)$. Como $F \in H(\Omega)$ e $F(a) = 0$, de 2, é

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-a} dz = i2\pi F(a) \text{Ind}_{\Gamma}(a) = 0.$$

(1 \Rightarrow 3) Se Γ_1 e Γ_2 são Homólogos em Ω , $\Gamma_1 - \Gamma_2$ é Homólogo a zero em Ω e, de 1,

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) dz = 0.$$

Resta provar 2, para o que são úteis as funções $g : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $h_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$, em que $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0\}$, tais que

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{se } w \neq z \\ f'(z), & \text{se } w = z \end{cases}, \quad h(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} g(w, z) dw, \quad h_0(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

e notar que 2 equivale a $h(z) = 0$ para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$. De (6.4), $g(w, z)$ é contínua como função das duas variáveis e Holomorfa como função de z para $w \in \Gamma^*$ fixo e, com o resultado a seguir a esta prova, obtém-se $h \in H(\Omega)$. De (5.8), h_0 é analítica; logo, Holomorfa em Ω_0 . Em $\Omega_0 \cap \Omega$ é $h = h_0 - i2\pi f \text{Ind}_{\Gamma} = h_0$. Como Ω_0 é união de componentes conexas do conjunto aberto $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ e, portanto, é subconjunto aberto de \mathbb{C} , $\varphi : \Omega \cup \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi = h$ em Ω e $\varphi = h_0$ em Ω_0 é Holomorfa em $\Omega \cup \Omega_0$; como $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega_0$, φ é função inteira. Como a componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ está incluída em Ω_0 , $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi(z) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} h_0(z) = 0$. Do Teorema de Liouville (5.14), φ é constante e, portanto, $\varphi = 0$ em \mathbb{C} . Logo $h = 0$ em $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Q.E.D.

O resultado seguinte, utilizado na prova precedente, é útil noutras situações, pelo que se considera separadamente.

(7.4) Se $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ são conjuntos abertos, Γ é uma Cadeia em Ω_1 , $g : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, $z \mapsto g(w, z)$ é Holomorfa em Ω_2 para $w \in \Gamma^*$ e $h : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que $h(z) = \int_{\Gamma} g(w, z) dw$, então $h \in H(\Omega_2)$.

¹²⁶ John D. Dixon, A brief proof of Cauchy's integral theorem, *Proc. Amer. Math. Society*, **29** (1971), 625-626.

Dem. A prova usa continuidade, convergência uniforme e os teoremas de Fubini, de Cauchy em conjuntos convexos e de Morera.

Como o integral numa Cadeia é soma finita de integrais em caminhos seccionalmente regulares e a soma de funções Holomorfas é Holomorfa, basta provar com a Cadeia Γ substituída por um caminho seccionalmente regular em Ω_1 , $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_1$. Como g é contínua em $\Omega_1 \times \Omega_2$, é uniformemente contínua em cada subconjunto compacto. Se $\{z_n\}$ é sucessão em Ω_2 que converge para algum $z \in \Omega_2$, $g(w, z_n) \rightarrow g(w, z)$ uniformemente para todo $w \in \gamma^*$, pois γ^* é conjunto compacto. Integrando os termos da sucessão e o seu limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Delta} h(z_n) dz = \int_{\partial\Delta} h(z) dz$. Logo, h é contínua em Ω_2 , e para todo triângulo fechado $\Delta \subset \Omega_2$ pode-se aplicar o Teorema de Fubini e o Teorema de Cauchy em conjuntos convexos (4.8), obtendo-se

$$\int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\partial\Delta} \int_{\gamma} g(w, z) dw dz = \int_{\gamma} \int_{\partial\Delta} g(w, z) dw dz = 0.$$

Do Teorema de Morera (6.3), $h \in H(\Omega_2)$.

Q.E.D.

Se γ é caminho seccionalmente regular fechado num conjunto aberto convexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, do Teorema de Cauchy em conjuntos convexos (4.8), é $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$, pelo que todo Ciclo em Ω é Homólogo a zero em Ω . Logo, se Ω é convexo e $f \in H(\Omega)$, as condições da hipótese de (7.3) verificam-se para todo Ciclo Γ em Ω , pelo que o Teorema de Cauchy Global (1 em (7.3)) generaliza o Teorema de Cauchy em conjuntos convexos (4.8) e a Fórmula de Cauchy Global (2 em (7.3)) generaliza a Fórmula de Cauchy em conjuntos convexos (4.12).

7.4 Invariância de integrais de funções holomorfas

O resultado seguinte é consequência imediata do Teorema de Cauchy Global.

(7.5) Invariância de integrais de funções Holomorfas sobre caminhos Homólogos ou Homotópicos: Se γ_1, γ_2 são caminhos seccionalmente regulares Homotópicos, ou fechados e Homólogos num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f \in H(\Omega)$, $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Dem. Para caminhos fechados Homólogos em Ω é consequência imediata de 3 no Teorema de Cauchy Global. Caminhos fechados Homotópicos em Ω são Homólogos em Ω , pelo que nesse caso é consequência imediata do resultado para caminhos fechados Homólogos. Resta provar para caminhos Homotópicos em Ω não fechados. De (4.11), o Índice do caminho fechado $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ em relação a cada ponto de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ é nulo, pelo que o Ciclo $\Gamma = \gamma$ é Homólogo a zero em Ω e, de 1 no Teorema de Cauchy Global, obtém-se $\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\Gamma} f = 0$.

Q.E.D.

No capítulo 4 viu-se que os integrais de uma função complexa sobre caminhos seccionalmente regulares equivalentes são invariantes, pelo que os

integrals de funções complexas ficam bem definidos nas classes de equivalência. O resultado precedente estabelece a invariância dos integrals de uma função Holomorfa em $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre caminhos seccionalmente regulares Homotópicos em Ω , pelo que os integrals de funções Holomorfas em Ω ficam bem definidos nas classes de Homotopia de Ω . O resultado também estabelece a invariância dos integrals de uma função Holomorfa em Ω sobre caminhos fechados seccionalmente regulares Homólogos em Ω , pelo que os integrals de funções Holomorfas em Ω ficam bem definidos nas classes de Homologia de Ω . Como Cadeias (resp., Ciclos) em $\Omega \subset \mathbb{C}$ são somas finitas de caminhos (resp., caminhos fechados) seccionalmente regulares em Ω , o resultado precedente e estas observações também se aplicam a Cadeias (resp., Ciclos).

7.5 Regiões simplesmente e multiplamente conexas

Tal como é usual em \mathbb{R}^n , diz-se que $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma **região simplesmente conexa** se é uma região onde todo caminho seccionalmente regular fechado é Homotópico a um caminho constante em Ω (*i.e.* a um caminho γ tal que γ^* é um ponto) (Figura 7.6).

O resultado seguinte estabelece que todos Ciclos numa região simplesmente conexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ são Homólogos a zero em Ω , ou seja não há Ciclos em Ω à volta de pontos que não pertencem à região. Logo, para regiões simplesmente conexas a aplicação do Teorema de Cauchy Global (7.3) fica muito simplificada, pois é desnecessário verificar se um Ciclo numa tal região é Homólogo a zero porque é sempre.

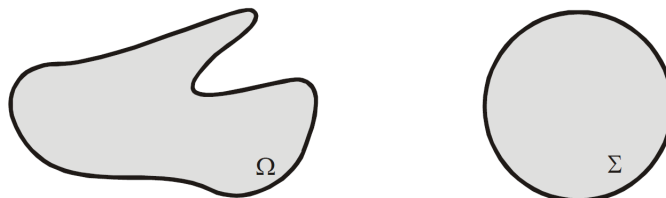


Figura 7.6: Regiões simplesmente conexas

(7.6) *Numa região simplesmente conexa em \mathbb{C} todo Ciclo é Homólogo a zero.*

Dem. Todo caminho fechado seccionalmente regular em Ω é Homotópico a um caminho constante em Ω e, de (7.2), também é Homólogo a um caminho constante em Ω . O Índice de um caminho constante em relação a um ponto do complementar de Ω é 0, pelo que um tal caminho é Homólogo a zero. Logo, todo caminho fechado seccionalmente regular em Ω é Homólogo a zero em Ω . Como Ciclos em Ω são somas finitas de caminhos seccionalmente regulares em Ω , todos Ciclos em Ω são Homólogos a zero. *Q.E.D.*

O Teorema de Unificação (6.5) garante equivalência de Holomorfia numa região e existência de primitiva em cada aberto convexo contido na região. Pode-se provar o resultado análogo obtido substituindo conjuntos convexos por simplesmente conexos.

(7.7) Uma função complexa numa região simplesmente conexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ é Holomorfa em Ω se e só se tem primitiva em Ω .

Dem. Do resultado precedente, todo caminho fechado seccionalmente regular γ em Ω é Homólogo a zero. Se $f \in H(\Omega)$, do Teorema de Cauchy Global, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Logo, de (4.5), f tem primitiva em Ω . Reciprocamente, se F é primitiva de f em Ω , é $F' = f$ e, portanto, $F \in H(\Omega)$, pelo que é indefinidamente diferenciável, assim como f , e $f \in H(\Omega)$. *Q.E.D.*

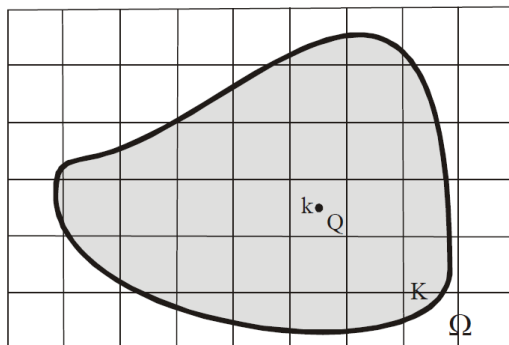


Figura 7.7: Ilustração de apoio a prova de (7.8)

É útil dispor da caracterização seguinte das regiões em que todos Ciclos são Homólogos a zero, *i.e.* onde não há Ciclos em torno de pontos que não pertencem a essas regiões. Obtém-se, assim, uma propriedade alternativa de conjuntos em que a aplicação do Teorema de Cauchy Global é simplificada.

(7.8) Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, as afirmações seguintes são equivalentes:

1. Todos Ciclos em Ω são Homólogos a zero em Ω .
2. Não há qualquer componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ limitada.

Dem. (2 \Rightarrow 1) Se Γ é um Ciclo em Ω , o conjunto aberto $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ tem uma e só uma componente conexa ilimitada U e, de (4.9), $\text{Ind}_{\Gamma} = 0$ em Ω . Se $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$ e nenhuma das suas componentes conexas é limitada, é $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$, pelo que $\text{Ind}_{\Gamma} = 0$ em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e, portanto, Γ é Homólogo a zero em Ω .

(1 \Rightarrow 2) Supõe-se que 2 é falsa. Existe componente conexa limitada K de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Se $z \in \partial K \subset \partial \Omega$, como Ω é aberto, é $z \notin \Omega$ e $z \in \partial K \setminus \Omega$; $K \cup \{z\} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ é conexo e como K é componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, é $K \cup \{z\} \subset K$; logo, $\partial K \subset K$ e, portanto, K é fechado. Como K é limitado e fechado, é compacto. Se $\partial(K \cup \Omega) \neq \emptyset$, a distância mais curta entre pares de pontos de K e $\partial(K \cup \Omega)$ é um número $d > 0$; se $\partial(K \cup \Omega) = \emptyset$, toma-se $d > 0$ arbitrário. Fixa-se $k \in K$ e cobre-se todo plano com uma rede de quadrados fechados Q_j com lados de comprimento $\frac{d}{\sqrt{2}}$ de modo a k ficar no centro de um dos quadrados (Figura 7.7). Para cada quadrado Q_j considera-se o caminho poligonal fechado simples γ_j que percorre a fronteira de Q_j no sentido positivo em relação aos pontos interiores a Q_j . Considera-se o Ciclo

$\Gamma = \sum_j \gamma_j$, em que a soma respeita aos quadrados que intersectam K . Como k está no interior de um dos quadrados, é $\text{Ind}_\Gamma = 1$. Como Γ é igual ao Ciclo γ^* em que γ é o caminho poligonal fechado simples que percorre no sentido positivo a fronteira da união dos quadrados que intersectam K , Γ é um Ciclo em Ω . Como $\text{Ind}_\Gamma = 1$ e $k \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, Γ não Homólogo a zero em Ω . Logo, 1 é falsa. Portanto, 2 falsa \Rightarrow 1 falsa, ou seja $1 \Rightarrow 2$. *Q.E.D.*

Este resultado e (7.6) garantem que as condições 1 e 2 deste resultado são necessárias para uma região ser simplesmente conexa. No capítulo 10 vê-se que uma destas condições também é suficientes para a região ser simplesmente conexa. Portanto, cada uma das condições é uma caracterização alternativa das regiões simplesmente conexas.

Diz-se que uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ é **multiplamente conexa** se não é simplesmente conexa (Figura 7.8). Mais especificamente, diz-se que uma **região tem conectividade finita** n se o seu complementar tem exactamente $n-1$ componentes conexas limitadas (podendo ter ou não componentes conexas ilimitadas) e que uma **região tem conectividade infinita** se o seu complementar tem infinitas componentes conexas limitadas.

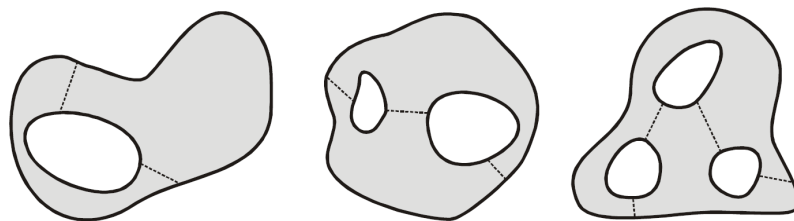


Figura 7.8: Regiões multiplamente conexas com conectividade $n = 2, 3, 4$

A noção de conectividade foi introduzida por B. Riemann em 1857 para superfícies. Quando aplicada a subconjuntos de um plano, corresponde ao mínimo n° de cortes, cada um ao longo de um caminho contido no conjunto, que pode separar o conjunto em conjuntos simplesmente conexos. Por isso, conectividade n de um conjunto corresponde ao complementar ter $n-1$ componentes conexas limitadas.

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é região com conectividade finita n , K_1, \dots, K_{n-1} são as componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, e Γ é Ciclo em Ω , pode-se obter como na prova de (7.8) que Ind_Γ é constante em cada K_j , para $j = 1, \dots, n-1$, e se K_n é uma componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, é $\text{Ind}_\Gamma = 0$ em K_n (pode haver várias componentes conexas ilimitadas em $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e nesse caso $\text{Ind}_\Gamma = 0$ em todas estas componentes). Como na prova de (7.8), podem-se obter Ciclos Γ_j em Ω tais que $\text{Ind}_{\Gamma_j} = 1$ em K_j e $\text{Ind}_{\Gamma_j} = 0$ em $\mathbb{C} \setminus (\Omega \cup K_j)$, para $j = 1, \dots, n-1$.

Se para um dado Ciclo Γ em Ω $c_j \in \mathbb{Z}$ é o valor de Ind_Γ em K_j , para $j = 1, \dots, n-1$, e $\Sigma = \Gamma - \sum_{j=1}^{n-1} c_j \Gamma_j$, é $\text{Ind}_\Sigma = 0$ em $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Logo, Γ é Homólogo a $\sum_{j=1}^{n-1} c_j \Gamma_j$ em Ω . Portanto, todo Ciclo em Ω é Homólogo a uma combinação linear com coeficientes inteiros dos Ciclos Γ_j , com $j = 1, \dots, n-1$.

Esta combinação linear é única, pois a diferença de duas combinações lineares dos Ciclos Γ_j Homólogas a um mesmo Ciclo Γ é Homóloga a zero em Ω e, portanto, tem todos coeficientes zero. Por isso, diz-se que os Ciclos Γ_j , $j = 1, \dots, n-1$, são uma **Base de Homologia** para a região Ω de conectividade n . Bases de Homologia de uma região multiplamente conexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ não são únicas, mas, tal como para bases de espaços lineares, todas têm a mesma cardinalidade. Do Teorema de Cauchy Global (7.3), $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \int_{\Gamma_j} f(z) dz$ para $f \in H(\Omega)$. Em certos casos os valores dos integrais $\int_{\Gamma_j} f(z) dz$ nos elementos de uma Base de Homologia podem ser obtidos facilmente e este é um método conveniente que permite avaliar muitos integrais sem fazer integrações explícitas, o que se explora no capítulo seguinte com o Teorema dos Resíduos.

7.6 Extensões do princípio de módulo máximo

Se $\Omega = \mathbb{R} + i[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, com $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, a função $f(z) = e^{e^z}$ satisfaz

$$|f(x \pm i\frac{\pi}{2})| = |e^{e^x e^{\pm i\frac{\pi}{2}}}| = |e^{\pm ie^x}| = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{e^x} = +\infty,$$

pelo que $|f|$ é ilimitada em Ω apesar de ser 1 em $\partial\Omega$. Portanto, embora do Princípio de Módulo Máximo (5.19) se f é uma função analítica num subconjunto limitado e fechado K de uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, o máximo de $|f|$ em K é assumido em ∂K , tal pode falhar se K é ilimitado. É possível estender o resultado a regiões ilimitadas se na vizinhança de ∞ $|f|$ é majorada pelo máximo de $|f|$ em $\partial\Omega$. Prova-se um resultado um pouco mais geral.

(7.9) *Se f é uma função analítica numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ ilimitada e existe $M > 0$ tal que para cada $b \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$ existe uma vizinhança $V_b \cap \Omega$ de b em que $|f| \leq M$, então $|f| \leq M$ em Ω .*

Dem. Seja $\varepsilon > 0$. $A_\varepsilon = \{z \in \Omega : |f(z)| > M + \varepsilon\}$ é limitado e $\text{cl } A_\varepsilon \subset \Omega$. Portanto, $\text{cl } A_\varepsilon$ é subconjunto compacto de Ω e, do Princípio de Módulo Máximo, se fosse $\text{cl } A_\varepsilon \neq \emptyset$, o máximo de $|f|$ em $\text{cl } A_\varepsilon$ seria em ∂A_ε . Como neste conjunto $|f| = M + \varepsilon$, é $A_\varepsilon = \emptyset$ e $|f| \leq M + \varepsilon$ em Ω . Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $|f| \leq M$ em Ω . *Q.E.D.*

(7.10) *Se f é função analítica na faixa vertical do plano complexo $\Omega = \{x + iy : a < x < b, y \in \mathbb{R}\}$, limitada e contínua em $\text{cl } \Omega$, e $S_f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$ para $x \in [a, b]$, então $S_f^{b-a}(x) \leq S_f^{b-x}(a) S_f^{x-a}(b)$ para $x \in [a, b]$, e $|f| \leq \max_{\partial\Omega} |f|$ em Ω .*

Dem. Se $S_f(a), S_f(b) > 0$, $g(z) = S_f^{\frac{b-z}{b-a}}(a) S_f^{\frac{z-a}{b-a}}(b)$ é função inteira que nunca é 0 em $\text{cl } \Omega$, com $\frac{1}{g}$ limitada em $\text{cl } \Omega$ e $|g(x + iy)| = S_f(x)$ para $x \in \{a, b\}$, $y \in \mathbb{R}$. Logo, $\frac{f}{g}$ satisfaz as condições para f no enunciado com valor absoluto em $\partial\Omega$ majorado por 1; e para a aplicar o resultado precedente seria preciso essa majoração também numa vizinhança de ∞ . Se $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\Omega} \left| \frac{f}{g} \right|$

e $M \leq 1$, do resultado precedente, $|\frac{f}{g}| \leq 1$ em Ω . Se $M > 1$, baixa-se o majorante multiplicando por uma função apropriada, e.g. $h_\varepsilon(x+iy) = \frac{1}{1+i\varepsilon y}$ para $x, y \in \mathbb{R}$, obtendo-se $|h_\varepsilon \frac{f}{g}| \leq \frac{M}{\varepsilon|y|}$; para o retângulo $R = [a, b] \times [-\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\varepsilon}{M}]$, é $|h_\varepsilon \frac{f}{g}| \leq 1$ em ∂R , pelo que do Princípio de Módulo Máximo, esta majoração vale em R , e obviamente vale para $x \in [a, b]$ e $|y| \geq \frac{\varepsilon}{M}$; do resultado precedente, $|h_\varepsilon \frac{f}{g}| \leq 1$, e $|f(x+iy)| \leq (1+\varepsilon|y|)g(x+iy)$ para $x+iy \in \Omega$; como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, também neste caso $|f| \leq g$ em Ω . Logo, $|f(z)| \leq S_f^{\frac{b-z}{b-a}}(a) S_f^{\frac{z-a}{b-a}}(b)$ para $z \in \Omega$, e, $S_f^{b-a}(x) \leq S_f^{b-x}(a) S_f^{x-a}(b)$ para $x \in [a, b]$. Logo

$$S_f^{b-a}(x) \leq \max\{S_f(a), S_f(b)\}^{b-x} \max\{S_f(a), S_f(b)\}^{x-a} = \max\{S_f(a), S_f(b)\}, \quad x \in [a, b],$$

$$\text{e } |f| \leq \max\{S_f(a), S_f(b)\} = \max_{\partial\Omega} |f| \text{ em } \Omega.$$

Se $S_f(a) = 0$, $f = 0$ em toda recta vertical $\mathcal{R}e z = a$ e f pode ser estendida por simetria (ver exercício 6.7) a uma função Holomorfa na faixa vertical aberta limitada pelas rectas verticais $\mathcal{R}e z = a - (b-a)$ e $\mathcal{R}e z = b$ que é 0 na recta $\mathcal{R}e z = a$, é 0 em toda essa faixa vertical e, portanto, em $\text{cl } \Omega$, pelo que o resultado é trivialmente válido neste caso. Q.E.D.

Também é possível uma extensão a conjuntos ilimitados sem exigir $|f|$ uniformemente limitada em vizinhanças de pontos em $\partial\Omega \cup \{\infty\}$, mas restringindo o crescimento de $|f(z)|$ quando z tende para esses pontos, analogamente à extensão do Teorema de Liouville a funções ilimitadas sublineares (5.18), por aplicação do Princípio de Phragmén-Lindelöf. Em geral, este Princípio consiste em multiplicar uma função f Holomorfa numa região ilimitada Ω por uma função h_ε tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon = 1$, de modo a limitar o produto $|fh_\varepsilon| < M$ na fronteira de uma região limitada $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ e aplicar o Princípio de Módulo Máximo para obter que fh_ε é limitada em $\tilde{\Omega}$, expandindo depois a região $\tilde{\Omega}$ para Ω e estabelecendo que fh_ε é limitada em Ω , e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obter $fh_\varepsilon \rightarrow f$ e concluir que f é limitada em Ω .

(7.11) **Princípio de Phragmén-Lindelöf:** Se f é função analítica numa região simplesmente conexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ e existem $M, \varepsilon_0 > 0$ e $\varphi \in H(\mathbb{C})$ que não assume o valor 0 e é limitada em Ω tais que para cada $b \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$, existe uma vizinhança V_b de b e $|f(z)| \min\{1, |\varphi(z)|^\varepsilon\} \leq M$ para $z \in V_b \cap \Omega$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, é $|f| \leq M$ em Ω .

Dem. Seja $K > 0$ tal que $|\varphi| \leq K$ em Ω . Como $\varepsilon\varphi^{\varepsilon-1} \in H(\Omega)$, de (7.7), tem primitiva Holomorfa em Ω , que é um Ramo de φ^ε . $F = f\varphi^\varepsilon K^{-\varepsilon}$ é analítica e $|F| \leq M \max\{1, K^{-\varepsilon}\}$ em Ω . Logo, $|f| \leq |\varphi|^{-\varepsilon} M \max\{1, K^{-\varepsilon}\}$ em Ω . Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $|f| \leq M$ em Ω . Q.E.D.

(7.12) **Corolário:** Se f é função analítica no sector angular de abertura $\frac{\pi}{a}$, $\Omega = \{re^{i\theta} : r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2a}\}$ com $a \geq \frac{1}{2}$, e existem $M, C > 0$ e $\rho < a$ tais que para cada $b \in \partial\Omega$ existe vizinhança V_b de b tal que $|f| \leq M$ em $V_b \cap \Omega$ e $|f(z)| \leq Ce^{|z|^\rho}$ para $z \in \Omega$ com $|z|$ grande, é $|f| \leq M$ em Ω .

Dem. Seja $\sigma \in]\rho, a[$ e $\varphi(z) = e^{-z^\sigma}$ para $z \in \Omega$. Com $z = re^{i\theta}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2a}$, é $|\varphi(re^{i\theta})| = e^{-r^\sigma \cos(\sigma\theta)}$. Como $|\sigma\theta| < \frac{\pi}{2}$, é $\cos(\sigma\theta) \geq \delta$ para algum $\delta > 0$ e $|\varphi| < 1$ em Ω . Para qualquer $\varepsilon > 0$ e para $r > 0$ grande,

$$|f(re^{i\theta})| |\varphi(re^{i\theta})|^\varepsilon \leq C e^{r^\rho - \varepsilon r^\sigma \cos(\sigma\theta)} \leq C e^{r^\rho - \varepsilon r^\sigma \delta} \rightarrow 0, \quad \text{quando } r \rightarrow +\infty.$$

Do Princípio de Phragmén-Lindelöf (7.11), $|f| \leq M$ em Ω . *Q.E.D.*

(7.13) **Corolário:** *Se f é função analítica em $\Omega = \{re^{i\theta} : r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2a}\}$, com $a \geq \frac{1}{2}$, existe $M > 0$ tal que para cada $b \in \partial\Omega$ existe vizinhança V_b de b tal que $|f| \leq M$ em $V_b \cap \Omega$ e para cada $\varepsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C e^{\varepsilon|z|^a}$ para $z \in \Omega$ com $|z|$ grande, é $|f| \leq M$ em Ω .*

Dem. Sejam $\delta > \varepsilon > 0$ arbitrários e $g = f e^{-\delta z^a}$. Existe $C > 0$ tal que para $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| \leq C e^{(\varepsilon - \delta)x^a} = 0$. Logo, $\{|g(x)| : x > 0\}$ é subconjunto de \mathbb{R} majorado e, portanto, tem supremo M_1 . Designa-se $M_2 = \max\{M_1, M\}$ e $\Omega_\pm = \{re^{i\theta} : r > 0, 0 < \pm\theta < \frac{\pi}{2a}\}$. O corolário precedente pode ser aplicado com g em vez de f , Ω_\pm em vez de Ω e M_2 em vez de M , pois cada um dos conjuntos Ω_\pm é, a menos de rotação em torno de 0, um sector do tipo considerado no corolário, obtendo-se $|g| \leq M_2$ em cada sector Ω_\pm e, portanto, também no sector inicial Ω , pois $\Omega \setminus (\Omega_- \cup \Omega_+)$ é o semieixo real positivo e aí $|g| \leq M_1 \leq M_2$. Se fosse $M_2 = M_1 > M$, $|g|$ assumiria o valor máximo M_1 em algum ponto $x_{\max} > 0$ e considerando sectores limitados e fechados contidos em $\Omega \cap \{re^{i\theta} : 0 < r < R\} \cup \{0\}$ com $R > |x_{\max}|$, do Princípio de Módulo Máximo, g é constante nestes sectores, logo, constante em Ω , e $|g| = M_1 = M$ em Ω , em contradição com $M_1 > M$. Logo, $M_2 = M$ e $|g| \leq M$ em Ω , pelo que $|f| \leq M e^{\delta \operatorname{Re} z^a}$ para $z \in \Omega$. Como $\delta > \varepsilon > 0$ são arbitrários, $|f| \leq M$ em Ω . *Q.E.D.*

A condição de limitação de crescimento no infinito $|f(z)| \leq C e^{\varepsilon|z|^a}$ deste resultado é ótima, pois com $f(z) = e^{z^a}$, em pontos da fronteira de Ω é $|f(re^{\pm i\frac{\pi}{2a}})| = |e^{(r^a e^{\pm i\frac{\pi}{2}})}| = |e^{\pm i r^a}| = 1$ e $f(r) = e^{r^a}$, $r > 0$, é ilimitada.

(7.14) **Corolário:** *Se f é função analítica na faixa horizontal do plano complexo $\Omega = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, |y| < \frac{\pi}{2}\}$ e contínua em $\text{cl } \Omega$, e existem $M, \varepsilon > 0$ e $\rho \in]0, 1[$ tais que $|f(z)| \leq M e^{\varepsilon e^{\rho|z|}}$ para $z \in \Omega$ e $|f(x \pm i\frac{\pi}{2})| \leq M$ para $x \in \mathbb{R}$, então $|f| \leq M$ em Ω .*

Dem. Princípio de Phragmén-Lindelöf (7.11) com $\varphi(z) = e^{-e^{\rho|z|}}$. *Q.E.D.*

Com o Princípio de Phragmén-Lindelöf pode-se provar o Princípio de Incerteza de Hardy¹²⁷: as funções gaussianas são as únicas que tal como as suas Transformadas de Fourier decaem no infinito mais rapidamente do que funções gaussianas. De um modo geral Princípios de Incerteza referem-se a não ser possível ter uma função simultaneamente “localizada no espaço e na

¹²⁷ Foi formulado em 1933 por Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

frequência”, ou seja com a função e a sua Transformada de Fourier a decaírem no infinito rapidamente. Por exemplo (ver exercício 6.20), uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ que decai no infinito mais rapidamente do que uma exponencial (o que inclui funções 0 fora de um intervalo limitado) tem Transformada de Fourier \widehat{f} estendida ao plano complexo que é função inteira, e, como zeros de funções inteiras não identicamente nulas são isolados, \widehat{f} não pode ser nula em qualquer intervalo real, em particular as funções de variável real f e \widehat{f} não podem ambas anular-se fora de intervalos limitados. A Transformada de Fourier de uma função gaussiana $f(t) = Ke^{-t^2/2\sigma^2}$, com $K, \sigma > 0$, é

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = Ke^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t+i\sigma\omega)^2} dt = K\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2},$$

que é gaussiana: funções gaussianas estão igualmente “localizadas no tempo e na frequência”. O Princípio da Incerteza de Hardy estabelece que estas funções têm a máxima simultânea “localização no tempo e na frequência”.

(7.15) **Princípio de Incerteza de Hardy:** Se \widehat{f} é a Transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ e existem $C, a > 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{-at^2}$, $|\widehat{f}(\omega)| \leq Ce^{-\frac{1}{a}\omega^2}$, $t, \omega \in \mathbb{R}$, então $f(t) = Ke^{-at^2}$ para algum $K > 0$.

Dem. Com mudanças de variáveis $t' = \sqrt{at}$ e $\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{a}}$ e multiplicando f por $\frac{1}{C\sqrt{\pi}}$ pode-se supor, sem perda de generalidade, $a = 1$ e $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Devido ao decaimento supraexponencial no infinito de f , \widehat{f} pode ser estendida a \mathbb{C} e esta extensão é função inteira. Como para $x, y \in \mathbb{R}$ é

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(x+iy)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(x+iy)t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{yt} dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} e^{yt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2-2yt)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(\frac{y}{2})^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-\frac{y}{2})^2} dt = e^{(\frac{y}{2})^2}. \end{aligned}$$

Logo, a função inteira $F(z) = e^{(\frac{z}{2})^2} \widehat{f}(z)$ é tal que a restrição de $|F|$ aos eixos imaginário e real é majorada por 1 e

$$|F(x+iy)| \leq \left| e^{(\frac{x+iy}{2})^2} \right| e^{(\frac{y}{2})^2} = \left| e^{[(\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{2})^2 + i\frac{xy}{2}] } \right| e^{(\frac{y}{2})^2} = e^{(\frac{x}{2})^2}.$$

Do Princípio de Phragmén-Lindelöf (7.11) com $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x : x \leq 0\}$, $M = 1$ e $\varphi(x+iy) = e^{-(\frac{x}{2})^2}$, é $|F| \leq 1$ em \mathbb{C} . Logo, F é função inteira limitada e, do Teorema de Liouville, é constante, e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\widehat{f}(z) = ke^{-(\frac{z}{2})^2}$ para $z \in \mathbb{C}$, que é função gaussiana. Do que se viu antes do enunciado deste resultado, $f(t) = K'e^{-\frac{1}{2}t^2}$ para algum $K' \in \mathbb{R}$. Invertendo as mudanças de variáveis, $f(t) = Ke^{-at^2}$ para algum $K > 0$. Q.E.D.

7.7 Ordem e tipo de função inteira

A Ordem e o Tipo de funções inteiras foram introduzidas para tipificar crescimento exponencial destas funções em infinito¹²⁸.

¹²⁸A noção de Ordem de uma função inteira foi introduzida por H. Poincaré em 1883, mas esta definição deve-se a Émile Borel (1871-1956), em 1897.

Chama-se **Ordem** e **Tipo** de uma função inteira f a, resp.,

$$\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log r} \log \left(\log \left(\sup_{|z|=r} |f| \right) \right), \quad \sigma(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^{\rho(f)}} \log \left(\sup_{|z|=r} |f| \right).$$

(7.16) *A Ordem e o Tipo de funções inteiras f têm as propriedades:*

1. $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$, $\rho(f') = \rho(f)$, $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.
2. $\rho(f) \leq \alpha$ se e só se existem constantes $a \geq 0, \beta > 0$ tais que $|f(z)| \leq ae^{\beta|z|^\alpha}$ para $z \in \mathbb{C}$, e se $\rho(f) = \alpha$, então $\sigma(f) \leq \beta$ se e só se a desigualdade se verifica com $a > 0$.
3. Se $\rho(f) = 1$, $\sigma(f) < \beta$ e $|f(x)| \leq M$, $M > 0$ para $x \in \mathbb{R}$, então $|f(x+iy)| \leq Me^{\beta|y|}$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
4. Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $\rho(f) \leq \alpha$ se e só se $\{n^{\frac{1}{\alpha}} |c_n|^{\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.
5. Se $\rho(f) < 1$ ou ($\rho(f) = 1$ e $\sigma(f) = 0$) e f é limitada sobre uma recta em \mathbb{C} , f é constante.

Dem. Deixa-se como exercício (1 e 2 são imediatas das definições, 3 a 5 decorrem de 2). Q.E.D.

Em 1907 A. Denjoy conjecturou que o n° de valores assintóticos de uma função inteira f sobre curvas tendentes para ∞ é $\leq 2\rho(f)$, chamada **Conjectura de Denjoy**. Depois de 21 anos em aberto, L. Ahlfors provou-a em 1929. Em 1933 T. Carleman obteve a prova elementar que se segue.

(7.17) **Teorema de Denjoy-Carleman-Ahlfors:**

O n° de valores assintóticos de uma função inteira f ao longo de curvas que tendem para ∞ é menor ou igual ao dobro da Ordem de f .

Dem. Se f é uma função inteira com n valores assintóticos diferentes, existem n curvas $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ sem pontos comuns com ponto inicial na circunferência com raio 1 e centro 0 que tendem para ∞ em que a restrição de $|f|$ é limitada enquanto as restrições às regiões entre essas curvas são ilimitadas. Seja $F(z) = f(e^z)$. Sem perda de generalidade, $|F| < \alpha < 1$ sobre as curvas $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$, pois tal pode-se conseguir multiplicando F por uma constante pequena > 0 . $w = \log z$ transforma a região $\mathbb{C} \setminus (\text{cl } B_1(0) \cup \gamma_1^*)$ numa banda S de altura 2π no semiplano complexo direito. Designam-se as regiões delimitadas pelas imagens das curvas $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ em ordem cíclica por $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, $S_{j,x}$ a intersecção de Ω_j com cada recta vertical de \mathbb{C} com abcissa $x > 0$, $\ell_j(x)$ o supremo dos comprimentos dos segmentos desta intersecção, $\log p = \max\{\log p, 0\}$, $u(x, y) = \log |F(x+iy)|$, e $\varphi_j(x) = \int_{S_{j,x}} u^2(x, y) dy$. As 1ª e 2ª derivadas de φ_j são $\varphi_j'(x) = 2 \int_{S_{j,x}} u \frac{\partial u}{\partial x} dy$ e

$$\varphi_j''(x) = 2 \int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dy + 2 \int_{S_{j,x}} u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dy = 2 \int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dy - 2 \int_{S_{j,x}} u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy = 2 \int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dy + 2 \int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy,$$

em que a 2ª igualdade é porque u é harmónica e a 3ª resulta de integração por partes. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz Inequality para $\langle f, g \rangle = \int_{S_{j,x}} fg$

aplicada à fórmula para φ'_j dá

$$2 \int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dy \geq \frac{1}{2} \left(\frac{[\varphi'_j(x)]^2}{\varphi'_j(x)} \right).$$

Para minorar o termo $2 \int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$ na fórmula para $\varphi''_j(x)$ observa-se que se $V \in C^1\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}$ é limitada,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{V(\theta)}{\sin \theta} \right)' \right]^2 \sin^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \theta} [V'(\theta) \sin \theta - V(\theta) \cos \theta]^2 d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(V')^2 - V^2] + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [V^2(\theta)(\cot^2 \theta + 1) - 2V(\theta)V'(\theta) \cot \theta] d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(V')^2 - V^2] - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [V^2(\theta) \cot \theta]' d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(V')^2 - V^2]. \end{aligned}$$

Para $U \in C^1\left(]a, b[, \mathbb{R}\right)$ limitada e $V(t) = U\left(\frac{b-a}{\pi}t + \frac{a+b}{2}\right)$, é $V'(t) = U'\left(\frac{b-a}{\pi}t + \frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{\pi}$ e com a mudança de variáveis $s = \frac{b-a}{\pi}t + \frac{a+b}{2}$,

$$\int_a^b (U')^2(s) ds = \frac{\pi}{b-a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (V')^2(t) dt \geq \frac{\pi}{b-a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V^2(t) dt = \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b (U)^2(s) ds;$$

i.e. para $U \in C^1\left(]a, b[, \mathbb{R}\right)$ limitada, é $\int_a^b (U')^2 \geq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b U^2$, o que é uma das versões das **desigualdades de Wirtinger**¹²⁹, obtidas em 1904 by W. Wirtinger. Com esta desigualdade,

$$\int_{S_{j,x}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \geq \left(\frac{\pi}{\ell_j(x)} \right)^2 \int_{S_{j,x}} u^2(x, y) dy = \left(\frac{\pi}{\ell_j(x)} \right)^2 \varphi_j(x).$$

Os minorantes obtidos nos dois parágrafos precedentes dão

$$\varphi''_j(x) \geq \frac{1}{2} \frac{[\varphi'_j(x)]^2}{\varphi_j(x)} + 2 \left(\frac{\pi}{\ell_j(x)} \right)^2 \varphi_j(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

o que equivale a $(\sqrt{\varphi_j(x)})'' \geq \left(\frac{\pi}{\ell_j(x)}\right)^2 \sqrt{x}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Se Ω_j não é limitado à direita por uma recta vertical e existe uma recta vertical que intersecta o eixo real em x tal que $|F|$ é limitada à direita dessa recta, existe $x_0 > 0$ tal que $\varphi_j(x) > 0$ for $x > x_0$, e com $\varphi_j = e^{\psi_j}$, da desigualdade obtida no parágrafo precedente,

$$\left(\frac{2\pi}{\ell_j} \right)^2 \leq 2\psi''_j + (\psi'_j)^2 \leq \left(\frac{\psi''_j}{\psi'_j} \right)^2 + 2\psi''_j + (\psi'_j)^2 = \left(\frac{\psi''_j}{\psi'_j} + \psi'_j \right)^2.$$

Logo, $\frac{2\pi}{\ell_j} \leq \frac{\psi''_j}{\psi'_j} + \psi'_j$. Integrando duas vezes de x_0 a x ,

$$2\pi \int_{x_0}^x (x-s) \frac{1}{\ell_j(s)} ds \leq \int_{x_0}^x \psi_j + \psi_j + O(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

A soma destas desigualdades para $j = 1, \dots, n$ dá

$$2\pi \int_{x_0}^x (x-s) \sum_{j=1}^n \frac{1}{\ell_j(s)} ds \leq \int_{x_0}^x \sum_{j=1}^n \psi_j + \sum_{j=1}^n \psi_j + O(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

¹²⁹Wirtinger, Wilhelm (1865-1945).

De (7.16.1), para todo $\varepsilon > 0$ existe $b > 0$ tal que $\varphi_j(x) \leq bx^{2(\rho(f)+\varepsilon)}$ e, portanto, $\psi_j(x) \leq 2(\rho(f) + \varepsilon)x + O(1)$ quando $x \rightarrow +\infty$. Logo,

$$2\pi \int_{x_0}^x (x-s) \sum_{j=1}^n \frac{1}{\ell_j(s)} ds \leq n2(\rho(f) + \varepsilon)x^2 + O(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno canônico em \mathbb{R}^n , $n^2 \leq (\sum_{j=1}^n \frac{1}{\ell_j}) (\sum_{j=1}^n \ell_j)$, e como $\sum_{j=1}^n \ell_j \leq 2\pi$, da desigualdade assintótica precedente, $n^2 x^2 \leq n2(\rho(f) + \varepsilon)x^2 + O(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$, e, portanto, $n \leq 2[\rho(f) + \varepsilon]$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $n \leq 2\rho(f)$. *Q.E.D.*

Exercises

- 7.1 Prove: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, $K \subset \Omega$ é compacto e $f \in H(\Omega)$, existe um Ciclo Γ em $\Omega \setminus K$ tal que se verifica a Fórmula de Cauchy $f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$, para $z \in K$.
(Sugestão: Construa um Ciclo Γ em $\Omega \setminus K$ e aplique o Teorema de Cauchy Global).
- 7.2 Mostre que em qualquer região simplesmente conexa que não contém a origem podem ser definidas funções Holomorfas que são Ramos de:
a) $\log z$ b) z^a c) z^z
- 7.3 Mostre que em toda a região $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que os pontos ± 1 pertencem a uma mesma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ pode ser definida uma função Holomorfa que é um Ramo de $(1-z^2)^{1/2}$. Quais são os valores possíveis de $\int_{\gamma} \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} dz$, em que γ é um caminho fechado seccionalmente regular em Ω ?
- 7.4 Mostre que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ é analítica em $B_1(0)$, mas não tem prolongamento analítico a uma região que contenha propriamente este círculo.
- 7.5 Prove: Toda função $f \in H(\text{cl } B_r(a))$ tem um prolongamento analítico a um círculo aberto $B_R(a) \supset \text{cl } B_r(a)$.
- 7.6 Prove: Se $f \in H(B_r(a))$, $f(a) = b$, $f'(a) \neq 0$ e $|f-b| \leq M \in \mathbb{R}$ em $B_r(a)$, então $f(B_r(a)) \supset B_R(b)$ com $R = \frac{1}{6M} r^2 |f'(a)|^2$.
(Sugestão: Considere a série de Taylor de $f-b$ centrada em a , aplique a desigualdade triangular e estimativas de Cauchy para obter $|f(z)-b| \geq R$ para $|z-a| = \frac{3R}{2}$, tome $w \in B_R(b)$ e mostre que $f-w$ e $f-b$ têm o mesmo n° de zeros em $B_{\frac{3R}{2}}(a)$).
- 7.7 Dada uma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, define-se a função complexa $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$, chamada **Transformada de Laplace**¹³⁰ de f , considerando o integral de Lebesgue. Esta função fica definida num ponto $s = \alpha + i\omega$, com $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, se e só se a função fE_{α} , em que $E_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t}$, é integrável à Lebesgue em \mathbb{R}^+ , ou seja se e só se $f \in L_{\alpha}^1(\mathbb{R}^+) = \{f: fE_{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$. A função definida por $\mathcal{L}[f] = F$ chama-se **Transformação de Laplace**¹³¹. É imediato que $\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ e $\mathcal{L}[cf] = c\mathcal{L}[f]$

¹³⁰A Transformação de Laplace foi usada por L. Euler em 1737 para resolver uma equação diferencial e foi explorada por P.S. Laplace em 1812 em Probabilidade. Depois das contribuições de P.S. Laplace e de J. Liouville, Jozéph Petzval (1807-1891) desenvolveu-a bastante, mas só passou a ser generalizadamente utilizada depois de: (i) Oliver Heaviside (1850-1925) ter obtido entre 1880 e 1887 um cálculo operacional para resolver equações diferenciais ordinárias por equações algébricas obtidas por substituição da solução $y(t)$ por uma função complexa $Y(s)$ e as derivadas de ordem k de $y(t)$ por produtos de $Y(s)$ por s^k ; (ii) Thomas John Bromvich (1875-1929) ter obtido uma fórmula integral para inversão da Transformação de Laplace; (iii) Gustav Doetsch (1892-1977) ter contribuído em 1930-1937 para o desenvolvimento do método; (iv) Horatio Carslaw (1870-1954) e John Conrad Jaeger (1907-1979) terem prosseguido os trabalhos anteriores em 1938-40, culminando com a ampla disseminação do método no livro que publicaram em 1941 *Operational Methods in Applied Mathematics*. A adoção da Transformação de Laplace na rotina de formação e na prática em engenharia foi muito rápida: em 1947, menos de 10 anos após algumas propriedades básicas ainda serem objecto de investigação, era amplamente ensinada a estudantes de engenharia.

¹³¹A Transformação de Laplace \mathcal{L} relaciona-se com a de Fourier \mathcal{F} (ver exercício 6.20) por $\mathcal{L}[f] = (a+i\omega) = \mathcal{F}[\tilde{f}E_{\alpha}](\omega)$, com $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $f \in L_{\alpha}^1(\mathbb{R}^+)$, \tilde{f} a extensão de f a \mathbb{R} nula em $]-\infty, 0[$.

para $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$, $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. A Transformação de Laplace pode ser invertida em condições relativamente gerais. Em particular, pode-se provar: Se $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$, $F_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, em que

$$F_\alpha(\omega) = F(\alpha + i\omega), \quad \alpha, \omega \in \mathbb{R}, \quad F = \mathcal{L}[f], \quad g(t) = \frac{1}{i2\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_{\alpha - i\Omega}^{\alpha + i\Omega} F(s) e^{st} dt, \quad t > 0,$$

então g é contínua, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ e $f = g$ q.t.p. em \mathbb{R}^+ . Logo, a Transformação de Laplace é injetiva.

a) Prove: Se $f \in L^1_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+)$, com $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, e $F = \mathcal{L}[f]$, então $F \in H(\Pi_{\alpha_0}^+)$, em que $\Pi_{\alpha_0}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha_0\}$. (Sugestão: Use o Teorema de Morera).

b) Prove: Se $f \in L^1_{\alpha_0}(\mathbb{R}^+)$ com $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ e $t \mapsto f(t)e^{\alpha_0 t}$ é limitada em \mathbb{R}^+ , então $F = \mathcal{L}[f]$, que, de a), é Holomorfa em $\Pi_{\alpha_0}^+$, pode ser estendida por continuidade a α_0 . (Sugestão: Use o Teorema de Cauchy).

c) A **convolução** de funções $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R})$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$, é definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Prove: Se $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R})$, então $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$.

d) Prove: Se $f, f' \in L^1_\alpha(\mathbb{R})$, $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \in \mathbb{R}$, é $\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0+)$.

e) Considere a equação diferencial $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $t > 0$, com condições iniciais $y'(0) = y(0) = 0$ e $f(t) = e^{-2t}$. Mostre que a Transformada de Laplace da solução y é $Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$. Obtenha a solução do problema de valor inicial dado.

f) Considere a equação diferencial $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $t > 0$, com condições iniciais $y(0), y'(0)$ e $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}^+)$. Designe $T(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$. Mostre que $Y = \mathcal{L}[y]$ satisfaz $Y(s) = T(s)F(s) + T(s)[y'(0)s + 2y(0)]$, em que $F = \mathcal{L}[f]$, pelo que $T(s)$ caracteriza a equação diferencial, dando a Transformada de Laplace da solução por produtos com a Transformada de Laplace do termo independente e com um polinômio com coeficientes que dependem das condições iniciais.

7.8 a) Determine a Ordem da função inteira dada:

$$(i) \sin z \quad (ii) \cos z \quad (iii) \cos \sqrt{z} \quad (iv) e^{z^n} \quad (v) e^{e^z}.$$

7.9 Prove o **Teorema de Interpolação**¹³²: Se f é uma função inteira de Ordem $\rho < 1$, ou de Ordem $\rho = 1$ e Tipo $\sigma < \tau$ para algum $\tau > 0$,

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N f\left(\frac{n\pi}{\tau}\right) \frac{\sin \tau z}{\tau z - n\pi}.$$

(Sugestão: Para $N \in \mathbb{N}$ designe $F_N(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_N} \frac{w}{(w-z) \sin(\tau w)} dw$, em que γ_N é um caminho regular simples que descreve a circunferência $|z| = (N + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\tau}$ no sentido positivo, aplique o

¹³²Este resultado é conhecido por **Teorema de Amostragem** e é muitas vezes atribuído ao matemático Claude Shannon (1916-2001), embora fosse conhecido muito antes. C. Shannon (que em 1941-1952 trabalhou no *Mathematics of Communication Research Department* dos *Bell Labs*) introduziu-o na comunidade de telecomunicações dos países ocidentais em 1949 no livro *A Mathematical Theory of Communication* em que criou a Teoria de Informação, embora a frequência de amostragem, chamada **frequência de amostragem de Nyquist**, tivesse sido considerada em telecomunicações em 1928 por Harry Nyquist (1889-1976), que também trabalhou nos *Bell Labs* em 1934-54. Uns anos depois do trabalho de C. Shannon soube-se que Vladimir Kotelnikov (1908-2005) tinha obtido o resultado na Rússia em 1933, também a propósito de telecomunicações. Contudo, o resultado era conhecido de E. Borel desde 1897, no estudo de séries de interpolação, e de outros matemáticos, como Edmund Whittaker (1873-1956) em 1915 e John Whittaker (1905-1984) em 1935 que também consideraram este tipo de resultados antes de V. Kotelnikov e C. Shannon. O resultado estabelece que uma função de Ordem $\rho = 1$ e Tipo $\sigma < \tau$ pode ser exactamente interpolada a partir dos valores nos pontos $\frac{n\pi}{\tau}$ com $n \in \mathbb{Z}$. Uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ com Transformada de Fourier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ com suporte num intervalo compacto $[-\tau, \tau]$ é exactamente interpolada pela expressão dada, apenas a partir dos seus valores nos pontos $\frac{n\pi}{\tau}$. Portanto, uma frequência de amostragem $\geq \frac{\sigma}{2\tau}$ é suficiente para reconstituir exactamente um sinal com espectro de frequência limitado por $\frac{\sigma}{2\pi}$ (i.e. de **largura de banda** $\frac{\sigma}{2\pi}$), ou seja basta uma frequência de amostragem dupla da frequência máxima no espectro do sinal.

Teorema dos Resíduos e mostre que $|F_N(z)| \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow +\infty$, estimando $|f(z)|$ com base numa estimativa $|\sin z| \geq m e^{\mathcal{I}m z}$, para $z \in \gamma_N$, e aplicando o exercício precedente).

- 7.10 Prove: Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e \hat{f} tem suporte num intervalo compacto $[-\tau, \tau]$ (i.e. \hat{f} tem valor 0 em $\mathbb{R} \setminus [-\tau, \tau]$), em que f designa a Transformada de Fourier de f (ver exercício 6.20), a extensão complexa da fórmula de inversão da Transformada de Fourier, $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ ($g = f$ q.t.p. em \mathbb{R}) é uma função inteira de Ordem $\rho \leq 1$ e, quando $\rho \leq 1$, é de Tipo $\sigma \leq \tau$ (compare com exercício 6.20).
(Sugestão: Aplique o Teorema de Morera e majore o integral).

- 7.11 Prove o **Teorema dos Três Círculos de Hadamard**: Se f é Holomorfa na coroa circular aberta C_{r_1, r_2} limitada pelas circunferências com centro na origem e raios $r_2 > r_1 > 0$, $S(r) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(r e^{i\theta})|$ e $r_1 < a < r < b < r_2$,

$$\log S(r) \leq \frac{\log S(b/r)}{\log b/a} \log S(a) + \frac{\log S(r/a)}{\log b/a} \log S(b).$$

Exercícios com aplicações a análise e controlo de sistemas lineares

- 7.12 Considere o problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária linear escalar de ordem $n \in \mathbb{N}$ com coeficientes complexos constantes, termo independente que é combinação linear do valor e das derivadas de uma função r e condições iniciais nulas

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b_{n-1}r^{(n-1)}(t) + \dots + b_1r'(t) + b_0r(t),$$

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0.$$

Mostre que, com $Y = \mathcal{L}[y]$, $R = \mathcal{L}[r]$ e $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ se obtém

$$T(s) = \frac{b_{n-1}s^{(n-1)} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{(n-1)} + \dots + a_1s + a_0}.$$

A função T caracteriza o **sistema linear** definido pela equação diferencial e é conhecida por **função de transferência** do sistema. É usual considerar $r(t)$ como sinal de **entrada** e $y(t)$ como sinal de **saída** ou **resposta** do sistema, e representar o sistema por um diagrama de blocos como na Figura 7.9.

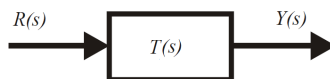


Figura 7.9: Diagrama de blocos para sistema linear com função de transferência T

- a) Mostre que, com condições iniciais diferentes de zero, a resposta do sistema a uma entrada é a soma da resposta com condições iniciais nulas à entrada considerada adicionada à resposta com as condições iniciais consideradas e entrada nula. Chama-se a estas componentes aditivas da resposta, resp., **resposta forçada** e **resposta natural** ou **resposta livre** do sistema.

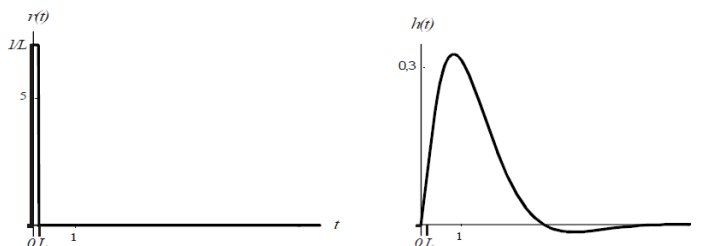


Figura 7.10: Resposta impulsiva de sistema linear com função de transferência $T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$

- b) Mostre que para um sistema linear com função de transferência T , se h é tal que $T = \mathcal{L}[h]$, a resposta forçada y obtém-se da entrada r e da função h pela convolução $y = h * r$. Mostre que a resposta forçada y_L correspondente a um impulso positivo com largura $L > 0$ e integral 1 na entrada, $r_L(t) = \frac{1}{L}$ se $0 \leq t < L$, e $r_L(t) = 0$ se $t \geq L$, satisfaz $\lim_{L \rightarrow +\infty} y_L(t) = h(t)$, para $t > 0$. Por esta razão, chama-se a

h resposta impulsiva do sistema. Calcule a resposta impulsiva do sistema da questão precedente (Figura 7.10).

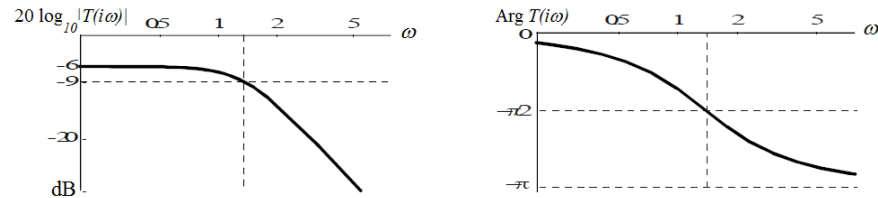


Figura 7.11: Diagrama de Bode para função de transferência $T(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$

c) Analogamente à representação gráfica de Transformadas de Fourier em análise e processamento de sinais (ver exercício 6.21), representa-se graficamente a função de transferência T de um sistema linear “em função da frequência” ω por gráficos do módulo e de um argumento de $T(i\omega)$ em função de ω (ou, na linguagem de análise de sistemas, **amplitude** (ou **ganho**) e **fase** da função de transferência). A este tipo de representação gráfica chama-se **diagrama de Bode**¹³³ do sistema; tal como para sinais (exercício 6.21), é usual adoptar escalas logarítmicas para a amplitude e para a frequência angular em decibéis (dB) e uma escala linear para a fase. Mostre que o diagrama de Bode do sistema linear das duas últimas alíneas do exercício precedente é o indicado na Figura 7.11.



Figura 7.12: Diagrama de blocos da ligação em série de dois sistemas

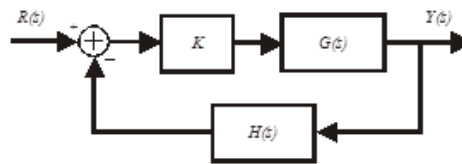


Figura 7.13: Diagrama de blocos de sistema com retroacção

- 7.13 a) Mostre que a **ligação em série** de sistemas lineares (ver os dois exercícios precedentes) com funções de transferência T_1 e T_2 (*i.e.* a saída do 1º é a entrada do 2º) é um sistema linear com função de transferência $T = T_2 T_1$ (Figura 7.12).
- b) Mostre que a função de transferência do **sistema linear de controlo com retroacção**¹³⁴ na Figura 7.13, em que G e H são funções de transferência de

¹³³Hendrik Wade Bode (1905-1982) iniciou a utilização dos gráficos da amplitude (em dB) e da fase de funções de transferência na análise e projecto de amplificadores com retroacção em 1940. H.W. Bode foi para os *Bell Telephone Laboratories* em 1926, logo depois de obter o Mestrado, e em 1929 entrou para o influente *Mathematical Research Group* dos *Bell Labs*, que dirigiu no período 1944-1955, e depois foi Director de Investigação em Ciências Físicas até 1958 e seguidamente um dos dois Vice-Presidentes dos *Bell Labs* para *Military Development and Systems Engineering* até 1967 quando se aposentou. Pouco depois de se aposentar dos *Bell Labs* foi eleito para *Gordon McKay Professor of Systems Engineering* na *Harvard University*, funções que exerceu até 1974.

¹³⁴Em inglês diz-se *feedback*. O uso de retroacção no projecto de sistemas remonta à Antiguidade grega, para aumento da precisão de medição do tempo por relógios de água e para regulação do nível de contentores de líquidos. Durante a Revolução Industrial no final do séc. XVIII e ao longo do séc. XIX foram desenvolvidos sistemas industriais com retroacção para máquinas a vapor, moinhos, teares mecânicos, fornos de combustão, com a introdução de reguladores de temperatura, pressão, velocidade. Um outro avanço importante foi a introdução de giroscópios em 1910 e de sistemas de controlo com retroacção para manutenção de rumo em navios e de pilotos automáticos em 1922 (ver exercício 8.32). Contudo, o maior impulso tecnológico para o desenvolvimento das técnicas de projecto de sistemas com retroacção foi a propósito de amplificadores electrónicos de ganho muito elevado na indústria de comunicações, em particular com a introdução de retroacção

sistemas lineares (ver os dois últimos exercícios anteriores) e $K > 0$, é $T = \frac{KG}{1+KHG}$.

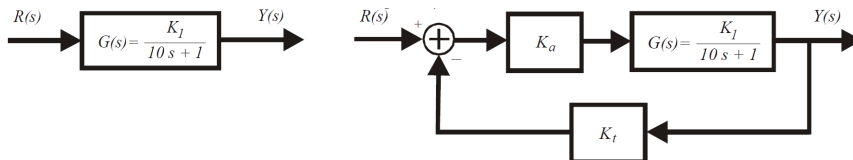


Figura 7.14: Diagrama de blocos de sistema em malha aberta e com retroação

c) Considere o sistema linear com função de transferência $G(s) = \frac{K_1}{10s+1}$ e o sistema linear com retroação da Figura 7.14. Determine a resposta ao **escalão unitário** ($u(t) = 0$ para $t < 0$, $u(t) = 1$ para $t \geq 0$) do **sistema em malha aberta** com função de transferência¹³⁵ G e do sistema com retroação considerado, para $K_1 = K_t = 1$ e $K_a = 100$ (Figura 7.15).

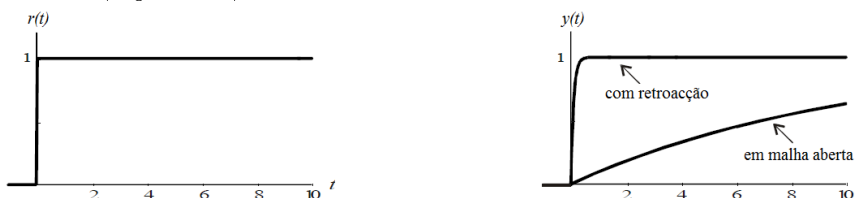


Figura 7.15: Respostas dos sistemas com retroação e em malha aberta da figura precedente (à direita) ao escalão unitário (à esquerda)

d) Chama-se **erro** de um sistema linear de controlo com retroação como na Figura 7.13 à diferença entre a saída e a entrada $e = y - r$. Mostre que a Transformada de Laplace do erro é $E = \frac{1+KHG-KG}{1+KHG}$.

e) Chama-se **erro estacionário**¹³⁶ **de posição** e_{ss} de um sistema de controlo com retroação ao limite quando $t \rightarrow +\infty$ do erro no instante t quando a entrada é o escalão unitário. Mostre que o erro de posição do sistema da Figura 7.13 é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + K H(s) G(s) - K G(s)}{1 + K H(s) G(s)}$$

Se $H = 1$ (**sistema com retroação identidade**) é $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + KG(s)}$ e se $H = 0$ (**sistema em malha aberta**) é $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [1 - KG(s)]$.

(Observação: Em c) para malha aberta é $e_{ss} = 0$ e para retroação identidade $e_{ss} = \frac{1}{101}$, e uma variação de 10% no ganho K_1 do sistema causa uma variação de 10% no erro de posição em malha aberta e de 0,1% com retroação identidade. Portanto, embora seja teoricamente possível um erro de posição nulo em malha aberta, a sensibilidade a variações do parâmetro do sistema (inevitáveis na prática) é total para o sistema em malha aberta e muito menor para o sistema com retroação, apesar de ter de haver erro de posição).

negativa no projecto de amplificadores por Harold Black (1898-1983) em 1927. O papel do *Mathematical Research Group* dos *Bell Labs* foi determinante para este desenvolvimento em 1927-1940, com a introdução de métodos baseados em Análise Complexa como: critério de estabilidade de Nyquist em 1932 (exercício 8.33) e diagrama de Bode em 1940 (exercício 7.12).

¹³⁵Esta função de transferência pode ser de um motor de corrente contínua em que a saída $y(t)$ é a velocidade. O sistema com retroação indicado corresponde a realimentar a velocidade observada por um tacómetro com ganho K subtraindo-a à entrada $r(t)$, que é a velocidade pretendida.

¹³⁶Em inglês diz-se *steady state error*.

Capítulo 8

Singularidades, funções meromorfas e teorema dos resíduos

8.1 Introdução

Nos capítulos anteriores encontraram-se diversas manifestações de propriedades restritivas de funções Holomorfas, incluindo: equações de Cauchy-Riemann, Teorema de Liouville, Teorema de Unicidade, Propriedade de Valor Médio, Princípio de Módulo Máximo, Teorema de Cauchy. Uma outra manifestação deste tipo é que uma função Holomorfa num conjunto aberto limitado com fronteira suficientemente regular é determinada pelos valores na fronteira (o que fica mais claro no capítulo seguinte). Neste contexto assumem particular interesse os pontos isolados da fronteira do conjunto em que a função é Holomorfa nos quais a função tem singularidades. Há três tipos de singularidades isoladas: removíveis (a função é prolongável ao ponto de modo a também ser aí Holomorfa), Pólos (a função tende para infinito como potências inteiras negativas das diferenças ao ponto de singularidade) e Essenciais (os valores da função numa vizinhança da singularidade são densos em \mathbb{C} ; do Grande Teorema de Picard no capítulo 11, todos valores complexos excepto possivelmente 1 são assumidos infinitas vezes.). Em 1868, independentemente, Y. Sohotsky (na tese de doutoramento) e F. Casorati, estabeleceram que estas eram as únicas possibilidades de singularidades isoladas e oito anos depois K. Weierstrass deu outra prova deste resultado. Como o trabalho de Y. Sohotsky demorou algum tempo a ser conhecido na Europa ocidental, o resultado ficou com o nome de Teorema de Casorati-Weierstrass. O nome Pólo foi introduzido em 1857 por C. Briot e J. Bouquet¹³⁷.

Se a singularidade isolada é Essencial ou um Pólo, a função não é extensível na vizinhança da singularidade a uma função Holomorfa, e não tem aí representação em série de potências centrada na singularidade com expoentes não negativos. Contudo, a função pode ser representada na vizinhança

¹³⁷ Sohotsky, Yulian (1842-1927). Casorati, Felice (1835-1890).

destas singularidades por série de potências centrada na singularidade mas com alguns expoentes negativos (um n° finito de tais termos se é um Pólo ou infinito se é uma singularidade Essencial), chamada série de Laurent¹³⁸, por ter sido estabelecida por P.F. Laurent em 1843, embora já tivesse aparecido nas notas de K. Weierstrass de 1841, só publicadas em 1894.

O nome Resíduo foi introduzido em 1826 por A.-L. Cauchy para a diferença dos integrais de uma função sobre dois caminhos com o mesmo par ordenado de pontos inicial e final delimitando uma região onde a única singularidade é um Pólo, que já tinha identificado num trabalho de 1814. O nome traduz literalmente uma quantidade residual que, nas condições indicadas, falta a um dos integrais para dar o outro. Os integrais em caminhos fechados de funções Holomorfas num conjunto excepto num conjunto de pontos isolados em que têm Pólos, chamadas funções Meromorfas¹³⁹ podem ser calculados por simples soma de Resíduos ou de seus simétricos. Esta possibilidade foi estabelecida por A.-L. Cauchy em 1826, no Teorema dos Resíduos, com a hipótese das funções serem C^1 , mas como se viu, com o trabalho de E. Goursat em 1900 esta hipótese pode ser omitida. O teorema tem muitas aplicações, porque quando pode ser aplicado reduz o cálculo de certos integrais sobre caminhos fechados ou de integrais impróprios de funções reais a simples somas e diferenças de Resíduos.

Uma outra consequência do Teorema dos Resíduos é o Princípio de Argumento, que estabelece que a variação do argumento dos pontos da imagem de uma função Meromorfa f ao longo de um caminho fechado é proporcional ao integral $\frac{f'}{f}$ sobre o caminho considerado. Isto permite obter a diferença entre os n° s de zeros e Pólos, contando multiplicidades, na região em torno da qual o caminho dá uma volta. Este resultado, publicado por A.-L. Cauchy em 1855, generaliza para funções Meromorfas a fórmula no capítulo 6 de contagem de zeros de funções Holomorfas obtida.

O capítulo termina com uma aplicação do Princípio de Argumento que dá igualdade das diferenças dos n° s de zeros e Pólos de duas funções Meromorfas f e g numa região em torno da qual um caminho fechado γ dá uma volta, se $|f - g| < |f| + |g|$ (*i.e.* em cada ponto da curva γ^* representada pelo caminho (*i.e.* em γ^* nunca se verifica igualdade na Desigualdade TRIangular para f e g , ou seja os valores das duas funções não se anulam simultaneamente em pontos de γ^* e quando nenhum se anula têm argumentos diferentes). Este resultado é uma pequena extensão do Teorema de Rouché, provado por E. Rouché em 1862, que tem a mesma tese mas a hipótese um pouco mais forte $|f - g| < |g|$ em γ^* ; esta extensão foi provada por T. Estermann em 1962 e I. Glicksberg¹⁴⁰ em 1976. Também se mostra que este teorema pode ser aplicado para obter uma prova curta do Teorema Fundamental da Álgebra, diferente das 4 variantes dadas no capítulo 6.

¹³⁸Laurent, Pierre Alfonse (1813-1854).

¹³⁹Este nome foi dado por C. Briot e J. Bouquet em 1857.

¹⁴⁰Glicksberg, Irvin.

8.2 Singularidades e séries de Laurent

Se existe vizinhança $\Omega \subset \mathbb{C}$ de $a \in \mathbb{C}$ e f é Holomorfa em $\Omega \setminus \{a\}$ mas não está definida ou não é diferenciável em a , diz-se que f tem **singularidade isolada** em a . Se f pode ser definida (ou redefinida) em a de modo à nova função ser Holomorfa em a , diz-se que **a singularidade em a é removível**.

(8.1) *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, $a \in \Omega$ e $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ tem singularidade em a , esta é singularidade removível se e só se f é limitada numa vizinhança de a .*

Dem. Se a singularidade é removível, f pode ser definida em a de modo a ser Holomorfa em Ω . Logo, a função resultante f é contínua em $\text{cl } B_r(a) \subset \Omega$ com $r > 0$, e, do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, f é limitada em $B_r(a)$.

Se f é limitada em $B_r(a) \setminus \{a\}$ para algum $r > 0$, a derivada em a de

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & , \text{ se } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ 0 & , \text{ se } z = a \end{cases} .$$

é $h'(a) = 0$ e $h \in H(\Omega)$. Logo, $h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n$, para $z \in B_r(a)$. Com $f(a) = c_2$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n$, $z \in B_r(a)$, é $f \in H(B_r(a))$. *Q.E.D.*

O resultado seguinte caracteriza singularidades isoladas.

(8.2) *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, $a \in \Omega$ e f é diferenciável em $\Omega \setminus \{a\}$ mas não em a , em alternativa:*

1. f tem uma singularidade removível em a ;
2. existem $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, com $c_m \neq 0$, tais que $f(z) - \sum_{k=1}^m c_{-k} (z-a)^{-k}$ tem uma singularidade removível em a e existe $r > 0$ tal que

$$(8.3) \quad f(z) = \sum_{k=1}^m c_{-k} (z-a)^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in B_r(a) \setminus \{a\};$$

3. $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ é denso em \mathbb{C} , para todo $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \Omega$.

Dem. Se não se verifica 3, existem $r, \delta > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tais que $|f(z) - w| > \delta$ para $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ satisfaz $g \in H(B_r(a) \setminus \{a\})$ e $|g| < \frac{1}{\delta}$ em $B_r(a) \setminus \{a\}$, pelo que, do resultado precedente, g é extensível a uma função Holomorfa em $B_r(a)$, que se continua a designar g .

Se $g(a) \neq 0$, $f = w + \frac{1}{g}$ define uma extensão de f em $B_\rho(a)$ para algum $\rho > 0$. Logo, f tem singularidade removível em a e verifica-se 1.

Se $g(a) = 0$ e $m \in \mathbb{N}$ é a ordem deste zero de g , é $g(z) = (z-a)^m g_1(z)$ para $z \in B_r(a)$, em que $g_1 \in H(B_r(a))$ e $g_1(a) \neq 0$. Com $h = \frac{1}{g_1}$ em $B_r(a)$ e $\rho > 0$ tal que g_1 não se anula em $B_\rho(a)$, é $h \in H(B_\rho(a))$ e $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, para $z \in B_\rho(a)$, com $b_0 \neq 0$ pois h não tem zeros, e, para $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$, é

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m} = \sum_{k=1}^m c_{-k} (z-a)^{-k} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j,$$

em que $c_{-k} = b_{m-k}$, $c_0 = w + b_m$, $c_j = b_{m+j}$, pelo que se verifica 2. *Q.E.D.*

Na alternativa 2 diz-se que f tem um **Pólo de ordem m em a** , chama-se **Parte Principal** ou **Parte Singular de f em a** à função racional definida por $Q(z) = \sum_{k=1}^m c_{-k}(z-a)^{-k}$ e diz-se que (8.3) é a **série de Laurent de f centrada em a** . Na alternativa 3 diz-se que f tem uma **singularidade Essencial em a** ; todo número complexo w pode ser aproximado pelos valores de f em pontos de uma sucessão $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \rightarrow a$; do resultado que se segue, f tem em $B_r(a) \setminus \{a\}$, para algum $r > 0$, um desenvolvimento em **série de Laurent centrada em a** ,

$$(8.4) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k} + \sum_{n=0}^m c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

Uma série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$ diz-se (resp., **absolutamente** ou **uniformemente**) **convergente** se as séries que correspondem aos termos de potências não negativas e de potências negativas, separadamente, são (resp., absolutamente ou uniformemente) convergentes. A estas séries chama-se, resp., **Parte Regular** de f em a , e **Parte Principal** (ou **Parte Singular**) de f em a . Por exemplo, a função $e^{\frac{1}{z}}$ tem singularidade Essencial em 0.

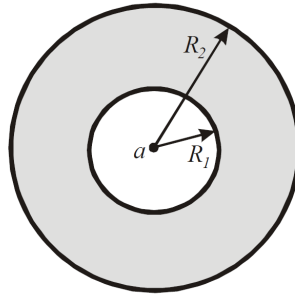


Figura 8.1: Coroa de convergência de série de Laurent

Os resultados gerais de convergência de séries de potências implicam que a Parte Regular de uma série de Laurent é absolutamente convergente no interior de um círculo de convergência com raio (de convergência) $R_2 = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n}$ e a Parte Principal é absolutamente convergente no exterior de um círculo com raio $R_2 = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{c_{-n}}$. Portanto, uma série de Laurent é absolutamente convergente no interior de uma coroa circular limitada por circunferências de raios $0 \leq R_1 \leq +\infty$ e $0 \leq R_2 \leq +\infty$, chamada **Coroa de Convergência** da série de Laurent (Figura 8.1); pode ser $R_1 \geq R_2$, *i.e.* a série de Laurent diverge em todos pontos. Se o conjunto de convergência não é vazio, a série de Laurent é absolutamente convergente no interior da Coroa de Convergência e na fronteira há pontos em que diverge e pode haver pontos em que converge mas não absolutamente. A convergência é uniforme em todo subconjunto compacto da Coroa de Convergência. Do Teorema de Weierstrass de séries uniformemente convergentes, a soma de uma série de Laurent é analítica na Coroa de Convergência. Mais geralmente, tem-se o resultado seguinte publicado por P.A. Laurent em 1843, mas que aparece nas notas de K. Weierstrass de 1841, só publicadas em 1894.

(8.5) Se $f \in H(B_{R_2}(a) \setminus \text{cl } B_{R_1}(a))$, com $a \in \mathbb{C}$ e $R_2 > R_1 \geq 0$, para $z \in B_{R_2}(a) \setminus \text{cl } B_{R_1}(a)$ f tem desenvolvimento em série de Laurent único

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{com } c_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z},$$

em que $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ e $R_1 < r < R_2$.

Dem. Prova-se que $f = f_1 + f_2$, em que $f_1 \in H(B_{R_2}(a))$ e $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_{R_1}(a))$ com $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f_2(z) = 0$. Para tal define-se

$$f_1(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in B_r(a), \quad f_2(z) = -\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in \mathbb{C} \setminus B_r(a).$$

De (5.8), $f_1 \in H(B_r(a))$ e $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_r(a))$. Do Teorema de Cauchy Global (7.3), os valores dos integrais nas definições de f_1 e f_2 são os mesmos para $r \in]R_1, R_2[$, com $r \neq |z-a|$, pelo que as fórmulas definem funções $f_1 \in H(B_{R_2}(a))$ e $f_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_{R_1}(a))$. Para $z \in B_{R_2}(a)$ é $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, em que $a_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$. Com $g(s) = f_2(a + \frac{1}{s})$, como $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f_2(z) = 0$, é $\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = 0$ e g é limitada em $B_{1/R_1}(0) \setminus \{0\}$. De (8.1), a singularidade de g na origem é removível com $g(0) = 0$ e, com esta extensão, $g \in H(B_{1/R_1}(0))$, pelo que $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n$, em que

$$b_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{\lambda} \frac{g(s)}{s^{n+1}} ds = -\frac{1}{i2\pi} \int_{\lambda} \frac{f_2(a+1/s)}{s^{n+1}} ds = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_2(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw,$$

com $\lambda: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\lambda(\theta) = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$. Logo, $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \text{cl } B_{R_1}(a)$. Como $g \in H(B_{1/R_1}(0))$ e $f_1 \in H(B_{R_2}(a))$, do Teorema de Cauchy Global (7.3), para $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\gamma} \frac{f_2(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = -\int_{\lambda} \frac{g(s)}{s^{-n+1}} ds = -\int_{\lambda} g(s) s^{n-1} ds = 0,$$

$$\int_{\gamma} \frac{f_1(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw = \int_{\gamma} f_1(w) (w-a)^{n-1} dw = 0.$$

Portanto, $c_0 = a_0$, $c_n = a_n$, $c_{-n} = b_n$, para $n \in \mathbb{N}$, pelo que o desenvolvimento em série de Laurent de f é

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Resta provar unicidade. Se γ^* é um subconjunto compacto da Coroa de Convergência da série de Laurent, esta converge uniformemente em γ^* . Logo, uma série obtida multiplicando todos os termos por uma potência fixa de $(z-a)$ também converge uniformemente em γ^* , e, portanto, pode ser integrada termo a termo em γ . De (4.4), $\int_{\gamma} (w-a)^j = 0$ para $j \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, e, de (4.10), é $\int_{\gamma} (w-a)^{-1} = i2\pi$. Portanto,

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\gamma} (z-a)^{k-n-1} = i2\pi c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esta fórmula determina os coeficientes da série de Laurent.

Q.E.D.

(8.6) **Exemplo:** $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ é Holomorfa em cada uma das coroas circulares $B_1(0) \setminus \{0\}$, $B_2(0) \setminus \text{cl } B_1(0)$, $\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_2(0)$. Para obter séries de Laurent de f nestas coroas circulares, observa-se que $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ e

$$\frac{1}{z-r} = -\frac{1}{r} \frac{1}{1-z/r} = -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n, \quad z \in B_r(0),$$

$$\frac{1}{z-r} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-r/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{cl } B_r(0),$$

Logo, obtêm-se as séries de Laurent

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad z \in B_1(0),$$

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad z \in B_2(0) \setminus \text{cl } B_1(0),$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{-n+1}}\right) z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{cl } B_2(0),$$

Portanto, f não tem Parte Singular em $B_1(0) \setminus \{0\}$ (i.e. é Holomorfa em $B_1(0)$) e não tem Parte Regular em $\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_2(0)$, enquanto em $B_2(0) \setminus \text{cl } B_1(0)$ tem tanto Parte Singular como Parte Regular diferentes de zero.

As séries de Fourier de funções periódicas Holomorfas numa faixa do plano complexo entre rectas paralelas na direcção do período obtêm-se directamente das séries de Laurent por uma simples mudança de variáveis, mostrando que séries de Fourier de funções periódicas são apenas uma visão alternativa das suas séries de Laurent, e revelando no quadro complexo uma ligação directa entre séries de Fourier e séries de potências inatingível no quadro real.

(8.7) **Série de Fourier:** Se $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A < B \leq +\infty$, $S_{A,B}$ é a faixa entre rectas paralelas (ou o semiplano) $S_{A,B} = \{z \in \mathbb{C} : A < 2\pi \text{Im} \frac{z}{\tau} < B\}$ e $F \in H(S_{A,B})$ é periódica com período τ , para $z \in S_{A,B}$ é

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n z / \tau}, \quad \text{com } c_n = \frac{1}{\tau} \int_{\gamma_{z_0, \tau}} F(z) e^{-i2\pi n z / \tau} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

em que $\gamma_{z_0, \tau}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é qualquer caminho seccionalmente regular em $S_{a,b}$ de um ponto z_0 ao ponto $z_0 + \tau$.

Em particular, se adicionalmente $\tau \in \mathbb{R}$, $c_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F(t) e^{-i2\pi n t / \tau} dt$.

Dem. É aplicação directa de (8.5) com $a = 0$, $R_1 = e^{-B}$, $R_2 = e^{-A}$ e $F(z) = f(e^{i2\pi z / \tau})$, pois F é periódica com período τ se e só se existe $f \in H(B_{R_2}(0) \setminus \text{cl } B_{R_1}(0))$ tal que se verifica a igualdade precedente, e a mudança de variáveis $w = e^{i2\pi z / \tau}$ na fórmula para c_n em (8.5) dá a fórmula no enunciado. Q.E.D.

8.3 Funções meromorfas e teorema dos resíduos

Diz-se que uma função complexa f é **Meromorfa** num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se existe um conjunto $A \subset \Omega$ tal que: (1) $f \in H(\Omega \setminus A)$, (2) f tem um Pólo em cada ponto de A , e (3) A não tem pontos limite em Ω . Designa-se o conjunto das funções Meromorfas em Ω por $M(\Omega)$.

É imediato da definição que se Ω é um subconjunto aberto não vazio de \mathbb{C} , $M(\Omega)$ é espaço linear complexo com as operações usuais.

As funções Meromorfas são as funções sem singularidades ($A = \emptyset$) ou com singularidades que são Pólos isolados. A condição (3) implica que nenhum conjunto compacto tem infinitos pontos de A , pelo que o conjunto de Pólos de uma função Meromorfa é numerável.

De (8.2), uma função Meromorfa tem numa vizinhança de cada ponto a do seu domínio desenvolvimento em série de Laurent $f(z) = \sum_{k=o_a}^{\infty} c_k(z-a)^k$, com $o_a \in \mathbb{Z}$, em que f tem um Pólo de ordem $-o_a$ ou um zero de ordem o_a em a se, resp., $o_a < 0$ ou $o_a > 0$, pelo que se chama a o_a a **ordem da função Meromorfa** f em a .

Se f é uma função Meromorfa num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $a \in \Omega$ é um Pólo de f , chama-se **Resíduo de f em a**

$$(8.8) \quad \text{Res}(f; a) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

em que $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que $\gamma(\theta) = a + r e^{i\theta}$ e $r > 0$ é tal que no interior do círculo limitado pela circunferência γ^* a função f não tem singularidades além do Pólo em a (Figura 8.2). Do Teorema de Cauchy, os integrais calculados em diferentes circunferências γ^* nas condições anteriores são iguais.

Nas condições indicadas, de (8.2), f tem representação em série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ em $B_R(a) \setminus \{a\}$, em que $R > 0$ ou $R = +\infty$ é a distância de a à mais próxima das outras singularidades de f e

$$(8.9) \quad \text{Res}(f; a) = c_{-1}.$$

Se o Pólo de f em a é simples (*i.e.* de ordem 1), a série de Laurent de f centrada em a é $\sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ e $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$, pelo que

$$(8.10) \quad \text{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z), \quad \text{se o Pólo em } a \text{ é simples.}$$

Se o Pólo de f em a é de ordem $m \in \mathbb{N}$, a série de Laurent de f centrada em a é $\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n$ e $c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$, pelo que

$$(8.11) \quad \text{Res}(f; a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)], \quad \text{se o Pólo em } a \text{ é de ordem } m.$$

Nas condições indicadas, se Γ é um ciclo em Ω , $a \in A \setminus \Gamma^*$ e P designa a Parte Principal de f em a ,

$$(8.12) \quad \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} P(z) dz = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^m c_{-k}(z-a)^{-k+1} \frac{1}{z-a} dz = c_{-1} \text{Ind}_{\Gamma}(a) = \text{Res}(P; a) \text{Ind}_{\Gamma}(a).$$

Esta fórmula é um caso particular do Teorema dos Resíduos que se segue. Este teorema foi estabelecido no caso de funções C^1 por A.-L. Cauchy num trabalho publicado em 1826, seguido de vários artigos com aplicações. Permite calcular integrais de funções Meromorfas em caminhos fechados por somas finitas de quantidades locais dadas pelos Resíduos da função num n^o finito de Pólos e tem amplas aplicações.

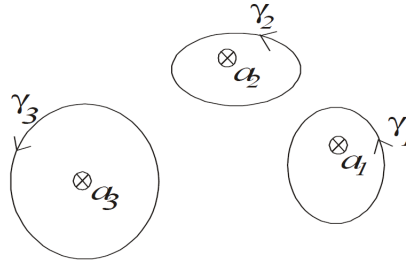


Figura 8.2: Pólos a_k e Resíduos $\text{Res}(f; a_k) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_k} f(z) dz$ de $f \in M(\Omega)$

(8.13) **Teorema dos Resíduos:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, Γ é um ciclo em Ω homólogo a zero em Ω , $f \in M(\Omega)$ e A é o conjunto dos Pólos de f em Ω ,*

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a) \text{Ind}_{\Gamma}(a).$$

em que a soma tem um n^o finito de termos.

Dem. Seja $B = \{a \in A : \text{Ind}_{\Gamma}(a) \neq 0\}$. A função Ind_{Γ} definida em $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ é zero na componente conexa ilimitada V de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Como A não tem pontos limite em Ω e $\mathbb{C} \setminus V$ é compacto, B é um conjunto finito, e a soma no enunciado tem um n^o finito de termos. Se a_1, \dots, a_m são os elementos distintos de B , as partes principais de f nestes pontos são, resp., P_1, \dots, P_m e $g = f - (P_1 + \dots + P_m)$ (se $B = \emptyset$, é $g = f$), como g tem singularidades removíveis nos pontos a_1, \dots, a_m , do Teorema de Cauchy Global (7.3) aplicado a g no conjunto aberto $\Omega_0 = \Omega \setminus (A \setminus B)$, $\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$, e, com (8.12),

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} P_k(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Res}(P_k; a_k) \text{Ind}_{\Gamma}(a_k).$$

A prova termina verificando que f e P_k têm o mesmo Resíduo em a_k . *Q.E.D.*

(8.14) **Exemplos:**

1. Para calcular o integral de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, considerada no Exemplo (8.6), em caminhos $\gamma_{a,r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\gamma_{a,r}(\theta) = a + r e^{i\theta}$, com $a \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$, $r \in \mathbb{R}^+ \{|a-1|, |a-2|\}$, nota-se que, de (8.10), $\text{Res}(f; 1) = -1$ e $\text{Res}(f; 2) = 1$, pelo que o Teorema dos Resíduos dá (Figura 8.3)

$$\int_{\gamma_{a,r}} f(z) dz = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 < r < \min\{|a-1|, |a-2|\} \\ \text{Res}(f; 1) = -1 & , \text{ se } |a-1| < r < |a-2| \\ \text{Res}(f; 2) = 1 & , \text{ se } |a-2| < r < |a-1| \\ \text{Res}(f; 1) + \text{Res}(f; 2) = 0 & , \text{ se } r > \max\{|a-1|, |a-2|\}. \end{cases}$$

O integral de f no caminho $\lambda: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\lambda(\varphi) = \frac{3}{2} + 3 \cos(\varphi) e^{-i\frac{\pi}{4} \sin \varphi}$ é

$$\int_{\lambda} f(z) dz = \text{Res}(f; 1) - \text{Res}(f; 2) = -1 - 1 = -2.$$

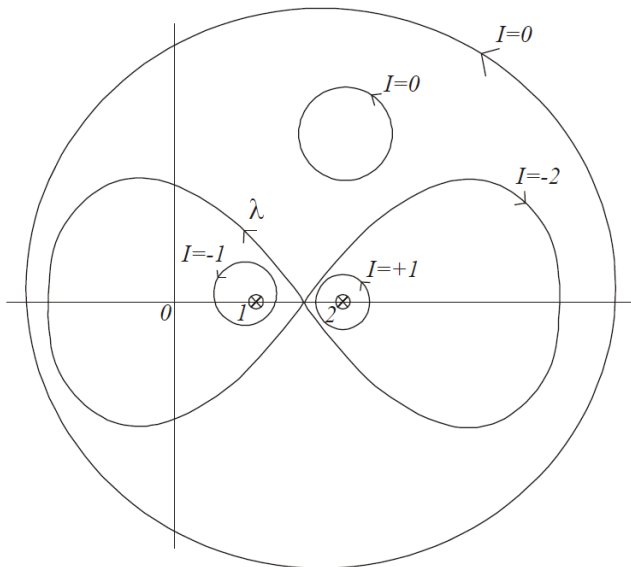


Figura 8.3: Valores I dos integrais de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ em circunferências em $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ no caminho λ indicado

2. Integrais de funções racionais de senos e cosenos $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, em que R é uma função racional de duas variáveis, podem ser facilmente calculados com o Teorema dos Resíduos. Também podem ser calculados por primitivação, mas, em geral, com muito mais trabalho. Como $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ e $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, com $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, a substituição $z = e^{i\theta}$, e o Teorema dos Resíduos, permitem escrever o integral na forma

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{i} \int_{\gamma} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \frac{1}{z} dz = 2\pi \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a),$$

em que $f(z) = R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \frac{1}{z}$ e A é o conjunto de Pólos de f no círculo com raio 1 e centro na origem $B_1(0)$.

Como exemplo concreto calcula-se o integral $\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta$, para $a > 1$. Como $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$,

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = \frac{1}{i2} \int_{\gamma} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz.$$

O denominador na função integranda no último termo desta equação pode ser factorizado na forma $(z - z_+)(z - z_-)$, em que $z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Como $z_- < -1 < z_+ < 0$, é $A = \{z_+\}$ e, com $f(z) = \frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)}$,

$$\text{Res}(f; z_+) = \lim_{z \rightarrow z_+} [(z - z_+) f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{1}{z - z_-} = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Portanto, $\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

Diz-se que uma função f Holomorfa em $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contém uma **vizinhança do infinito** (i.e. $\Omega \supset \mathbb{C} \setminus B_r(0)$ para algum $r > 0$) tem uma **singularidade isolada** (resp., **removível**, **Pólo de ordem m** , **Essencial**) **no infinito** se a função $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tem uma singularidade isolada (resp., removível, Pólo de ordem m , Essencial) em zero. Se f tem um Pólo de ordem m no infinito, define-se o **Resíduo de f no infinito** por

$$(8.15) \quad \text{Res}(f, \infty) = \frac{1}{i2\pi} \int_{-\gamma_r} f(z) dz,$$

em que $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ e $r > 0$ é tal que a função f não tem singularidades no exterior do círculo limitado pela circunferência γ_r^* . Como

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma_r} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(re^{-i\theta}) (-ir) e^{-i\theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} g\left(\frac{e^{i\theta}}{r}\right) r^2 e^{-i2\theta} g\left(\frac{ie^{i\theta}}{r}\right) d\theta \\ &= - \int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} g(z) \frac{1}{z^2} dz = - \int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz, \end{aligned}$$

com a função $h(z) = -f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}$,

$$(8.16) \quad \text{Res}(f; \infty) = \text{Res}(h; 0).$$

Da série de Laurent de g centrada em zero $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{-n} z^{-n}$ obtém-se a **série de Laurent de f centrada em ∞** , $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$, que tem partes singular e regular dadas pelos termos de ordem, resp., positiva e negativa desta série, pelo que

$$(8.17) \quad \text{Res}(f; \infty) = -c_{-1}.$$

ou seja, o Resíduo no infinito é o simétrico de um coeficiente da Parte Regular da série de Laurent centrada no infinito. Em particular, se f tem uma singularidade removível no infinito, o seu Resíduo no infinito pode ser $\neq 0$.

O resultado elementar seguinte, relativo à soma total de Resíduos, é útil em situações como a do exemplo que se lhe segue.

$$(8.18) \quad \textit{Se } f \in M(\mathbb{C}) \textit{ tem um conjunto finito } A \textit{ de Pólos e um Pólo em } \infty \textit{ ou uma singularidade em } \infty \textit{ removível, } \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a) + \text{Res}(f; \infty) = 0.$$

Dem. Se γ_r é um caminho nas condições do penúltimo parágrafo anterior ao enunciado, $\text{Res}(f; \infty) = \frac{1}{i2\pi} \int_{-\gamma_r} f(z) dz$, e o Teorema dos Resíduos dá $\frac{1}{i2\pi} \int_{-\gamma_r} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a)$, que implica a fórmula no enunciado. *Q.E.D.*

(8.19) **Exemplo:** Pode-se calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{(1+z^8)^2} dz$, em que $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, sem calcular os Resíduos no conjunto A dos 8 Pólos de ordem 2 da função integranda (Figura 8.4). Como todos Pólos estão na circunferência com centro na origem e raio 1 e, portanto, são interiores ao

círculo limitado por γ^* , do Teorema dos Resíduos e do resultado precedente,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(1+z^8)^2} dz = i2\pi \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a) = -i2\pi \text{Res}(f, \infty).$$

$f(z) = \frac{1}{(1+z^8)^2}$ tem uma singularidade removível no infinito, pois $g(z) = f(\frac{1}{z})$ é extensível a uma função Holomorfa numa vizinhança da origem com o valor 0 na origem, e este zero tem ordem 16, pelo que, com $h(z) = f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}$, é $\text{Res}(f; \infty) = \text{Res}(h; 0) = 0$, e $\int_{\gamma} \frac{1}{(1+z^8)^2} dz = 0$.

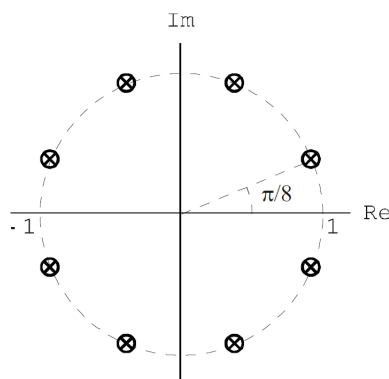


Figura 8.4: Pólos de $\frac{1}{(1+z^8)^2}$

O Teorema dos Resíduos permite calcular certos integrais impróprios de funções de uma variável real, como no exemplo seguinte.

(8.20) **Exemplo:** Considera-se a função real $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$. Este integral impróprio converge absolutamente, pois a função integranda tem módulo $\frac{1}{1+x^2}$ que tem integral impróprio de $-\infty$ a $+\infty$ convergente. Prolonga-se a função integranda à função complexa $f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2}$ e escolhe-se um caminho seccionalmente regular fechado simples que percorre o segmento de recta no eixo real que liga os pontos $-R$ a R e, depois, percorre a semi-circunferência com raio $R > 0$ e centro na origem contida no semiplano superior de \mathbb{C} ; designa-se esta última parte do caminho por γ_R (Figura 8.5). A função f é Meromorfa em \mathbb{C} com os Pólos simples em $\pm i$, pelo que

$$\text{Res}(f; \pm i) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{(z \mp i) e^{itz}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{e^{itz}}{z \pm i} = \pm \frac{e^{\mp t}}{2i}.$$

Do Teorema dos Resíduos, para $R > 1$ é

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = i2\pi \text{Res}(f; i) = \pi e^{-t}.$$

Para obter o integral impróprio que define φ é natural fazer $r \rightarrow +\infty$ e ver o que acontece ao integral $\int_{\gamma_R} f(z) dz$. Como para $(x, y) = z \in \gamma_R^*$ é $|f(z)| \leq \frac{e^{-ty}}{R^2-1}$, para $t \geq 0$ tem-se $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi R}{R^2-1} = 0$, e $\varphi(t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \pi e^{-t}$. Para $t < 0$ esta majoração não limita o valor do integral porque e^{-ty} é ilimitada para $(x, y) = z \in \gamma_R^*$ e $R \rightarrow +\infty$. De modo análogo, mas substituindo a semi-circunferência do semiplano superior pela simétrica no semiplano inferior e designando o resp. caminho por λ_R ,

obtem-se também para $t < 0$ uma majoração análoga. Como o Teorema dos Resíduos dá, para $R > 1$,

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = -i2\pi \operatorname{Res}(f; -i) = \pi e^{-t},$$

e para $t < 0$ é $\varphi(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \pi e^t$, é $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

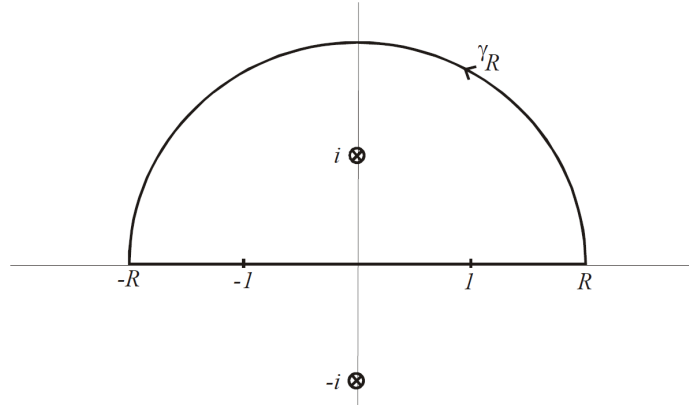


Figura 8.5: Pólos de $f_t(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2}$, para $t \in \mathbb{R}$, e caminhos de integração considerados no exemplo (8.20)

A ideia aplicada no exemplo anterior é útil noutras circunstâncias, pelo que convém explicitá-la no resultado seguinte¹⁴¹.

(8.21) **Lema de Jordan:** *Seja f uma função definida e contínua em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| > r\}$, $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, e $K(R)$ um majorante de $|f|$ em γ_R^* para $R > r$. Se $\lim_{R \rightarrow +\infty} K(R) = 0$, para $t > 0$ é $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{itz} dz = 0$; substituindo $\operatorname{Im} z \geq 0$ por $\operatorname{Im} z \leq 0$ e $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$ por $\gamma_R(\theta) = R e^{-i\theta}$ obtém-se a mesma conclusão para $t < 0$.*

Dem. Para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ é $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ e $|e^{it\gamma_R(\theta)}| = e^{-tR \sin \theta} \leq e^{-2tR \frac{\theta}{\pi}}$. Para $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ é $\sin \theta = \sin(\pi - \theta) \geq \frac{2(\pi - \theta)}{\pi}$ $|e^{it\gamma_R(\theta)}| = e^{-tR \sin \theta} \leq e^{-2tR \frac{\pi - \theta}{\pi}}$. Logo

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{itz} dz \right| \leq K(R) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2tR \frac{\theta}{\pi}} R d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2tR \frac{(\pi - \theta)}{\pi}} R d\theta \right] = K(R) \frac{\pi}{t} (1 - e^{-tR}).$$

As parcelas no último termo tendem para 0 quando $R \rightarrow +\infty$. Se $t < 0$, verifica-se a desigualdade substituindo t por $|t|$. Q.E.D.

(8.22) **Exemplos:**

1. O método do exemplo (8.19) com o Lema de Jordan permite calcular os integrais $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx$, em que R é uma função racional com o grau do denominador pelo menos duplo do numerador e sem Pólos no eixo real, obtendo-se $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx = i2\pi \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f; a)$, com $f(z) = R(z) e^{iz}$ e A o conjunto dos Pólos de f no semiplano complexo superior (Figura 8.6).

¹⁴¹Apareceu pela 1ª vez em 1894 no *Cours d'Analyse da École Polytechnique* de C. Jordan.

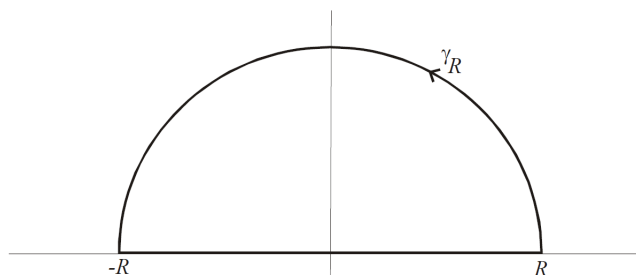


Figura 8.6: Caminho de integração do exemplo (8.22.1)

2. Para integrais $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx$ como no exemplo precedente, mas com R uma função racional com o grau do denominador igual ao do numerador mais 1, é possível mostrar que a mesma fórmula permite calcular o integral com os Resíduos dos Pólos da mesma função no semiplano complexo superior, embora por um processo diferente. Não só não é fácil estimar o integral sobre semicircunferências, como a consideração dessas semicircunferências permitiria, quanto muito, provar a convergência de $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) e^{ix} dx$ (i.e. o **valor principal** do integral impróprio) quando o que se pretende é o limite de $\int_{-b}^c R(x) e^{ix} dx$ quando b e c tendem, independentemente, para $+\infty$. No exemplo precedente esta questão não surgia porque a convergência do integral podia ser assegurada à partida. Por isso, neste caso é natural considerar a integração sobre a fronteira de um rectângulo de vértices $-b$, c , $c+iy$ e $-b+iy$, com $b, c, y > 0$. Para valores grandes de $b, c, y > 0$, o rectângulo contém todos os Pólos de f no semiplano complexo superior (Figura 8.7). Como o grau do denominador é o do numerador mais 1, $|z R(z)|$ é limitada por uma constante $K > 0$. Logo, o integral de f no lado vertical direito do rectângulo é $\leq K \int_0^y \frac{e^{-t}}{|c+it|} dt \leq \frac{K}{C} \int_0^y e^{-t} dt < \frac{K}{C}$, e analogamente, o integral de f no lado vertical esquerdo do rectângulo é $< \frac{K}{C}$. O integral de f no lado horizontal superior do rectângulo é $< \frac{K(b+c)e^{-y}}{y}$. Portanto, se A é o conjunto dos Pólos de f no semiplano complexo superior,

$$\left| \int_{-b}^c R(x) e^{ix} dx - i2\pi \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a) \right| < K \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + K \frac{e^{-y}}{y} (b+c).$$

Com y, b, c a tenderem, independentemente, para $+\infty$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx = i2\pi \sum_{a \in A} \text{Res}(f; a).$$

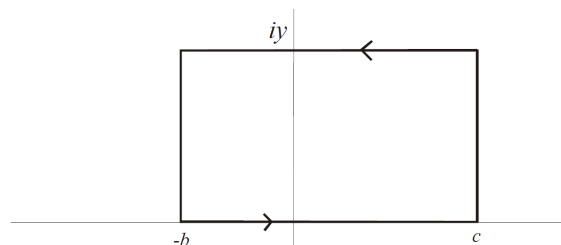


Figura 8.7: Caminho de integração do exemplo (8.22.2)

3. Para calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ procede-se como no exemplo (8.20). A extensão natural da função integranda ao plano complexo é a função complexa $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}$. As funções $\frac{e^{iz}}{2iz}$ e $\frac{e^{-iz}}{2iz}$ têm uma única singularidade, situada na origem. Portanto, é natural evitar a origem considerando a integração num caminho seccionalmente regular simples que percorre sucessivamente a semi-circunferência com raio $r > 0$ e centro na origem contida no semiplano superior de \mathbb{C} , o segmento de recta no eixo real que liga os pontos r e $R > 0$, a semi-circunferência com raio R e centro na origem contida no semiplano superior de \mathbb{C} e o segmento de recta no eixo real que liga os pontos $-R$ e $-r$ (Figura 8.8). Obtém-se

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{i2} \left(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx \right) = \frac{1}{i2} \left(\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \right),$$

e designando γ_r, γ_R as partes do caminho que percorrem as semi-circunferências de raio, resp., r e R , do Teorema de Cauchy,

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Como, para $z \in \gamma_R^*$ é $|\frac{1}{z}| \leq \frac{1}{R}$, o Lema de Jordan implica que o limite do 2º integral na fórmula tende para zero quando $R \rightarrow +\infty$. Logo, das duas últimas fórmulas,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0}} \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{i2} \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = -\frac{1}{i2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

$g(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ tem uma singularidade removível na origem. Do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, $|g|$ é majorado no círculo $B_1(0)$ por algum $K > 0$. Logo, $|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz| \leq \pi r K$, que tendem para 0 quando $r \rightarrow 0$. Portanto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{i2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{-\sin \theta + i \cos \theta}{i(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi 1 d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

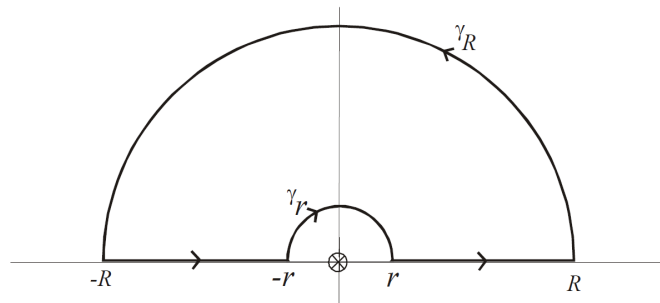


Figura 8.8: Pólo de $\frac{e^{iz}}{z}$ e caminho de integração do exemplo (8.22.3)

8.4 Contagem de zeros e pólos de funções meromorfas

Para uma função complexa f definida em $\Omega \subset \mathbb{C}$ designa-se o **número de zeros de f em Ω** por $N_0(f; \Omega)$ e o **número de Pólos de f em Ω** por

$N^p(f; \Omega)$, contando multiplicidades de acordo com as ordens dos zeros e Pólos da função f . O resultado seguinte dá a diferença dos n^{os} de zeros e polos de funções Meromorfas numa região por aplicação do Teorema dos Resíduos, estendendo o resultado (6.13) de contagem de zeros de funções Holomorfas.

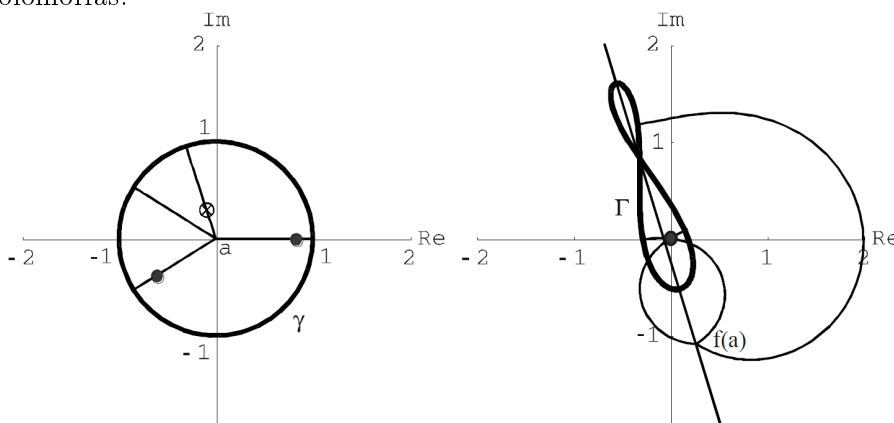


Figura 8.9: Ilustração do Princípio de Argumento (2 zeros e 1 Pólo em $B_1(0)$: à direita indica-se a imagem da fronteira do círculo e dos 4 raios indicados à esquerda, 2 passando nos zeros e 1 no Pólo)

(8.23) Princípio de Argumento: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, $f \in M(\Omega)$ e γ é um caminho fechado seccionalmente regular em Ω homólogo a zero em Ω que não passa em zeros ou Pólos de f tal que $\text{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$ para $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ e $\Omega_1 = \{z \in \Omega : \text{Ind}_\gamma(z) = 1\}$,

$$N_0(f; \Omega_1) - N^p(f; \Omega_1) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_\Gamma(0),$$

em que $\Gamma = f \circ \gamma$ (Figura 8.9).

Dem. Como f é Meromorfa em Ω , as singularidades de $\varphi = \frac{f'}{f}$ em Ω são Pólos ou zeros de f . Como os zeros de f têm ordem finita, as singularidades de φ são Pólos isolados, e φ também é Meromorfa em Ω . Se f tem um zero de ordem $m(a)$ em $a \in \Omega$, é $f(z) = (z-a)^{m(a)}h(z)$, em que h e $\frac{1}{h}$ são Holomorfas numa vizinhança V de a . Para $z \in V \setminus \{a\}$ é $\varphi(z) = \frac{m(a)}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$ e, como $\frac{h'}{h}$ é Holomorfa em V , φ tem um Pólo simples em a e $\text{Res}(\varphi; a) = m(a)$. Analogamente, se f tem um Pólo em $b \in \Omega$ de ordem $p(b)$, a singularidade de $\frac{1}{f}$ em b é removível e a sua extensão Holomorfa g a uma vizinhança de b tem um zero em b de ordem $p(b)$. Logo $g(z) = (z-b)^{p(b)}k(z)$, em que k e $\frac{1}{k}$ são Holomorfas numa vizinhança \tilde{V} de b . Para $z \in \tilde{V} \setminus \{b\}$ é $\varphi(z) = \left(\frac{1}{g(z)}\right)' g(z) = -\frac{g'(z)}{g(z)}$ e, obtém-se analogamente que φ tem um Pólo simples em b e $\text{Res}(\varphi; b) = -p(a)$. Designa-se $A = \{a \in \Omega_1 : f(a) = 0\}$ e $B = \{b \in \Omega_1 : f \text{ tem um Pólo em } b\}$. O Teorema dos Resíduos dá

$$\frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \varphi(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(\varphi; a) + \sum_{b \in B} \text{Res}(\varphi; b) = N_0(f; \Omega_1) - N^p(f; \Omega_1).$$

Resta calcular $\text{Ind}_\Gamma(0)$. Designando o domínio do caminho γ por $[c, d]$,

$$\text{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{i2\pi} \int_\Gamma \frac{1}{z} dz = \frac{1}{i2\pi} \int_c^d \frac{(f \circ \gamma)'}{f \circ \gamma} = \frac{1}{i2\pi} \int_c^d \frac{(f' \circ \gamma) \gamma'}{f \circ \gamma} = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Q.E.D.

A razão do nome Princípio de Argumento é que se fosse possível definir uma função logaritmo $\log f$ sobre os valores do caminho γ , seria uma primitiva de $\frac{f'}{f}$, pelo que da fórmula no enunciado $\log f$ variaria de $i2\pi K$ ao longo de γ , em que K é a diferença entre os números de zeros e Pólos de f em Ω_1 , *i.e.* a parte imaginária de $\log f$, ou seja o argumento de f , variaria $2\pi K$. Não se pode definir uma função logaritmo nestas circunstâncias em $f(\gamma^*)$ (se fosse possível implicaria o absurdo $\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$), mas pode-se tornar rigorosa a conclusão que, considerando variações contínuas do argumento de f sobre o caminho γ , a variação total do argumento do ponto inicial ao final é $2\pi K$, o que corresponde aos valores $f(z)$ darem K voltas no sentido positivo em torno da origem à medida que z percorre a curva γ^* ao longo do caminho γ (ver figuras 8.9, 6.2 e 4.7).

O resultado seguinte foi obtido em 1962 por T. Estermann e em 1976 por I. Glicksberg¹⁴². É uma pequena extensão do Teorema de Rouché clássico, com a mesma tese mas a hipótese um pouco mais forte $|f - g| < |g|$ em γ^* .

(8.24) **Teorema de Rouché:** *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, $f, g \in M(\Omega)$ e γ é um caminho fechado seccionalmente regular em Ω homólogo a zero em Ω que não passa em zeros ou Pólos de f ou g tal que $\text{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$ para $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ e $\Omega_1 = \{z \in \Omega : \text{Ind}_\gamma(z) = 1\}$,*

$$|f - g| < |f| + |g| \text{ em } \gamma^* \implies N_0(f; \Omega_1) - N^p(f; \Omega_1) = N_0(g; \Omega_1) - N^p(g; \Omega_1).$$

Dem. Em γ^* , $|\frac{f}{g} - 1| < |\frac{f}{g}| + 1$ e $\frac{f}{g} \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Re} z \geq 0\}$, que é o domínio do logaritmo principal $\log z$, pelo que numa vizinhança de γ^* é $(\log \frac{f}{g})' = \frac{(f/g)'}{f/g}$. O Princípio de Argumento aplicado a f e g dá

$$\begin{aligned} [N_0(f; \Omega_1) - N^p(f; \Omega_1)] - [N_0(g; \Omega_1) - N^p(g; \Omega_1)] &= \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) \\ &= \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \left(\log \frac{f}{g} \right)' = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

A desigualdade na hipótese deste resultado, $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$, é a Desigualdade Triangular em \mathbb{R}^2 excluindo a possibilidade de igualdade. Logo, verifica-se sempre excepto quando $f(z)$ e $g(z)$ são vectores colineares com o mesmo sentido, ou seja se e só se $f(z)$ e $g(z)$ têm o mesmo argumento ou um deles é 0, ou, ainda, se e só se pertencem a uma mesma semirecta com extremidade na origem. Portanto, esta versão do Teorema de Rouché tem

¹⁴²I.L. Glicksberg, A remark on Rouché's theorem. *Amer. Math. Monthly*, **83** (1976), 186.

a vantagem de permitir uma descrição geométrica simples da desigualdade considerada na hipótese, que pode ser substituída por: *f e g não têm em qualquer ponto de γ^* o mesmo argumento.*

Para funções f e g Holomorfas numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$ e para um caminho γ com as propriedades na hipótese do Teorema de Rouché, tais que $|f-g| < |f|+|g|$ em γ^* , este teorema dá a igualdade do n° de zeros de f e g . O Teorema de Rouché também pode ser aplicado, em condições análogas, para obter a igualdade do n° de pontos em que funções f e g Holomorfas numa região assumem um dado valor $b \in \mathbb{C}$, contando multiplicidades.

(8.25) **Exemplo:** Para determinar o n° de zeros de $P(z) = z^4 + 10z + 1$ na coroa circular $B_2(0) \setminus \text{cl } B_1(0)$ consideram-se os caminhos que percorrem as circunferências que limitam a coroa circular $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\gamma_k(\theta) = R_k e^{i\theta}$, com $R_k = k$, $k = 1, 2$. Com $\Omega = \mathbb{C}$ verificam-se as condições do Teorema de Rouché, para γ_1 e para γ_2 , com Ω_1 , resp., $B_1(0)$ e $B_2(0)$. A função $f = P$ é Holomorfa em $\Omega = \mathbb{C}$. Para $z \in \gamma_1^*$ é

$$|P(z) - (10z + 1)| = |z|^4 = 1, \quad |10z + 1| \geq |10z| - 1 = 9,$$

pelo que

$$|P(z) - (10z + 1)| < |10z + 1| \leq |P(z)| + |10z + 1|,$$

e o Teorema de Rouché dá que o n° de zeros de P e de $g_1(z) = 10z + 1$ em $B_1(0)$ é o mesmo, logo 1, pois g_1 tem apenas um zero $z = \frac{1}{10}$, que pertence a $B_1(0)$. Para $z \in \gamma_2^*$ é

$$\begin{aligned} |P(z) - (z^4 + 10z)| &= 1, \\ |z^4 + 10z| &= |z||z^3 + 10| \geq 2(10 - |z|^3) = 4, \\ |P(z) - (z^4 + 10z)| &< |z^4 + 10z| \leq |P(z)| + |z^4 + 10z|, \end{aligned}$$

e o Teorema de Rouché dá que o n° de zeros de P e de $g_2(z) = z^4 + 10z$ em $B_2(0)$ é o mesmo, logo 1, pois os zeros de g_2 são 1 na origem e as 3 raízes cúbicas de 10 na circunferência de raio $\sqrt[3]{10} > 2$, todos com multiplicidade 1. Como, contando multiplicidades, P tem só 1 zero tanto em $B_1(0)$ como em $B_2(0)$, conclui-se que não tem zeros na coroa circular¹⁴³ $B_2(0) \setminus \text{cl } B_1(0)$.

¹⁴³É possível obter do Teorema de Rouché informação muito precisa sobre a distância à origem dos zeros do polinómio dado. Observando que $\sqrt[4]{10} < 2,2$ obtém-se que g tem 4 zeros no círculo $B_{2,2}(0)$. Para $z = 2,2$ é

$$\begin{aligned} |P(z) - (z^4 + 10z)| &= 1, \\ |z^4 + 10z| &= |z||z^3 + 10| \geq |z|(|z|^3 - 10) = 2,2((2,2)^3 - 10) > 1,4, \\ |P(z) - (z^4 + 10z)| &< |z^4 + 10z| \leq |P(z)| + |z^4 + 10z|, \end{aligned}$$

e o Teorema de Rouché dá que P e g têm 4 zeros em $B_{2,2}(0)$. Para $|z| = 0,2$ é

$$\begin{aligned} |P(z) - (10z + 1)| &= |z|^4 = (0,2)^4, \\ |10z + 1| &\geq |10z| - 1 = 1, \\ |P(z) - (10z + 1)| &< |10z + 1| \leq |P(z)| + |10z + 1|, \end{aligned}$$

e o Teorema de Rouché dá que P e g têm 1 zero no círculo $B_{0,2}(0)$. Como o grau do polinómio P é 4, este polinómio tem 4 zeros, três entre as circunferências de centros na origem com raios 2 e 2,2, e um no círculo de centro na origem com raio 0,2. Pode-se refinar sucessivamente a precisão da localização dos zeros de modo análogo.

O Teorema de Rouché pode ser aplicado para obter uma curta prova do Teorema Fundamental da Álgebra (a 5ª variante de prova neste livro): Se P é polinômio complexo de grau $n \in \mathbb{N}$ e coeficiente de maior grau $c_n \neq 0$, $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{P(z)}{c_n z^n} = 1$; logo, para $R > 0$ grande, $|\frac{P(z)}{c_n z^n} - 1| < 1$ para $|z| < R$; em particular, p não tem zeros fora de $B_R(0)$; do Teorema de Rouché, com $\Omega = \mathbb{C}$, $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(\theta) = R e^{i\theta}$, $\Omega_1 = B_R(0)$, $f = P$, $g(z) = c_n z^n$, como P, g são Holomorfas em Ω , têm o mesmo nº de zeros em $B_R(0)$, contando multiplicidades, e como g tem apenas 1 zero, na origem e de ordem n , P tem n zeros em $B_R(0)$, contando multiplicidades.

Com o Princípio de Argumento obtém-se a Fórmula de Jensen¹⁴⁴ que implica que o logaritmo do módulo de uma função no centro de um círculo em que é Holomorfa é \leq à média em qualquer circunferência com o mesmo centro, analogamente à Propriedade de Valor Médio de funções Holomorfas mas com uma desigualdade em vez de igualdade, e para o logaritmo do módulo da função em vez do valor da função. Se a função não é identicamente nula, essa média cresce (em sentido lato) continuamente com o raio.

(8.26) Se $f \in H(B_R(a))$ não é identicamente nula, a média de $\log |f|$ em circunferências $\partial B_r(a)$ com $0 < r < R$

$$A_{f,a}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(a + r e^{i\theta})| d\theta$$

é função contínua crescente do raio $r \in]0, R[$; em particular,

$$\log |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(a + r e^{i\theta})| d\theta,$$

com a possibilidade de $\log |f(a)| = -\infty$. Mais precisamente, $A_{f,a}(r)$ é função contínua seccionalmente afim de $\log r$ com derivada em cada intervalo $]r_1, r_2[$ tal que f não tem zeros em $C(r_1, r_2) = B_{r_2}(a) \setminus \text{cl } B_{r_1}(a)$ igual ao nº de zeros (contado ordens) em $B_{r_1}(a)$.

Dem. Sem perda de generalidade, pode-se supor $a = 0$ e $R = 1$ (com uma translação e um escalamento de variáveis). Do Princípio de Argumento (8.23), se f não tem zeros numa coroa circular $C(r_1, r_2)$, com $r \in]r_1, r_2[$ é $n = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_r} (\log f(z))' dz = \frac{1}{i2\pi} \left[\lim_{\theta \rightarrow 2\pi} \log f(r e^{i\theta}) - \lim_{\theta \rightarrow 0} \log f(r e^{i\theta}) \right]$, com $\gamma_r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(\theta) = r e^{i\theta}$. Como

$$\log f(r e^{i\theta}) = \log |f(r e^{i\theta})| + i \arg f(r e^{i\theta}),$$

com o argumento $\arg f(r e^{i\theta})$ a variar continuamente ao longo do caminho quando θ cresce de 0 para 2π a partir do valor do argumento principal de $f(r)$ em $\theta = 0$, e $\log (r e^{i\theta})^n = n \log r + i n \theta$, é

$$\log f(r e^{i\theta}) - \log (r e^{i\theta})^n = [\log |f(r e^{i\theta})| - n \log r] + i [\arg f(r e^{i\theta}) - n \theta],$$

em que $\log |f(r e^{i\theta})| - n \log r$ e $\arg f(r e^{i\theta}) - n \theta$ são funções analíticas

¹⁴⁴Foi estabelecida por J.L. Jensen em 1899. Ver exercícios 9.13 e 9.14.

reais definidas em $[0, 2\pi]$, cada uma com valores iguais nos extremos deste intervalo a, resp., $\log |f(r)| - n \log r$ e 0, e pode-se definir $\log f(z) - \log z^n$ de modo a ser função Holomorfa em $C(r_1, r_2)$. Do Teorema de Cauchy, $\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_r} [\log f(z) - \log z^n] \frac{1}{z} dz$ é independente de $r \in]r_1, r_2[$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \left(\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_r} [\log f(z) - \log z^n] \frac{1}{z} dz \right) &= \mathcal{R}e \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\log f(z) - \log z^n] d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\log f(z)| - |\log z^n|) d\theta = A_f(r) - A_{p_n}(r), \end{aligned}$$

também independente de $r \in]r_1, r_2[$, em que $p_n(z) = z^n$ e na 1ª igualdade se usou $\gamma_r'(\theta) = ir e^{i\theta} = i\gamma_r(\theta)$. Como $A_{p_n}(r) = n \log r$, a função $\log r \mapsto A_f(r)$ é afim com declive n para $r \in]r_1, r_2[$.

$A_f(r)$ está definida e é contínua em $]0, 1[$ mesmo em valores de r que sejam raios de circunferências com centro em 0 onde f tem zeros de qualquer ordem n , pois a singularidade de \log em 0 é fraca, e.g. como para $x \neq 0$ é $(x \log |x| - x)' = \log |x|$,

$$\int_0^b \log x^n dx = n \int_0^b \log x dx = n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b \log b - b - \varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon) = nb \log b - nb, \quad b > 0,$$

que função contínua de b mesmo em $b=0$, pelo que se pode obter facilmente a continuidade de $r \mapsto A_f(r)$, o que fica como exercício. Q.E.D.

Exercises

- 8.1 Determine e classifique todas as singularidades da função dada e indique o raio de convergência da resp. série de Taylor no ponto a .
 a) $\frac{1}{1+z^3}$, $a=1$ b) $\frac{z}{z^2-z-2}$, $a=0$ c) $\frac{1}{z-2} e^{(z-1)(z+1)}$, $a=1$ d) $\frac{z}{z-1} e^{-z^2}$, $a=0$
- 8.2 Classifique a singularidade na origem da função dada. Se for removível, defina a função na origem de modo a ser Holomorfa numa vizinhança da origem. Se for um Pólo, determine a Parte Principal da função na origem. Se for Essencial, calcule a imagem de círculos de raios pequenos centrados na origem.
 a) $\frac{\sin z}{z}$ b) $\frac{\cos z-1}{z}$ c) $e^{\frac{1}{z}}$ d) $\frac{\log(1+z)}{z^2}$ e) $z \cos \frac{1}{z}$ f) $\frac{1}{1-ez}$ g) $z^n + \sin \frac{1}{z}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- 8.3 Determine os desenvolvimentos de $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ em série de Laurent nos conjuntos:
 a) $B_1(0) \setminus \{0\}$ b) $B_2(0) \setminus \text{cl } B_1(0)$ c) $\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_2(0)$
- 8.4 Determine o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. Verifique que se $f(z)$ é a soma da série para z no círculo de convergência, $f(z) = z^2 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$, para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que o conjunto de pontos de singularidade de f é denso em $B_1(0)$.
- 8.5 Prove: Se $\{a_n\} \subset B_r(a)$ é uma sucessão com limite a e $f \in H(B_r(a) \setminus (\{a\} \cup \{a_n\}))$ tem Pólos nos pontos de $\{a_n\}$, então para todo $w \in \mathbb{C}$ existe uma sucessão $\{z_n\} \subset B_r(a) \setminus (\{a\} \cup \{a_n\})$ com limite a tal que $f(z_n) \rightarrow w$.
- 8.6 Calcule com Resíduos o integral sobre um caminho regular simples γ que percorre a circunferência com centro em a e raio r no sentido positivo:
 a) $\int_{\gamma} \frac{z}{z^2-z-2} dz$, $a=2$, $r=1$ b) $\int_{\gamma} \frac{ze^{z^2}}{z-1} dz$, $a=0$, $r \neq 1$
 c) $\int_{\gamma} \frac{5+z^2}{1+z^2} dz$, $a=0$, $r=2$ d) $\int_{\gamma} \frac{z^4}{(1-z)^3} dz$, $a=0$, $r=3$
- 8.7 Calcule os integrais seguintes com Resíduos:
 a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx$, $a > 0$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13} dx$ c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$
 d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx$, $k > 0$ e) $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$

- 8.8 Identifique as regiões de Holomorfia das funções complexas $\frac{1}{\sin(1/z)}$ e $\int_0^1 \frac{1}{t-z} dt$ e determine as suas singularidades isoladas e não isoladas.
- 8.9 Determine as regiões onde as funções complexas seguintes estão definidas:
 a) $\int_0^1 \frac{1}{1+tz} dt$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{tz} dt$ c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} e^{tz} dt$
- 8.10 Mostre que as funções seguintes têm singularidades Essenciais no infinito:
 a) e^z b) $\sin z$ c) $\cos z$
- 8.11 Prove: *Funções inteiras sem singularidade Essencial no infinito são polinomiais.*
- 8.12 Prove: *Funções Meromorfas sem singularidade Essencial no infinito são racionais.*
- 8.13 Prove: *Uma singularidade isolada de uma função complexa f não é Pólo de e^f . Deduza: Se $\operatorname{Re} f$ é limitada numa vizinhança de uma singularidade isolada, esta singularidade é removível.*
- 8.14 Mostre que a equação $ze^{a-z} = 1$, com $a > 1$, tem uma e só uma raiz no círculo $B_1(0)$, que é um número real positivo.
- 8.15 Prove que a equação $a-z-e^{-z}=0$, com $a > 1$, tem uma e só uma raiz no semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$, que é um número real.

Exercícios sobre a Função Gama

- 8.16 A **Função Gama**¹⁴⁵ é definida, para $\operatorname{Re} z > 0$ por $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Prove:
 a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $\operatorname{Re} z > 0$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$, e Γ pode ser estendida a uma função definida em $D = \mathbb{C} \setminus \{-n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, ainda designada Γ , de modo a satisfazer $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para $z \in D$.

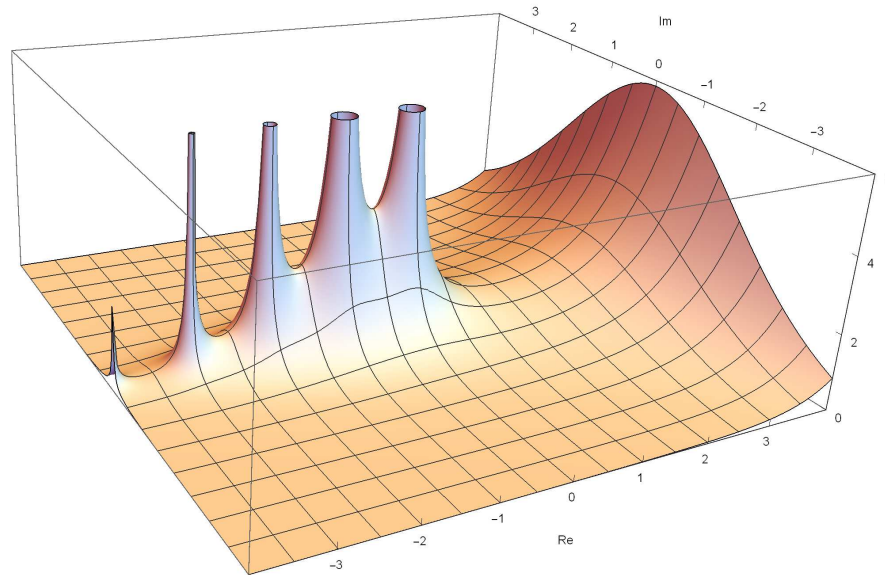


Figura 8.10: Relevo da função Gama

- b) $F_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ é inteira para $n \in \mathbb{N}$, e Γ é Holomorfa em D de a).
 c) Considere as funções definidas pelos 1ºs $n+1$ termos da série de Taylor na origem de e^{-z} , $E_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k z^k}{k!}$. Mostre que para $\operatorname{Re} z > 0$ é

$$\Gamma(z) - E_n\left(\frac{1}{n+z}\right) = \int_0^1 [e^{-t} - E_n(t)] t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

¹⁴⁵A Função Gama foi introduzida por L.Euler em 1729 como função real. C.F.Gauss considerou-a como função complexa. A designação “Função Gama” e a notação Γ foram introduzidos em 1811 por Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

pelo que esta função é Holomorfa no semiplano $\operatorname{Re} z > -(n+1)$, para $n \in \mathbb{N}$.

d) Γ é função Meromorfa em \mathbb{C} com os Pólos simples em 0 e nos inteiros negativos $-n$, com os Resíduos, resp., $\frac{(-1)^n}{n!}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Figura 8.10).

e) O resultado de unicidade¹⁴⁶: Se F é uma função Holomorfa no semiplano complexo $\operatorname{Re} z > 0$ limitada em $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$ com $F(z+1) = zF(z)$ e $F(1) = 1$, é $F = \Gamma$.

(Sugestão: Mostre que $F - \Gamma$ pode ser estendida a uma função Meromorfa em \mathbb{C} com singularidades removíveis, note que Γ é limitada na faixa considerada, obtenha que $F - \Gamma$ pode ser estendida a uma função inteira limitada e aplique o Teorema de Liouville).

Exercícios sobre o Teorema de Mittag-Leffler

- 8.17 Prove o **Teorema de Mittag-Leffler**¹⁴⁷: Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $a_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $\{P_n\}$ é uma sucessão de funções polinomiais sem termos constantes, existem funções Meromorfas f em \mathbb{C} com Pólos nos termos de $\{a_n\}$ e correspondentes partes singulares iguais a $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ que podem ser escritas na forma

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n(z) \right] + g(z),$$

em que $\{p_n\}$ é uma sucessão de funções polinomiais e g é uma função inteira.

A uma expansão deste tipo chama-se **expansão de f em frações parciais**.

(Sugestão: Para $a_n \neq 0$ desenvolva $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ em série de Taylor centrada em 0, defina $p_n(z)$ igual à soma parcial desta série de ordem m_n e mostre que a série é convergente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, m_n for grande).

- 8.18 a) Mostre que $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$.

(Sugestão: Observe que a diferença dos dois lados da igualdade é uma função inteira g , ambos têm período 1 e, com $(x, y) = z$, $|\sin(\pi z)|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$, pelo que o lado esquerdo da igualdade converge uniformemente para zero quando $|y| \rightarrow +\infty$, assim como o direito, e obtenha que $g=0$).

b) Mostre que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right] = z \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n(z-n)}$ é uniformemente convergente em conjuntos compactos sem números inteiros.

c) Prove: $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right] = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$.

(Sugestão: Derive termo a termo as séries na igualdade em b) e use a).

d) Obtenha uma prova alternativa¹⁴⁸ para c) mostrando que a série define uma função Meromorfa ímpar com Pólos precisamente em cada $p \in \mathbb{Z}$ com partes principais, resp., $\frac{1}{z-p}$ e que a sucessão de somas parciais $\{s_n\}$ de $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right]$ satisfaz $s_n(z) + s_n\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2s_{2n}(z) + \frac{1}{2z+2n+1}$, pelo que a soma da série satisfaz a fórmula de duplicação do exercício 3.11 e aplique o exercício 3.12.

e) Calcule as somas das **séries de Dirichlet**¹⁴⁹ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, para $s = 2, 4, 6, 8$.

(Sugestão: Compare o desenvolvimento em c) com a série de Laurent de $\pi \cot(\pi z)$).

f) Mostre que $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z-n}$.

(Sugestão: Use c) para mostrar que $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) - \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{\pi(z-1)}{2}\right)$).

g) Calcule a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

Exercícios sobre factorização de funções holomorfas e prescrição de zeros

- 8.19 Analogamente à definição de séries, dada uma sucessão $\{u_n\} \subset \mathbb{C}$ considera-se a **sucessão de produtos parciais** $p_n = u_1 \cdots u_n$ e, se $p_n \rightarrow p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ quando $n \rightarrow +\infty$, diz-se que o **produto infinito** $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para $p \neq 0$. Se $\lim p_n = 0$, diz-se

¹⁴⁶Foi obtido em 1939 por Helmut Wielandt (1910-2001) e permitiu simplificar muito as passagens entre as diferentes fórmulas para a Função Gama.

¹⁴⁷Foi publicado por M.G. Mittag-Leffler em 1877.

¹⁴⁸Obtida em 1892 por Friedrich Schottky (1851-1935).

¹⁴⁹L. Euler calculou estas somas em 1735 para os números pares de 2 a 12 de modo diferente.

que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para 0 se o n° de termos de $\{u_n\}$ nulos é finito e o produto infinito obtido suprimindo estes termos é $p \neq 0$ e se $\{u_n\}$ tem infinitos termos nulos diz-se que $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge¹⁵⁰. Prove:

- a) $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge $\implies u_n \rightarrow 1$.
- b) Se $1 + u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + u_n)$, considerando o Ramo Principal do logaritmo.
- c) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ é absolutamente convergente $\iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente, em que se diz que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ é **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + u_n)$ é absolutamente convergente, considerando o Ramo Principal do logaritmo.
- d) Se $0 \leq u_n < 1$, então $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.
- e) Se $\{u_n\}$ é uma sucessão de funções complexas definidas e limitadas em $\Omega \subset \mathbb{C}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ é uniformemente convergente em Ω :
 - 1) O produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge uniformemente em Ω .
 - 2) A função $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ é zero num ponto a se e só se $u_n(a) = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - 3) O limite do produto infinito considerado é invariante sob reordenação dos termos.

- 8.20 a) Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$.
- b) Mostre que $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$ não converge, mas o limite dos produtos parciais existe.
- c) Prove: Se $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) = +\infty$, então $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = 0$. (Sugestão: Use $t \leq e^{-(1-t)}$ para $t \in \mathbb{R}$).
- 8.21 Mostre que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}$ converge absoluta e uniformemente em conjuntos compactos.
- 8.22 Prove: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções definidas em Ω nenhuma delas identicamente nula e $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , então $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω e $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ é Holomorfa em Ω .
- 8.23 Para uma função g Holomorfa num ponto z designa-se por $m(g, z)$ a multiplicidade do zero de g em z (se $g(z) \neq 0$ define-se $m(g, z) = 0$).
 Prove: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, $\{f_n\} \subset H(\Omega)$ é uma sucessão de funções e nenhuma é identicamente zero em Ω , e $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω , então $m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z)$.
- 8.24 Prove: Se f é uma função inteira sem zeros, então $f = e^g$, com g inteira.
- 8.25 Prove:
 - a) Se f é uma função inteira com um n° finito de zeros, $f(z) = z^p e^{g(z)} \prod_{n=1}^N (1 - \frac{z}{z_n})$, em que $g \in H(\mathbb{C})$, p é a ordem do zero de f na origem caso exista ou $p = 0$ caso contrário, e z_1, \dots, z_N são os outros zeros de f repetidos de acordo com as resp. multiplicidades.
 - b) $f(z) = z^p e^{g(z)} \prod_{n=1}^N (1 - \frac{z}{z_n})$, com $g \in H(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, é

¹⁵⁰O tratamento especial do caso em que $\lim p_n = 0$ é porque tal acontece se um termo é nulo, independentemente da cauda do produto infinito, o que é inconveniente para considerar convergência, e convém poder usar produtos infinitos para representar funções, mesmo que tenham zeros. Uma 1ª fórmula com produtos infinitos foi dada em 1579 por François Viète (1540-1603) para cálculo aproximado de π : $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$ com $u_n = \frac{1}{2} \sqrt{2 + u_{n-1}}$ e $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtida geometricamente pelo produto dos quocientes das áreas de polígonos regulares inscritos numa circunferência com raio 1 com n°s de lados sucessivas potências inteiras de 2, que podem ser calculados com o Teorema de Pitágoras. Em 1655 J. Wallis obteve a elegante fórmula $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}$. Porém, foi L. Euler que em 1748 iniciou o trabalho sistemático com produtos infinitos, que estendeu aos números complexos. O 1º critério de convergência deve-se a A.-L. Cauchy em 1821. K. Weierstrass contribuiu decisivamente para o estudo de produtos infinitos, por volta de 1854. Alfred Pringsheim (1850-1941) deu em 1889 uma teoria geral da convergência de produtos infinitos. A prova de convergência do produto infinito de F. Viète só foi dada em 1891, por Ferdinand Rudio (1856-1929).

inteira se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|}$ converge.

c) Se $\{p_n\}$ é uma sucessão de polinómios complexos, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n})^{p_n(z)}$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} [\log(1 - \frac{z}{z_n}) + p_n(z)]$ converge.

- 8.26 O Teorema de Factorização de Weierstrass estabelece que toda função inteira pode ser representada por um produto (possivelmente infinito) de factores elementares função dos zeros da função (analogamente à representação de funções polinomiais por produtos de factores que são as diferenças da variável independente aos zeros do polinómio, como é garantido pelo Teorema Fundamental da Álgebra) e que dada uma sucessão arbitrária de números complexos com módulos que tendem para infinito existe uma função inteira cujos zeros são os termos da sucessão (também analogamente ao que é garantido pelo Teorema Fundamental da Álgebra para funções polinomiais). Para produtos infinitos convergirem é necessário que os termos convirjam para 1, pelo que os factores elementares a considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ devem ser funções com exactamente um zero num ponto prescrito z_n e com valores noutros pontos cada vez mais próximos de 1 à medida que n cresce. Para tal convém considerar uma sucessão de funções $\{E_n\}$ com esta propriedade e zero em 1, pois $E_n(\frac{z}{z_n})$ terá a propriedade desejada com zero em $z_n \neq 0$. Observando que $\log(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$, para $|z| < 1$, pode-se definir os **factores elementares**¹⁵¹ por $E_0 = (1-z)$, $E_n(z) = (1-z) \exp(\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k})$, para $n \in \mathbb{N}$. Prove:

a) $|1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$, e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$.

b) Se $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é tal que $|z_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $\{m_n\} \subset \mathbb{N}$ é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+m_n} (\frac{r}{|z_n|})^{m_n+1}$ converge qualquer que seja $r > 0$, $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}(\frac{z}{z_n})$ é uma função inteira cujos zeros são os termos de $\{z_n\}$, em que um zero tem multiplicidade m se e só se ocorre m vezes nos termos de $\{z_n\}$.

c) **Teorema de Factorização de Weierstrass**¹⁵²: Se f é uma função inteira e z_1, z_2, \dots são os zeros de f fora da origem, repetidos de acordo com as resp. multiplicidades, existe uma função inteira g e uma sucessão $\{m_n\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $f(z) = z^p e^{g(z)} \prod_{n \in \mathbb{N}} E_{m_n}(\frac{z}{z_n})$, em que p é a ordem do zero de f na origem, caso exista, ou é $p=0$ caso contrário, e N é \mathbb{N} ou um conjunto finito de 1ºs números naturais.. A cada função $z^p \prod_{n=1}^N E_{m_n}(\frac{z}{z_n})$ chama-se **produto de Weierstrass**.

- 8.27 Prove¹⁵²: Toda função Meromorfa em \mathbb{C} é um quociente de funções inteiras.

- 8.28 a) Prove: Se $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é tal que $|z_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\prod_{n=1}^{\infty} E_m(\frac{z}{z_n})$ converge se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{m+1}}$ converge.

Em caso afirmativo, se M designa o mínimo dos inteiros $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que esta série converge, chama-se a $\prod_{n=1}^{\infty} E_M(\frac{z}{z_n})$ **produto canónico associado à sucessão** $\{z_n\}$ e diz-se que M é o **género**¹⁵³ do produto canónico.

b) Se na factorização de Weierstrass de uma função inteira (exercício 8.26.c) é possível usar o produto canónico associado à sucessão $\{z_n\}$ e g é um polinómio de grau N , diz-se que f é uma **função Inteira de género finito** e chama-se **género da função Inteira** f a $\mu = \max\{M, N\}$, em que M é o género do produto canónico associado a $\{z_n\}$. Prove: Uma função Inteira f de género finito é de ordem $\rho(f) \leq \mu + 1$, i.e. para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|f(z)| \leq e^{|z|^{\mu+1+\varepsilon}}$ para $z \in \mathbb{C}$. (Sugestão: Mostre que $\log |E_{\mu}(z)| \leq (2\mu+1)|z|^{\mu+1}$ e use a).

- 8.29 Prove:

a) Se¹⁵⁴ $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $\{z_n\} \subset \Omega$ uma sucessão sem pontos limite em

¹⁵¹Estes factores elementares foram descobertos em 1851 por James Joseph Sylvester (1814-1897) e redescobertos por K. Weierstrass em 1868.

¹⁵²Foi publicado por K. Weierstrass em 1876.

¹⁵³Na literatura em inglês diz-se *genus*.

¹⁵⁴Este resultado generaliza o Teorema de Factorização de Weierstrass (ver exercício 8.24.c) para funções Holomorfas em subconjuntos abertos de \mathbb{C} , estabelecida em 1884 por Mittag-Leffler.

Ω , existe $f \in H(\Omega)$ cujos zeros são os termos da sucessão $\{z_n\}$ com multiplicidades iguais ao n° de vezes que ocorrem nesta sucessão.

(Sugestão: Prove 1º com a hipótese adicional de existir $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset \Omega$ e $|z_n| \leq R$ para $n \in \mathbb{N}$, considerando uma sucessão $\{w_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ com $|z_n - w_n| = d(z_n, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, em que o lado direito é a distância de z_n ao conjunto $\mathbb{C} \setminus \Omega$, e mostrando, por aplicação do exercício 8.22, que $\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right)$ converge para uma função $f \in H(\Omega)$ e $f(z) \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow +\infty$. Para o caso geral, tome $\text{cl } B_r(a) \subset \Omega$ tal que $\{z_n\} \cap B_r(a) = \emptyset$ e aplique a transformação de Möbius $T(z) = \frac{1}{z-a}$ para reduzir ao caso anterior).

b) **Teorema de factorização de funções Holomorfas**¹⁵⁵: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e $f \in H(\Omega)$ não é identicamente 0, então $f = u \prod_{n \in N} f_n$, em que $N = \mathbb{N}$ ou é um conjunto finito de 1ºs números naturais, $u \in H(\Omega)$ é tal que existe $v \in H(\Omega)$ tal que $uv = 1_\Omega$ e f_n são produtos de Weierstrass (ver Exercício 8.24).

c) Toda função Meromorfa num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um quociente de funções Holomorfas em Ω .

8.30 Prove¹⁵⁶:

1) Toda função inteira de ordem $\rho \in \mathbb{N}$ assume todos os valores complexos excepto possivelmente um.

(Sugestão: Se f não assume $a \in \mathbb{C}$, $f - a$ não tem zeros; aplique o exercício 8.24).

2) Toda função inteira de ordem finita não inteira assume todos os valores complexos infinitas vezes. (Sugestão: f tem infinitos zeros e as ordens de f e $f - a$ são iguais).

8.31 Prove o seguinte **Teorema de Interpolação**: Se $\{z_n\}, \{w_n\} \subset \mathbb{C}$ são sucessões e $|z_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, existe uma função inteira f tal que $f(z_n) = w_n$.

(Sugestão: Mostre que existe $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z)e^{c_n(z-z_n)}w_n}{(z-z_n)g'(z_n)}$ converge).

8.32 Considere a função $G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ (ver exercício 8.21). Prove:

a) O género de $\sin(\pi z)$ é $\mu = 1$ e $e^{157} \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

b) $z G(z) G(-z) = \frac{\sin(\pi z)}{z}$.

c) $G(z-1) = z e^\gamma G(z)$, $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right)$ a constante de Euler¹⁵⁸.

d) $\frac{1}{z G(z) e^{\gamma z}} = \Gamma(z)$, em que γ é a constante de Euler de c) e Γ é a Função Gama¹⁵⁹.

e) $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Em particular, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

f)¹⁶⁰ $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n(2n))}{(2n-1)(2n+1)}$.

g) O género de $\cos(\pi z)$ é $\mu = 2$ e $\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$.

(Sugestão: Use $\sin(2z) = 2(\sin z)(\cos z)$).

8.33 Os resultados seguintes sobre zeros de funções inteiras com coeficientes no corpo $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dos números complexos com partes real e imaginária racionais foram obtidos por A. Hurwitz em 1889. Prove:

a) Se f é uma função Holomorfa na origem, existe uma função inteira g tal que a série de Taylor de fe^g em 0 tem coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Se, adicionalmente, os coeficientes da série de Taylor de f em 0 são reais, existe uma função inteira g pode ser tal que os coeficientes da série de Taylor de fe^g são racionais.

(Sugestão: Para $f \neq 0$ existem $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e uma função h Holomorfa numa vizinhança da origem tais que $f(z) = z^k e^{h(z)}$. Da densidade de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ em \mathbb{C} , existe $g \in H(\mathbb{C})$ tal que

¹⁵⁵ O 1º exemplo de factorização de funções Holomorfas num aberto $\Omega \not\subset \mathbb{C}$ foi de E. Picard em 1881 com $\Omega = \mathbb{C} \setminus \partial B_1(0)$. Em 1884 G. Mittag-Leffler provou a existência de funções Holomorfas com zeros isolados arbitrários em quaisquer abertos de \mathbb{C} . Em 1950 Heinrich Behenke (1898-1979) e Karl Stein (1913-2000) estenderam o resultado a Superfícies de Riemann não compactas.

¹⁵⁶ O Pequeno Teorema de Picard (capítulo 11) generaliza este resultado para toda função inteira.

¹⁵⁷ Esta fórmula foi descoberta por L. Euler em 1734 no contexto de \mathbb{R} .

¹⁵⁸ L. Euler obteve esta relação para o crescimento assintótico da série harmónica em 1734. A constante de Euler é $\approx 0,577216$. Não se sabe se é racional ou irracional.

¹⁵⁹ Esta representação da Função Gama foi obtida por K. Weierstrass em 1876, depois de ter introduzido em 1854 a representação $\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right)^z$.

¹⁶⁰ Esta é a fórmula obtida por J. Wallis em 1655 que foi referida na nota do exercício 8.19.

- $g=q-h$, em que q é uma série de potências em 0 com coeficientes em $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ e $q(0)=0$.)
- b) Dado um conjunto de pontos isolados em $S \subset \mathbb{C}$ e uma função $m: S \rightarrow \mathbb{N}$, existe uma função inteira cujos zeros são os elementos de S com resp. multiplicidades dadas pela função m com série de Taylor na origem com coeficientes em $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. Se, adicionalmente, $m(s)=m(\bar{s})$ para todo $s \in S$, existe uma tal função inteira com série de Taylor na origem com coeficientes racionais.
- c) Todo a é um número real (resp., complexo) é o único zero de alguma função inteira com fórmula de Taylor na origem com coeficientes em \mathbb{Q} (resp., $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$).

Exercícios sobre a Função Zeta de Riemann

- 8.34 A Função Zeta de Riemann¹⁶¹ é $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (Figura 8.11). Prove:
- a) **Teorema de Euler¹⁶² de fatorização da Função Zeta de Riemann em termos de números primos:** Se $x > 1$, $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 - (p_n)^{-x}]^{-1}$, em que $\{p_n\}$ é a sucessão crescente dos números primos.
(Sugestão: Escreva cada termo como uma série geométrica de razão p^{-x} , arranje os termos da série que dá cada um dos produtos parciais por ordem crescente de denominadores e use a fatorização de cada inteiro positivo em factores primos).
- b) Prove que o resultado de a) é válido para $x \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} x > 1$.
- c) ζ é uma função Holomorfa no semiplano complexo $\operatorname{Re} z > 1$, e $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ pode ser estendida como função Holomorfa a $\operatorname{Re} z > 0$.
- d) $\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{z-1} dt$, para $\operatorname{Re} z > 1$.
- e) $\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$, para $\operatorname{Re} z > 1$.
- f) $\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 [(e^t - 1)^{-1} - t^{-1} + 2^{-1}] t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} [(e^t - 1)^{-1} - t^{-1}] t^{z-1} dt$, para $\operatorname{Re} z > 1$. (Sugestão: Use expansões em fracções parciais (exercício 8.17)).
- g) ζ pode ser estendida à faixa vertical $|\operatorname{Re} z| < 1$ e satisfaz neste conjunto a **equação funcional de Riemann**¹⁶³ $\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$.
(Sugestão: Use a fórmula da alínea precedente).

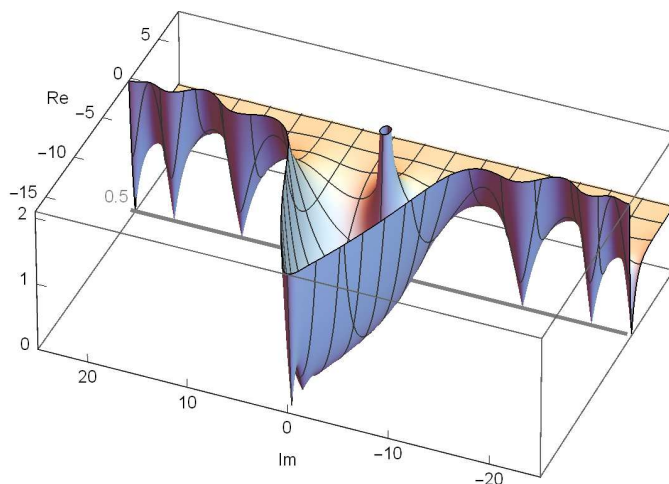


Figura 8.11: Relevo da Função Zeta de Riemann

- g) A equação funcional de Riemann permite definir ζ como função Meromorfa em \mathbb{C} com apenas um Pólo simples em 1, com Resíduo 1.
- h) Os inteiros negativos pares são zeros de ζ e não há outros zeros fora da faixa

¹⁶¹B. Riemann considerou pela 1ª vez ζ como função complexa num artigo de 1859 com título que se traduz por "Sobre o número de primos menores do que uma dada grandeza".

¹⁶²L. Euler considerou ζ para valores reais e provou a relação com a distribuição dos números primos em a) em 1748.

¹⁶³Introduzida por B. Riemann no artigo de 1859 acima referido em nota de pé de página.

crítica¹⁶⁴ $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ (Figura 8.12).

i) $\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$ para $n \in \mathbb{N}$, em que B_{2n} são os números de Bernoulli (ver exercício 5.6). Verifique que estes números alternam de sinal, $|\frac{B_{2(n+1)}}{B_{2n}}| \rightarrow +\infty$ e o raio de convergência da série de Taylor na origem para a extensão por continuidade de $\frac{z}{e^z-1}$ a $z=0$ é 2π . (Sugestão: Compare os coeficientes da série de Laurent para $z \cot z$ em 0 com os da série do exercício 5.6.e).

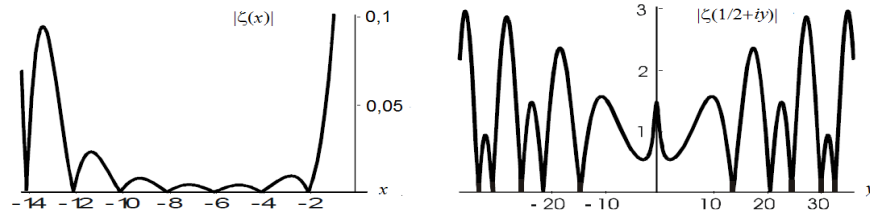


Figura 8.12: Restrições de $|\zeta|$ ao eixo real negativo e à recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$

Exercícios sobre expansões assintóticas em séries de potências

8.35 Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $a \in \partial\Omega$. Uma função $f \in H(\Omega)$ tem série de Taylor em cada ponto de Ω convergente num círculo aberto centrado no ponto, mas pode não ter série de Taylor no ponto a ou esta não ser convergente e ser arbitrariamente aproximada por uma série de potências centrada em a assintoticamente quando o n° de termos da série tende para $+\infty$. Chama-se **expansão assintótica de $f \in H(\Omega)$ em $a \in \partial\Omega$** a $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^m} \left[f(z) - \sum_{n=0}^m c_n(z-a)^n \right] = 0, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

em caso afirmativo escreve-se

$$f \stackrel{\Omega}{\sim} \sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n.$$

A definição e as alíneas seguintes, bem como os exercícios sobre expansões assintóticas que se seguem, também se aplicam a $a = \infty$ se Ω é ilimitado, substituindo $z-a$ por $\frac{1}{z}$. Prove:

a) *É condição necessária para existir expansão assintótica de $f \in H(\Omega)$ em $a \in \partial\Omega$ que existam e sejam finitos os limites seguintes:*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^m} \left[f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} c_n(z-a)^n \right].$$

b) *Se $f \in H(\Omega)$ tem expansão assintótica em $a \in \partial\Omega$ este é único.*

c) *A existência de expansão assintótica não depende apenas da função e do ponto mas também do domínio da função.*

(Sugestão: Considere $f: \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ com $\Omega_\alpha = \{re^{i\theta} : r > 0, |\theta - \pi| < \alpha\}$ nos dois casos $0 < \alpha < \pi$ ou $\alpha \geq \pi$).

¹⁶⁴A **Hipótese de Riemann** foi formulada por B. Riemann no mesmo artigo de 1859; é a conjectura que todos zeros de ζ na faixa crítica têm parte real $\frac{1}{2}$. Este difícil problema permanece em aberto. É um dos famosos Problemas de Hilbert, referidos na introdução do capítulo 7, e foi proposto em 2000 por Stephen Smale (1930-), premiado com a Medalha Fields em 1966, como um dos 7 **Problemas do Milénio** formulados como desafios para o século XXI pelo *Clay Mathematics Institute* que oferece 1 milhão de dólares a quem resolver cada um dos problemas. O *Clay Mathematics Institute* foi fundado em 1998 pelo investidor financeiro e financiador de *venture capital* para projectos de inovação baseada em ciência Landon Thomas Clay (1926-2017). Só um dos Problemas do Milénio foi resolvido até hoje, a Conjectura de Poincaré de 1904 – toda variedade diferencial compacta de dimensão 3 é homeomorfa à fronteira de uma bola em \mathbb{R}^4 – por Grigoriy Perelman (1966-) em 2002-03. G. Perelman foi um dos 4 laureados com a Medalha Fields em 2006, por contribuições para a geometria e ideias revolucionárias sobre a estrutura analítica e geométrica do fluxo de Ricci. Ricci-Curbastro, Gregorio (1853-1925).

d) Somas ou produtos de duas funções em $H(\Omega)$ com expansão assintótica em $a \in \partial\Omega$ têm expansão assintótica em a que é, resp., a soma ou o produto das expansões assintóticas das parcelas.

e) É condição suficiente para existir expansão assintótica de $f \in H(\Omega)$ em $a \in \partial\Omega$ que para cada ponto $z \in \Omega$ exista uma sucessão $\{b_k\} \subset \Omega$ tal que $b_k \rightarrow a$ e os segmentos de recta com extremidades z e b_k estão incluídos em Ω e os limites $\lim_{z \rightarrow a} f^{(n)}(z)$ existam para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; em caso afirmativo,

$$f \underset{\Omega}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{com } c_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow a} f^{(n)}(z).$$

(Sugestão: Use em segmentos de recta fórmulas de Taylor de uma variável real com resto integral para estimar os desvios de $f(z)$ às somas parciais da expansão assintótica).

8.36 Consideram-se sectores circulares abertos em \mathbb{C} com abertura angular $< 2\pi$ e, para simplificar, vértice na origem¹⁶⁵ (com vértices noutros pontos obtêm-se os resultados por translação de coordenadas e para $a = \infty$ substituindo z por $\frac{1}{z}$). Prove:

a) Se $R, S \subset \mathbb{C}$ são sectores circulares abertos com vértices em 0 e aberturas angulares $< 2\pi$ tais que $\text{cl } R \setminus \{0\} \subset S$ e $f \in H(S)$ satisfaz $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$, então $\lim_{z \rightarrow 0} z f|_R(z) = 0$, com $f|_R$ a restrição de f a R .

(Sugestão: Mostre que existem $\delta, \rho > 0$ tal que para todo $z \in R$ com $|z| < \rho$ é $\text{cl } B_{\delta|z}|(z) \subset S$ e aplique uma estimativa de Cauchy de $|f'(z)|$ para todo z que satisfaz as condições acima.)

b) Se R e S são como em a), $f \in H(S)$ e $f(z) \underset{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, é $f'(z) \underset{R}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. (Sugestão: Aplique a.)

c) Se R e S são como em a), $f \in H(S)$ e $f(z) \underset{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, é $\lim_{z \rightarrow 0} f|_R^{(n)}(z) = n c_n$ para $n \in \mathbb{N}$. (Sugestão: Aplique b) n vezes.)

8.37 Prove o **Teorema de Ritt**¹⁶⁶: Se $S \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto aberto de um sector circular aberto com vértice em 0 e abertura angular $< 2\pi$, para qualquer série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (convergente ou não) existe $f \in H(S)$ tal que $f(z) \underset{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

(Sugestão: Considere 1º que S é todo o sector circular. Construa uma sucessão de funções h_n tais que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n(z) z^n$ com a série uniformemente convergente em subconjuntos compactos de S , para o que deve $h_n(z) \rightarrow 0$ suficientemente rapidamente quando $n \rightarrow +\infty$, e a série seja uma expansão assintótica de f no ponto 0, para o que deve $h_n(z) \rightarrow 1$ suficientemente rapidamente quando $z \rightarrow 0$. Sem perda de generalidade pode-se supor que S é um sector angular simétrico em relação ao eixo real e que não inclui o semi-eixo real negativo. Podem ser usadas $h_n(z) = 1 - e^{-a_n/\sqrt{z}}$, considerando o Ramo de \sqrt{z} com Argumento Principal, e $a_n = \frac{1}{n!|c_n|}$ se $c_n \neq 0$ e $a_n = 0$ se $c_n = 0$. Mostre que $|h_n(z)| \leq \frac{a_n}{|\sqrt{z}|}$ para $z \in S$ e $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^k} [1 - h_n(z)] = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, domine a série considerada com as desigualdades obtidas e aplique o Teorema de Weierstrass de séries (6.15).

8.38 Prove a existência de funções C^∞ de \mathbb{R} em \mathbb{R} com valor e derivadas num ponto arbitrariamente especificadas e analíticas no complementar desse ponto¹⁶⁷: Para qualquer sucessão $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ existem funções $C^\infty f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analítica em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ com $f^{(n)}(0) = c_n$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Um exemplo concreto é $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n h_n(x) x^n$ se $x \neq 0$ e $f(0) = a_0$, em que $h_n(x) = 1 - e^{-a_n/\sqrt{x}}$ se $x > 0$ e $h_n(x) = 1 - \cos(a_n/\sqrt{-x})$

¹⁶⁵Para estes sectores circulares a propriedade geométrica na condição suficiente do exercício 8.35.e) é sempre satisfeita pelo que uma condição suficiente para existência de expansão assintótica em 0 é simplesmente a existência dos limites $\lim_{z \rightarrow a} f^{(n)}(z)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

¹⁶⁶Foi provado em 1916 por Joseph Ritt (1893-1951). É notável que mesmo que a uma série de potências centrada num ponto seja fortemente divergente é expansão assintótica de alguma função Holomorfa em qualquer sector circular com vértice no ponto e abertura angular $< 2\pi$.

¹⁶⁷No Essencial foi obtido por E. Borel em 1893, na tese de doutoramento. É mais um exemplo de um resultado difícil no quadro real que pode ser obtido com relativa facilidade passando a funções complexas. O resultado só interessa se as derivadas especificadas no ponto dão uma série de Taylor nesse ponto que não é convergente em \mathbb{R} , pois caso contrário esta série define a função.

se $x < 0$ e $a_n = \frac{1}{n!|c_n|}$ se $c_n \neq 0$ e $a_n = 0$ se $c_n = 0$.

(Sugestão: Considere um sector S com vértice em 0 e abertura angular $< 2\pi$ que contenha o eixo real e aplique o Teorema de Ritt do exercício precedente para obter $f \in H(S)$ com expansão assintótica em 0 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n z^n$. Mostre que a restrição de f a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem extensão C^∞ a \mathbb{R} utilizando o Teorema de Lagrange em intervalos de \mathbb{R}).

8.39 Seja $S \subset \mathbb{C}$ um sector circular aberto com vértice em 0 e abertura angular $< \pi$ simétrico em relação ao eixo real e contendo o semieixo real positivo. Prove:

a) ¹⁶⁸ $f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{z}{1+zt} e^{-t} dt \stackrel{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^{n+1}$.

b) ¹⁶⁹ $f(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \stackrel{S}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} z^{2n+1}$.

c) Se $a, \alpha > 0$ e a série de Taylor em 0 de uma função $\varphi: [0, a] \rightarrow \mathbb{C}$ indefinidamente diferenciável em 0 tem raio de convergência $R > 0$ e $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \int_0^a \varphi(t) e^{\frac{t}{z}} dt,$$

em que para algum $z = x > 0$ o integral do valor absoluto da integranda existe,

$$f(z) \stackrel{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha n!} \varphi^{(n)}(0) \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) z^{\frac{n+1}{\alpha}}.$$

(Sugestão: Se $\frac{x}{2} < a$, separe o integral nos intervalos $[0, \frac{x}{2}]$ e $[\frac{x}{2}, a]$, mostre que o último é irrelevante para a expansão assintótica e obtenha a expansão assintótica do 1º).

d) Prove: **Método de Laplace de expansões assintóticas para máximo na fronteira de um intervalo**¹⁷⁰: Se $a < b \leq +\infty$, $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em a onde é indefinidamente diferenciável, $g'(a) < 0$, $g \leq g(a) - \delta$ em $[a + \delta, b[$ com $\delta > 0$, as séries de Taylor em a de g e de uma função $\varphi: [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ indefinidamente diferenciável em a têm raios de convergência $\geq \delta$, e $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) \stackrel{S}{\sim} e^{\frac{g(c)}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} n! c_n z^{n+1},$$

em que c_n são os coeficientes da série de Taylor em 0 para a função $(\varphi \circ h)h'$ com h a inversa da função real $t \mapsto g(a) - g(t)$ numa vizinhança de a ; em particular, $h(0) = a$, $h'(0) = -\frac{1}{|g'(a)|}$, e o 1º termo da expansão é $-e^{\frac{g(c)}{z}} \varphi(a) \frac{1}{|g'(a)|}$.

(Sugestão: Mostre que só é relevante para a expansão assintótica o integral numa vizinhança de a tão pequena quanto conveniente e use c) com $\alpha = 1$).

e) Obtenha o análogo de d) com $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$. (Sugestão: Use c) com $\alpha = 2$).

f) Obtenha os análogos de d) e e) com o máximo de g em b em vez de a .

g) Prove o **Método de Laplace de expansões assintóticas para máximo no interior de um intervalo**: Com as hipóteses de e) excepto que o máximo de g é num ponto $c \in]a, b[$ em vez de ser em a ,

$$f(z) \stackrel{S}{\sim} e^{\frac{g(c)}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) c_{2n} z^{n + \frac{1}{2}},$$

em que c_k são os coeficientes da série de Taylor em 0 para a função $(\varphi \circ h)h'$ com h a inversa da função real $t \mapsto \sqrt{g(c) + g'(c)t - g(t)}$ numa vizinhança de c ; em particular, $h(0) = c$, $h'(0) = \sqrt{\frac{2}{|g''(c)|}}$, e o 1º termo da expansão é $e^{\frac{g(c)}{z}} \varphi(c) \sqrt{-\frac{2\pi z}{g''(c)}}$.

(Sugestão: Separe o intervalo de integração em dois no ponto c e aplique e) e f)).

¹⁶⁸ Foi a 1ª expansão assintótica por série de potências divergente, obtida em 1754 por L. Euler.

¹⁶⁹ A restrição de f ao semieixo real positivo $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ é a **Função de Erro** que dá a probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal de média 0 e variância $\frac{1}{2}$ pertencer a $[-x, x]$.

¹⁷⁰ A ideia deste método, que se deve a P.-S. Laplace em 1820, é que se uma função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assume um máximo absoluto estrito num ponto, o máximo de $e^{g(t)/z}$ é mais acentuado para valores de z com partes reais cada vez mais pequenas, pelo que as contribuições principais para o integral são de uma vizinhança do ponto de máximo.

h) Mostre que a soma dos três 1^os termos da expansão assintótica em 0 da função $\Gamma(1+\frac{1}{z})$ é $\sqrt{\frac{2\pi}{z}}(\frac{1}{ez})^{\frac{1}{z}}(1+\frac{z}{12}+\frac{z^2}{288})$. O 1^o termo da expansão em ∞ dá a **aproximação** ou **fórmula de Stirling**¹⁷¹ $\Gamma(1+w) \approx \sqrt{2\pi w}(\frac{w}{e})^w$, e $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Aplique d) para obter que se $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e a série de Taylor de $\psi: [0, b[\rightarrow \mathbb{C}$, $0 < b \leq +\infty$, indefinidamente diferenciável em 0 tem raio de convergência > 0 , é

$$f(z) = \int_0^b t^m \psi(t) e^{-\frac{t}{z}} dt \underset{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{n!} \psi^{(n)}(0) z^{m+n+1}.$$

j) Prove a seguinte generalização do resultado de i): **Lema de Watson**¹⁷²: Se $0 < b \leq +\infty$, $\alpha > -1$, $\psi: [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável e C^∞ em $[0, \delta]$ para algum $\delta \in]0, b[$ e $t \mapsto e^{\beta t} |t^\alpha \psi(t)|$ é limitada em $[\delta, b[$ para alguma constante $\beta > 0$ e $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \int_0^b t^\alpha \psi(t) e^{-\frac{t}{z}} dt,$$

então

$$f(z) \underset{S}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \psi^{(n)}(0) z^{\alpha+n+1}.$$

(Sugestão: Para a parte do integral em $[0, \delta]$ use a fórmula de Taylor de φ em 0 com resto de Lagrange e a Função Gama. Prove que, para $\beta > -1$, $z \mapsto e^{\mathcal{R}e(\frac{\delta}{z})} \int_0^\delta t^\beta e^{-\frac{t}{z}} dt - \Gamma(\beta+1) z^{\beta+1}$ é limitada em S e use esta propriedade).

k) Prove o **Método de Ponto de Sela para expansões assintóticas**¹⁷³:

Se a abertura angular de S é $< \frac{\pi}{2}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região, $g, \varphi \in H(\Omega)$ e $G(s) = \mathcal{R}e(\frac{g(s)}{z})$ tem um único ponto de sela em Ω , no ponto $s_0 \in \Omega$, $G''(s_0) \neq 0$, e $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ com

$$f(z) = \int_\gamma \varphi(s) e^{\frac{g(s)}{z}} ds,$$

em que γ é um caminho seccionalmente regular simples em S tal que nas extremidades de γ G é $< G(s_0)$, então

$$f(z) \underset{S}{\sim} e^{\frac{g(s_0)}{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+\frac{1}{2}) c_{2n} z^{n+\frac{1}{2}},$$

em que $c_{2n} = e^{-i(n+1/2)\text{Arg } z} a_{2k}$ e a_{2k} são os coeficientes de ordem par da série de Taylor em 0 para a função $(\varphi \circ h) h'$, com h a inversa da restrição da função real $t \mapsto \sqrt{e^{-i\text{Arg } z} [g(s_0) - g(\gamma(t+t_0))]}$, em que $s_0 = \gamma(t_0)$, a uma vizinhança de 0; em particular, o 1^o termo da expansão assintótica no ponto 0 é $\varphi(s_0) e^{\frac{g(s_0)}{z}} \sqrt{-\frac{2\pi z}{g''(s_0)}}$.

Nota: Pode ser adaptado para pontos de sela de ordem maior, ou mais de um ponto de sela em que G assume o máximo em pontos de sela (somando as resp. contribuições), ou é assumido em extremidades de γ (como em d), e), f)).

(Sugestão: Do Teorema de Cauchy, o integral é invariante em caminhos homotópicos em Ω , pelo que se pode escolher em Ω um caminho de integração com os mesmos pontos inicial e final em que seja mais fácil obter a expansão assintótica. Como $|e^{\frac{g(s)}{z}}| = e^{\mathcal{R}e(\frac{g(s)}{z})}$, para obter um ponto em torno do qual as contribuições para o integral são tanto mais dominantes quanto menor for o valor de $|z|$ convém um caminho γ em que G assume um máximo mais acentuado nesse ponto s_0 . Tem de ser $g'(s_0) = 0$, $(x_0, y_0) = s_0$ ponto de sela de $G(x, y)$ e γ tangente à curva de nível de $\mathcal{I}m(\frac{g(s)}{z})$ em s_0 (se φ tem valores com

¹⁷¹ Descoberta para factorial de naturais por A. De Moivre em 1773. Stirling, James (1692-1770).

¹⁷² Foi provado em 1918 por George Watson (1886-1965).

¹⁷³ Também é conhecido por **Método de Descida por Declive Máximo** (em inglês, *steepest descent*). Foi publicado pela 1^a vez em 1909 por P. Debye, para aproximações de funções de Bessel, que indicou que tinha aparecido numa nota de B. Riemann de 1863 sobre funções hipergeométricas que não foi publicada. O método foi encontrado em 1932 por C.L. Siegel em notas anteriores de B. Riemann, da década com início em 1950 e também não publicadas, para obter uma fórmula assintótica para o erro da equação funcional aproximada para a Função Zeta de Riemann, agora chamada **fórmula de Riemann-Siegel**. Debye, Peter (1884-1966) foi laureado com o Prémio Nobel da Química em 1936 pelo trabalho em estrutura molecular sobre momentos de um dipolo e difracção de raios-X e electrões em gases.

argumento constante, γ^* é esta curva de nível numa vizinhança de s_0 , cujos pontos têm argumento constante, e também se diz que é o **Método de Fase Estacionária**. Aplique o Método de Laplace de d)).

l) Mostre que para a **função de Bessel**¹⁷⁴ de ordem n

$$J_n(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma} e^{\frac{1}{2}z(s-\frac{1}{s})} s^{-(n+1)} ds,$$

em que γ é um caminho regular fechado simples que descreve a circunferência com raio 1 e centro 0 no sentido positivo, obtém-se a expansão assintótica em 0 $f(\frac{1}{z}) \underset{S}{\sim} \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \cos(\frac{1}{z} - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, com S com abertura angular $< \frac{\pi}{2}$. (Sugestão: Aplique o exercício precedente).

Exercícios com aplicações a dinâmica de fluidos e a aerodinâmica

8.40 Consideram-se escoamentos hidrodinâmicos planos estacionários, solenoidais e irrotacionais (exercícios 3.26 e 5.13) com potencial de campo de velocidades φ , função de corrente ψ e potencial complexo $f = (\varphi, \psi)$ de um fluido ideal. Um **fluido ideal** é incompressível, pelo que tem escoamentos solenoidais, densidade de massa ρ_0 constante e é um **fluido de Euler**, *i.e.* o **tensor da tensão de Cauchy**¹⁷⁵ é em cada ponto $T = -pI$, em que p é um campo escalar e I é a identidade, ou seja a tensão desenvolvida é uma **pressão**, *i.e.* normal a cada superfície em que é considerada. A equação de conservação de momento linear na ausência de forças internas dá para a velocidade \mathbf{v} a equação de movimento $\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p$, que para escoamentos estacionários e solenoidais pode ser expressa pela **equação de Bernoulli**¹⁷⁶ $\frac{1}{2}\rho_0 \|\mathbf{v}\|^2 + p = \text{constante}$. $V = (v_1, v_2) = \varphi'$ é a **velocidade complexa**. Se γ é um caminho de Jordan que limita uma região simplesmente conexa S , $\mathbf{F} = \int_{\gamma} p \mathbf{n} ds$ é a força total externa do fluido sobre S (mais especificamente, a força por unidade de comprimento sobre o cilindro perpendicular ao plano com secção ortogonal S).

a) Estabeleça a **Fórmula de Blasius**¹⁷⁷: Para um fluxo estacionário, plano, irrotacional de um fluido ideal, a força total externa $F = (f_1, f_2)$ sobre uma região simplesmente conexa S delimitada por um caminho de Jordan γ é $F = i\frac{1}{2}\rho_0 \int_{\gamma} V^2(z) dz$. (Sugestão: Use a equação de Bernoulli).

b) Estabeleça a **Fórmula de Kutta-Joukowski**¹⁷⁸: Se, além das hipóteses em a), a velocidade do fluido é uniforme no infinito, *i.e.* $V(z) \rightarrow V_{\infty} e^{-i\alpha}$ quando $|z| \rightarrow +\infty$, com $V_{\infty}, \alpha \in \mathbb{R}$, a força total externa sobre uma região simplesmente conexa S delimitada por um caminho de Jordan γ é $F = i\rho_0 V_{\infty} C e^{-i\alpha}$, em que C é a circulação do campo de velocidades ao longo de γ , $C = \int_{\gamma} V(z) dz$. (Sugestão: Coloque a origem

¹⁷⁴ As funções de Bessel foram introduzidas por Daniel Bernoulli (1700-1782) e estendidas por F. Bessel. No plano, dão soluções da equação de Laplace e da equação de Helmholtz $\text{lap } u + k^2 u = 0$ com simetria circular, em que $k > 0$ é chamado **número de onda**. Esta equação surge na resolução da equação de onda por separação das variáveis de tempo e espaço e corresponde à componente independente do tempo de soluções da equação de onda. Por isso, as funções de Bessel têm ampla aplicação tanto para soluções de equilíbrio como de propagação de ondas, em mecânica dos meios contínuos, como difusão de calor, electromagnetismo, gravidade, fluidos ideais incompressíveis, elasticidade linear de membranas. Helmholtz, Hermann Ludwig von (1821-1894).

¹⁷⁵ A **Hipótese de Cauchy** da mecânica dos meios contínuos é que a **tensão** (força por unidade de área) \mathbf{t} numa superfície regular no interior de um corpo com normal unitária contínua \mathbf{n} , devida à força exercida pelo material do lado para onde \mathbf{n} aponta sobre o material no lado oposto, é em cada ponto \mathbf{x} função de \mathbf{n} (em particular, a tensão é a mesma em todas as superfícies tangentes entre si num ponto). A.-L. Cauchy provou em 1822 que esta função é uma transformação linear hermiteana de \mathbf{n} (*i.e.* tem representação matricial simétrica numa base ortonormal) da forma $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T(\mathbf{x})\mathbf{n}$, em que $T(\mathbf{x})$ é o **tensor de tensão de Cauchy**.

¹⁷⁶ A equação de Bernoulli aparece no livro de D. Bernoulli *Hydrodynamica* de 1736, mas deve-se a L. Euler.

¹⁷⁷ Blasius, Paul Richard (1873-1970).

¹⁷⁸ A Fórmula de Kutta-Joukowski foi obtida por W. Kutta em 1902 e N. Joukowski em 1906. Kutta, Martin Wilhem (1867-1944).

em S , desenvolva V em série de Laurent centrada na origem, aplique o Teorema dos Resíduos para calcular C , obtenha a série de Laurent centrada na origem para V^2 , aplique o Teorema dos Resíduos para calcular $\int_{\gamma} V^2(z) dz$ e substitua na fórmula de Blasius de a).

8.41 Consideram-se escoamentos hidrodinâmicos planos estacionários, solenoidais e irrotacionais de um fluido ideal como no exercício precedente e com as mesmas notações em torno de um obstáculo cilíndrico perpendicular ao plano de secção circular com raio $R > 0$ e velocidade uniforme no infinito $V_{\infty} e^{-i\alpha}$, com $V_{\infty}, \alpha \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que o potencial complexo é da forma $f(z) = V_{\infty} e^{-i\alpha} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{C}{2\pi} \log z$, com $C \in \mathbb{R}$. Observe (ver exercício 5.13) que o escoamento é a sobreposição linear de um escoamento com velocidade uniforme no infinito e circulação nula em torno do obstáculo com um vórtice em torno do qual a circulação no sentido positivo é C e discuta os possíveis tipos de fluxos (Figura 8.13).

(Sugestão: Desenvolva em série de Laurent na origem compatível com a condição na velocidade no infinito e o contorno do obstáculo ser uma linha de corrente).

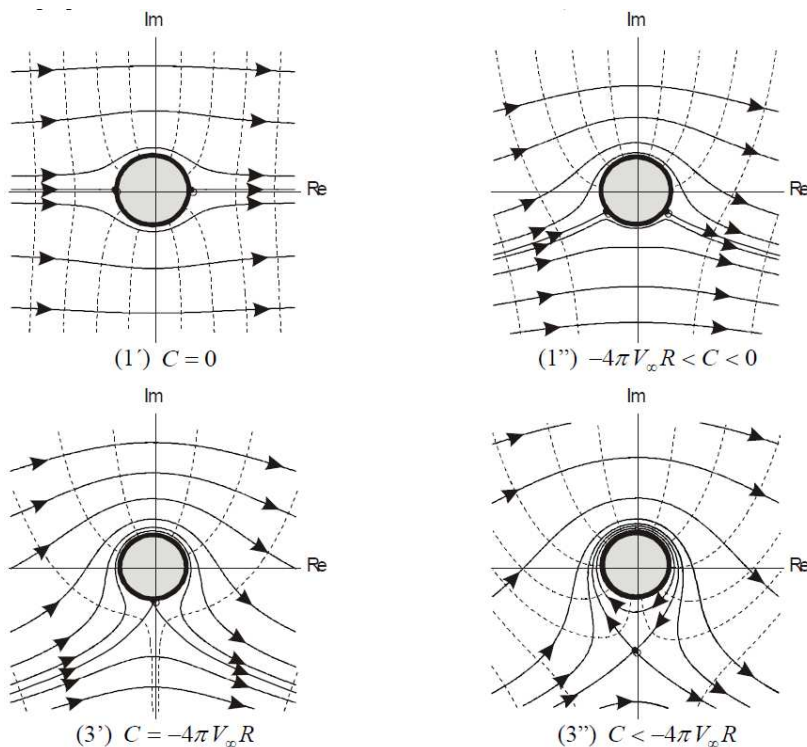


Figura 8.13: Escoamento em torno de obstáculo cilíndrico ortogonal ao plano de secção circular com circulação C no sentido positivo em torno do obstáculo

b) Mostre que para $\alpha = 0$ as linhas de fluxo para valores simétricos de C são simétricas em relação ao eixo real.

c) Mostre que para $\alpha = 0$ e (1) $-4\pi V_{\infty} R < C \leq 0$, (2) $C = -4\pi V_{\infty} R$, (3) $C < -4\pi V_{\infty} R$, os **pontos de estagnação** (velocidade zero) são, resp., (1) 2 na parede, (2) 1 na parede, (3) 1 no exterior do obstáculo.

d) Mostre que a força total externa F sobre o obstáculo devida ao escoamento é $F = -i\rho_0 V_{\infty} C$. Em particular, é vertical e para cima quando¹⁷⁹ $C > 0$.

(Sugestão: Aplique a Fórmula de Kutta-Joukowski do exercício precedente).

¹⁷⁹ Este resultado é previsível a partir da equação de Bernoulli, pois esta equação implica que a pressão na fronteira do obstáculo é maior se a velocidade é menor e, portanto, a força é ascendente se as linhas de fluxo em torno do obstáculo são mais longas na parte superior do que na inferior,

8.42 No final do capítulo 3 considerou-se o perfil de asa de avião de Joukovski, obtido pela transformação conforme $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ aplicada à região delimitada por duas circunferências C_1 e C_2 tangentes no ponto 1, com C_1 a passar no ponto -1 e C_2 exterior a C_1 com centro em z_0 e raio $r > 0$ (Figura 3.10). Considere o escoamento em torno do **perfil de Joukovski** com velocidade uniforme no infinito $V_\infty e^{-i\alpha}$, com $V_\infty, \alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se a α **ângulo de ataque**.

a) Mostre que o potencial complexo para o escoamento, com circulação $C \in \mathbb{R}$ no sentido positivo, obtido por transformações conformes a partir do potencial complexo da alínea a) do exercício precedente para o escoamento em torno de um perfil circular é

$$f(z) = \frac{1}{2}V_\infty e^{-i\alpha} \left(g(z) + \frac{r^2 e^{i2\alpha}}{g(z)} \right) - i \frac{C}{2\pi} \log \frac{g(z)}{r},$$

em que $g(z) = z - z_0 + \sqrt{z^2 - 1}$.

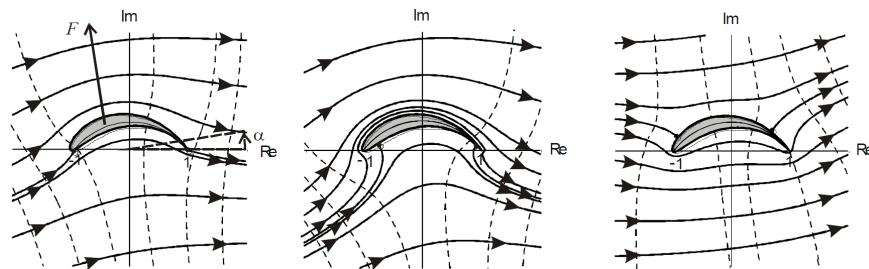


Figura 8.14: Linhas de fluxo e força de sustentação em perfil de Joukovski, e com pontos de estagnação e fuga não coincidentes e velocidade não limitada

b) Mostre que a velocidade é limitada (como tem de ser fisicamente) se e só se $C = -\pi r V_\infty \sin(\alpha + \theta)$, em que θ é o ângulo da tangente às circunferências C_1 e C_2 com o eixo real, que é metade do ângulo da tangente ao perfil de Joukovski com o eixo real no **ponto de fuga**, *i.e.* no vértice do perfil. Mostre que se a condição indicada não é satisfeita a velocidade no ponto de fuga é infinita, e se é satisfeita o ponto de fuga é um ponto de estagnação (Figura 8.14). Mostre que a força de sustentação de uma asa com o perfil de Joukovski é de baixo para cima, perpendicular à recta de inclinação α e com intensidade $F = 2\pi\rho_0(V_\infty)^2 \sin(\alpha + \theta)$.

Exercícios com aplicações a análise e controlo de sistemas lineares

8.43 Diz-se que um **sistema linear é estável**¹⁸⁰ se tem saídas limitadas para entradas limitadas (ver exercício 7.12). Se o sistema tem função de transferência definida por uma função racional própria $T(s) = \frac{P(s)}{\Delta(s)}$, em que P, Δ são polinómios com coeficientes reais sem zeros comuns (*i.e.* é uma fracção irredutível) e com Δ de grau maior do que o de P , chama-se **equação característica do sistema** a $\Delta(s) = 0$.

a) Prove: *Um sistema linear é estável se e só se as raízes da equação característica (ou seja os Pólos da função de transferência) têm partes reais negativas.*

(Observação: O critério de Routh (exercício 6.19.d) pode ser aplicado para verificar se o sistema é ou não estável).

pois a condição de velocidade uniforme no infinito exige maior velocidade na parte superior. A relação para a pressão é a inversa.

¹⁸⁰A estabilidade de sistemas de controlo foi considerada pelos fundadores da Teoria do Controlo, inicialmente designada em inglês *Theory of Governors*: James Clerk Maxwell (1831-1879) em 1868 e Ivan Alekseevich Vyshnegradskii (1831-1895) em 1876. Ambos obtiveram a equivalência da estabilidade de um sistema linear com a localização dos zeros da equação característica no semiplano complexo esquerdo. A utilização de equações diferenciais na análise e projecto de sistemas de controlo tinha sido iniciada pelo matemático George Airy (1801-1892) em 1840, num sistema de controlo com retroacção de telescópios para compensar a rotação da Terra.

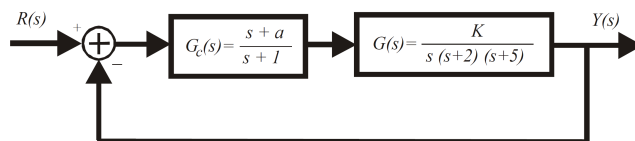


Figura 8.15: Sistema de controlo de viragem de um veículo de dois carris

b) Considere o sistema de controlo esquematizado¹⁸¹ na Figura 8.15. Mostre que para $K > 0$ a região dos parâmetros $(K, a) \in \mathbb{R}^2$ para os quais o sistema é estável é $S = \left\{ (K, a) \in \mathbb{R}^2 : 0 < K < 126, 0 < a < \frac{(K+10)(126-K)}{64K} \right\}$ (Figura 8.16).

(Sugestão: Aplique o critério de Routh do exercício 6.19.d).

8.44 Considere o sistema linear de controlo com retroacção da Figura 7.14.

a) Mostre que a equação característica (exercício 8.43) é $\Delta(s) = 1 + KH(s)G(s) = 0$.

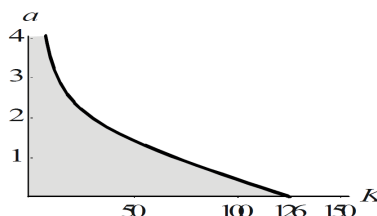


Figura 8.16: Região de estabilidade para o sistema de controlo da Figura 8.15

b) Chama-se **traço das raízes**¹⁸² da equação característica à união dos caminhos no plano complexo que descrevem as posições das raízes em função do ganho K . Prove as propriedades seguintes úteis para obter graficamente o traço das raízes se $F(s) = H(s)G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ como fracção irredutível, em que p, q são polinómios complexos com coeficientes reais:

- (i) O traço das raízes é simétrico ao eixo real e é a união de caminhos que começam em zeros e terminam em Pólos de F , quando K cresce em $[0, +\infty[$ (como grau de $q >$ grau de p , há um caminho de zeros que tende para ∞).
- (ii) O traço das raízes sobre o eixo real é a união dos pontos à esquerda de cada soma ímpar de zeros e Pólos de F , contando multiplicidades.
- (iii) As componentes do traço das raízes que vão para ∞ são assintóticas a rectas que intersectam o eixo real em $\sigma_A = \frac{\sum_{k=1}^{n_p} p_k - \sum_{j=1}^{n_z} z_j}{n_p - n_z}$ com ângulo $\phi_A = \frac{(2k+1)\pi}{n_p - n_z}$, para $k = 0, 1, \dots, n_p - n_z - 1$, com n_p, n_z , resp., o nº de zeros e de Pólos de F , e p_k, z_k , resp., os zeros e os Pólos de F , repetidos de acordo com multiplicidades.
- (iv) Os pontos de saída ou entrada no eixo real (i.e. em que caminhos deixam ou entram o eixo real) são raízes múltiplas da equação característica.
- (v) O argumento da tangente ao traço das raízes em cada ponto z_0 é $\sum_{k=1}^{n_p} \theta_{pk} - \sum_{j=1}^{n_z} \theta_{zj} = \pi$, módulo 2π , em que θ_{pk}, θ_{zj} são argumentos das diferenças, resp., $p_k - z_0, z_j - z_0$.

c) Use as propriedades em b) para mostrar que o traço das raízes da equação característica de um sistema linear $\Delta(s) = 1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$ é o indicado na Figura 8.17. Verifique que o valor de $K > 0$ correspondente ao traço das raízes inintersectar o eixo imaginário é aproximadamente $K = 569$.

(Sugestão: Para a última questão use o critério de Routh do exercício 6.19.d)

¹⁸¹ Este sistema de controlo é estudado no artigo de Wang, G.G., Wang, S.H., Chen, C.H., Design of turning control for a tracked vehicle, *IEEE Control Systems Magazine*, April 1990, 122-125. Wang, Geng (1947-). Wang, Shih. Chen, Cheng.

¹⁸² Em inglês diz-se *root locus*. Foi introduzido na análise e projecto de sistemas de controlo em 1948 por Walter Evans (1920-1999) quando trabalhava na *North American Aviation*.

8.45 Chama-se **controlador PID**¹⁸³ a um controlador com função de transferência $G_c(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$, com $K_p, K_i, K_s > 0$ são constantes, o que corresponde a uma relação entrada-saída $y(t) = K_p r(t) + K_i \int r(t) dt + K_d r'(t)$. Considere o sistema de controlo com retroacção e controlador¹⁸⁴ PID na Figura 8.18. Mostre que se os zeros desta função de transferência são $-3 \pm i$, o traço das raízes da equação característica do sistema é como na Figura 8.19. Verifique que o erro estacionário de posição (ver exercício 7.13) é 0, o desvio positivo máximo¹⁸⁵ em resposta ao escalão unitário é $< 2\%$ do valor estacionário e o **tempo de ajuste**¹⁸⁶ (i.e. para a resposta ao escalão unitário permanecer a $< 2\%$ do valor estacionário) é aproximadamente 1 se K_d é grande (para tempos de ajuste menores pode-se escolher os zeros do controlador PID mais à esquerda no plano complexo).

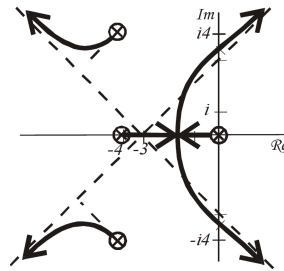


Figura 8.17: Traço das raízes do sistema linear com equação característica $\Delta(s) = 1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0$

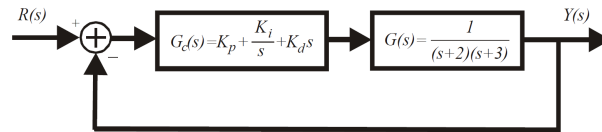


Figura 8.18: Sistema linear de controlo com controlador PID

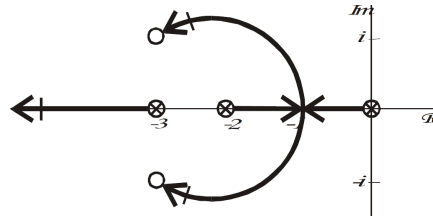


Figura 8.19: Traço das raízes do sistema com controlador PID da Figura 8.18

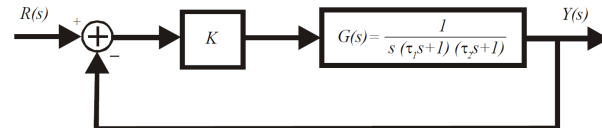


Figura 8.20: Sistema linear de controlo com retroacção

¹⁸³PID abrevia “Proporcional-Integral-Derivada”. Estes controladores são amplamente aplicados em controlo de processos industriais. Foram introduzidos em 1922 por Elmer Sperry (1860-1930) e Nicholas Minorsky (1885-1970) em sistemas de manutenção de rumo de navios, por inspiração na observação de como os “homens de leme” mantinham o rumo de navios combinando acções proporcionais, correctoras de desvios médios, e preditivas de tendências.

¹⁸⁴Um sistema deste tipo pode ser um sistema de controlo de um veículo autónomo.

¹⁸⁵Em inglês diz-se *overshoot*.

¹⁸⁶Em inglês diz-se *settling time*.

8.46 Dado um sistema linear de controlo com equação característica $\Delta(s) = 1 + L(s) = 0$ (ver exercícios 8.43 e 8.44), **contorno de Nyquist** é o caminho $\Gamma_L = L \circ \gamma$, em que γ é um caminho de Jordan seccionalmente regular que percorre no sentido negativo a semicircunferência com centro na origem contida no semiplano complexo direito com raio $R \approx +\infty$ e diâmetro no eixo imaginário, excepto na vizinhança de Pólos no eixo imaginário, que contorna sobre semicircunferências centradas nesses Pólos contidas no semiplano complexo esquerdo com raios $r \approx 0$.

- a) Mostre que o contorno de Nyquist do sistema linear de controlo¹⁸⁷ na Figura 8.20 são como na Figura 8.21. Mostre que os correspondentes diagramas de Bode do sistema com função de transferência $L = 1 - \Delta$, em que $\Delta(s) = 0$ é a equação característica do sistema linear de controlo considerado, são como na Figura 8.22.
- b) Prove o **critério de estabilidade de Nyquist**¹⁸⁸: *Um sistema linear de controlo com equação característica $\Delta(s) = 1 + L(s) = 0$ é estável se e só se $\text{Ind}_{\Gamma_L}(-1)$ é igual ao n° de Pólos de L com parte real positiva, em que Γ_L é um contorno de Nyquist. Mostre que o sistema na Figura 8.20 é estável se e só se $K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$.*

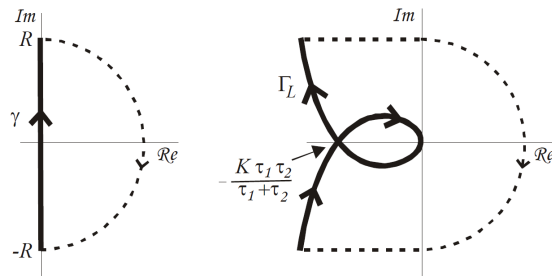


Figura 8.21: Contorno de Nyquist do sistema de controlo da Figura 8.20

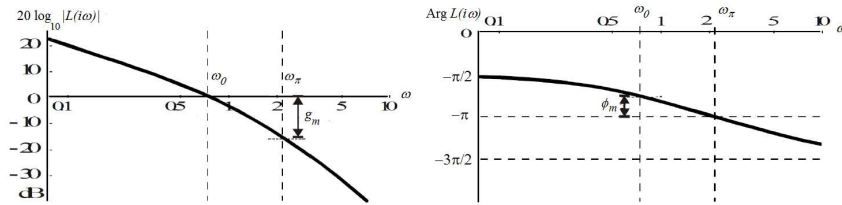


Figura 8.22: Diagrama de Bode do sistema $L = KHG$ da Figura 8.20

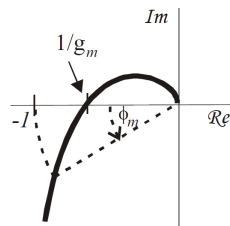


Figura 8.23: Diagrama polar para sistema $L = KHG$ da Figura 8.20

- c) Chama-se **diagrama polar** do sistema com função de transferência L à representação gráfica do caminho $\omega \mapsto L(i\omega)$, para $0 < \omega$, ou seja à parte do contorno de Nyquist correspondente ao percurso do semieixo imaginário positivo. Mostre que o diagrama polar do sistema com função de transferência $L = KHG$ da Figura 8.20 com $K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$ é como na Figura 8.23. A distância da curva no diagrama polar ao ponto -1 é uma medida da **margem de estabilidade** do sistema. Chama-se **margem**

¹⁸⁷ Pode ser o sistema de controlo de um manipulador com motor de corrente contínua.

¹⁸⁸ Este critério foi introduzido na análise e controlo de sistemas por H. Nyquist em 1932.

de ganho do sistema ao recíproco do ganho $g_m = \frac{1}{L(i\omega_\pi)}$ para o qual $\text{Arg } L(i\omega_\pi) = \pi$, e **margem de fase**¹⁸⁹ do sistema à diferença $\phi_m = \text{Arg } L(i\omega_0) - (-\pi)$ para a qual $|L(i\omega_0)| = 1$ (Figura 8.23). Verifique que as margens de ganho e de estabilidade são as indicadas no diagrama de Bode da Figura 8.22; em particular, são positivas para $0 < K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$ e negativas para $K > \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$.

8.47 Considere o sistema linear com retroacção e o sistema a que se adicionou um **compensador** com função de transferência¹⁹⁰ $G_c(s)$ da Figura 8.24.

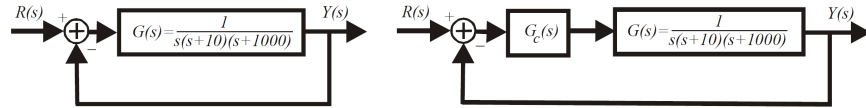


Figura 8.24: Sistema linear de controlo com retroacção, sem e com compensador

a) Mostre que o traço das raízes do sistema com um compensador de ganho simples com função de transferência $G_c(s) = K > 0$ é o indicado na Figura 8.25 (o sistema sem compensador corresponde a $K = 1$) e calcule o ganho K de modo ao sistema ter Pólos dominantes (*i.e.* os Pólos com maior parte real excluindo o Pólo no zero) nas bissetrizes dos 2º e 3º quadrantes do plano complexo.

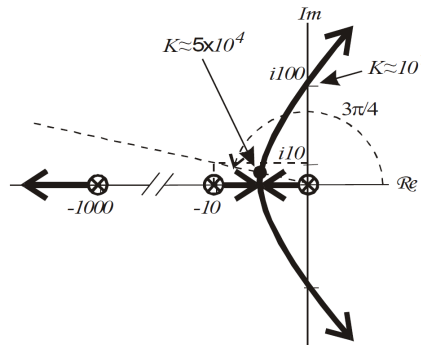


Figura 8.25: Traço das raízes do sistema linear de controlo da Figura 8.24 com compensador de ganho simples

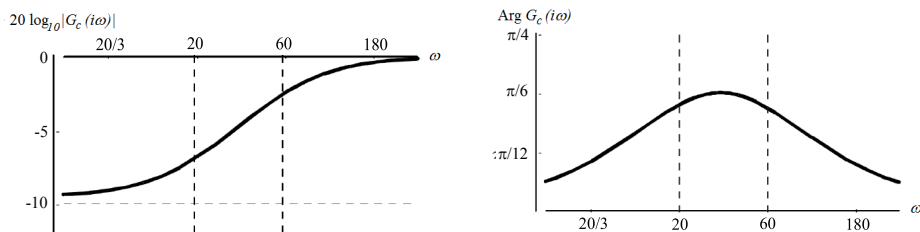


Figura 8.26: Diagrama de Bode do compensador de avanço de fase $G_c(s) = \frac{K(s-z)}{s-p}$

¹⁸⁹No projecto de sistemas de controlo, para assegurar as características pretendidas para as respostas consideram-se muitas vezes os efeitos nas margens de ganho e/ou de fase, analisados com o diagrama polar, o diagrama de Bode ou um diagrama em que se representa o caminho do ganho em dB versus a fase em função da frequência angular, chamado **diagrama de Nichols**, introduzido na análise de sistemas por Nathaniel Nichols (1914-1997) durante a parte final da II Guerra Mundial no *MIT Radiation Laboratory* e publicado em 1947. Estas representações gráficas permitem identificar os efeitos de controladores, em particular para especificar a localização de zeros e Pólos e os valores de ganhos que permitam obter as características pretendidas.

¹⁹⁰Sistemas destes tipos podem ser controladores de um traçador gráfico de computador (S.T. Van Voorhis, Digital control of measurement graphics, *Hewlett-Packard Journal*, January 1986, 24-26. O compensador em d) foi usado pela *Hewlett-Packard* em 1986 no traçador gráfico HP7090A.

b) Considere um compensador com função de transferência $G_c(s) = \frac{K(s-z)}{s-p}$, com $p < z < 0$. Mostre que o diagrama de Bode deste compensador é como na Figura 8.26, pelo que introduz um avanço de fase com maior incidência numa frequência angular com valor entre os simétricos do zero e do Pólo que diminui para frequências angulares que se afastam dessa frequência, razão por que é designado **compensador de avanço de fase**.

c) Mostre que a inclusão do compensador de avanço de fase de b) resulta em acrescentar 1 zero e 1 Pólo ao sistema. Considere o zero em $z = -20$ e calcule a localização do Pólo p e o ganho K de modo ao sistema ter Pólos dominantes em $-20 \pm i20$ (satisfaz o objectivo de localização dos Pólos dominantes de a)). Mostre que acrescentar o zero e o Pólo considerados transforma o traço das raízes no da Figura 8.27.

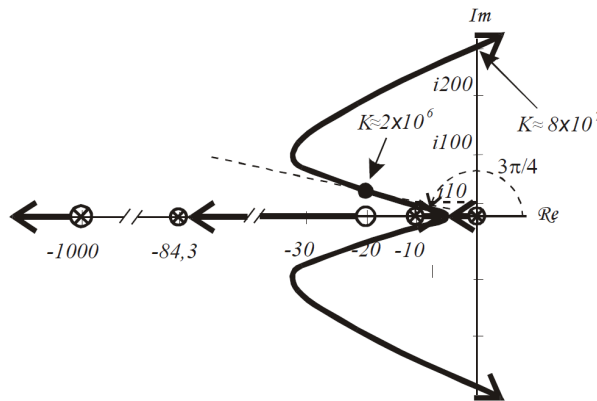


Figura 8.27: Traço das raízes do sistema linear de controlo da Figura 8.24 com compensador de avanço de fase $G_c(s) = \frac{K(s-z)}{s-p}$

d) Considere um compensador com função de transferência $G_c(s) = K + K_d s$, a que se chama **compensador PD**¹⁹¹. Mostre que a inclusão deste compensador acrescenta 1 zero ao sistema. Considere o zero em $z = -10$ de modo a cancelar o Pólo dominante de $G(s)$ e calcule os ganhos K, K_d de modo ao sistema ter Pólos dominantes que satisfaçam o objectivo de localização de a)). Mostre que o cancelamento do Pólo dominante de $G(s)$ transforma o traço das raízes no da Figura 8.28.

e) Mostre que as respostas ao escalão unitário dos sistemas sem e com compensadores de ganho simples, de avanço de fase e PD, em, resp., a), c), d), são como na Figura 8.29. É possível melhorar o desempenho com zeros e Pólos adicionais.

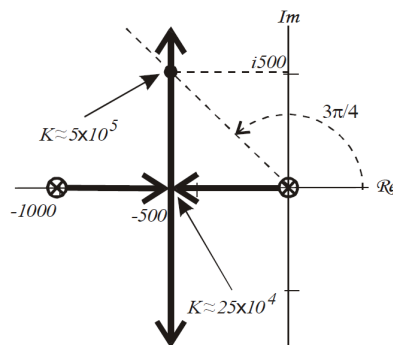


Figura 8.28: Traço das raízes do sistema linear de controlo da Figura 8.24 com compensador PD $G_c(s) = K + K_d s$

¹⁹¹PD abrevia “Proporcional-Derivada” (comparar com o controlador PID do exercício 8.45).

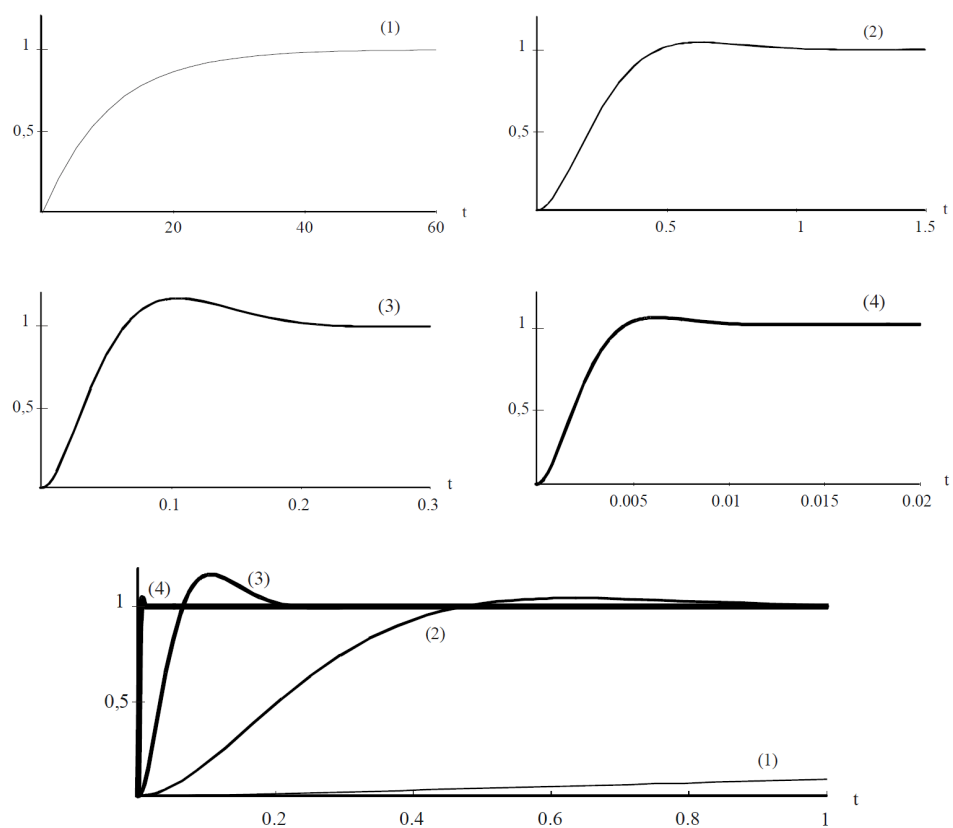


Figura 8.29: Respostas ao escalão unitário dos sistemas (1) sem compensador, (2) com compensador de ganho simples, (3) com compensador de avanço de fase e (4) com compensador PD, considerados, resp., nas alíneas a), c), d)

J.B.Listing¹⁹², mas já tinha sido usado numa carta que tinha escrito em 1836 a um antigo professor, em que também indicava que as ideias básicas sobre este novo tema tinham sido aprendidas com C.F. Gauss, embora este não tenha publicado sobre o assunto. B. Riemann teve um papel importante no desenvolvimento da topologia, nomeadamente a propósito das Superfícies de Riemann que considerou em 1857 no âmbito do estudo de funções complexas. O termo “topologia” não foi adoptado na altura e o assunto ficou conhecido por *analysis situs*, que traduzido à letra significa “análise do lugar”. Foi com este título que H. Poincaré publicou em 1895 o 1º trabalho sistemático de Topologia, em que introduziu as bases da Topologia Algébrica. O uso do termo “topologia” só se generalizou a partir dos trabalhos de S. Lefschetz¹⁹³ do final da década de 1920, mais de sessenta anos após ter sido usado pela 1ª vez por Listing.

O conceito básico da Topologia é conjunto aberto. A ideia de conjunto aberto, assim como as de conjunto fechado e ponto limite, foi introduzida para conjuntos de números reais em 1872 por G. Cantor. A noção de vizinhança de um ponto foi introduzida por K. Weierstrass em 1877 e utilizada por G. Peano e C. Jordan em 1887, e por D. Hilbert em 1902. A noção de interior, exterior e fronteira de um conjunto devem-se a G. Peano em 1887. C. Jordan também refere em 1887, no *Cours d'Analyse da École Polytechnique de Paris*, a noção de fronteira de um conjunto sem mencionar G. Peano¹⁹⁴, não sendo claro se chegou a este conceito independentemente.

O 1º estudo sistemático de topologia geral foi de M. Fréchet, no contexto de espaços métricos, noção que introduziu na tese de doutoramento que apresentou em 1906. Porém, a designação “espaço métrico” só apareceu em 1914 por F. Hausdorff. Um espaço métrico é um conjunto não vazio com uma função que dá a distância de pares de elementos e satisfaz as propriedades simples de ter valores reais não negativos, ser invariante com troca da ordem dos elementos, satisfazer a desigualdade triangular e ser zero se e só se os pontos coincidem. Motivado por aplicações a espaços de funções, M. Fréchet estudou as propriedades básicas da topologia de subconjuntos de um espaço métrico a partir da noção de bola aberta com centro num ponto, que é o conjunto dos pontos que distam dele menos de um valor chamado raio da bola. Os espaços métricos tiveram grande importância a partir de 1920, com os trabalhos de S. Banach sobre espaços lineares normados de funções e o desenvolvimento subsequente da Análise Funcional. São um quadro particularmente apropriado para considerar convergência, em que a noção de Sucessão de Cauchy, considerada pela 1ª vez em 1817 por B. Bolzano e depois por A.-L. Cauchy em 1824 tem um papel importante; devido à relevância desta propriedade, quando se verifica diz-se que o espaço é completo¹⁹⁵.

¹⁹²Listing, Johann Benedict (1802-1882).

¹⁹³Lefschetz, Solomon (1884-1972).

¹⁹⁴Peano, Giuseppe (1858-1932).

¹⁹⁵Hausdorff, Felix (1868-1942). Banach, Stefan (1892-1945).

O conceito de conjunto compacto é fundamental por permitir passar de famílias infinitas de conjuntos abertos cuja união contém o conjunto (chamadas coberturas abertas) a um n^o finito de elementos da família com união que ainda contém o conjunto. A passagem do infinito ao finito é muito útil e é uma das maneiras mais simples de obter resultados globais de resultados locais, *i.e.* válidos em vizinhanças de quaisquer pontos. Esta propriedade de conjuntos compactos, chamada Propriedade de Heine-Borel, começou por ser usada por E. Heine num artigo de 1872 em que provou que uma função real contínua num intervalo limitado e fechado de números reais é uniformemente contínua (Teorema de Heine-Cantor). Um outro antecedente significativo da noção de compacidade é o Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, publicado por K. Weierstrass em 1877, segundo o qual uma função contínua num intervalo limitado e fechado de números reais assume um valor máximo e um valor mínimo nesse intervalo. Embora utilizada implicitamente no artigo de E. Heine, a Propriedade de Heine-Borel só foi explicitamente formulada em 1895, por E. Borel, no caso de coberturas de intervalos limitados e fechados de números reais por intervalos abertos numeráveis. Esta propriedade foi depois estendida por H. Lebesgue em 1902 para coberturas por intervalos abertos possivelmente inumeráveis, razão pela qual o Teorema de Heine-Borel também é conhecido por Teorema de Borel-Lebesgue. Em 1903 E.L. Lindelöf provou que toda cobertura de um subconjunto de \mathbb{R} por intervalos abertos tem uma subcobertura numerável, o que estabeleceu uma relação entre o modo como a propriedade foi considerada por E. Borel e a sua formulação por H. Lebesgue no caso de intervalos limitados e fechados de números reais. Em 1904 G. Vitali estendeu o Teorema de Heine-Borel de intervalos limitados e fechados para quaisquer conjuntos limitados e fechados de números reais. O termo “compacto” foi introduzido por M. Fréchet em 1906 na sua tese de doutoramento. A Propriedade de Heine-Borel geral só apareceu em 1926, nos trabalhos de P. Uryshon e P. Alexandroff¹⁹⁶.

A noção de conjunto conexo foi introduzida por C. Jordan em 1893 para subconjuntos de um plano, a propósito do Teorema da Curva de Jordan que estabelece que o complementar de toda curva fechada simples num plano é a união de dois conjuntos abertos disjuntos e conexos. A definição geral de conjunto conexo deve-se a F. Riesz, em 1906, e foi redescoberta por F. Hausdorff no trabalho de 1914 já referido.

Um espaço topológico é um conjunto não vazio com uma família de subconjuntos (designados conjuntos abertos) a que se chama topologia, que contém todo o espaço e o conjunto vazio e é fechada para intersecções finitas e uniões finitas ou infinitas de subconjuntos. Uma vizinhança de um ponto num espaço topológico é um conjunto aberto que contém o ponto. A noção de espaço topológico foi dada por F. Hausdorff em 1914, embora D. Hilbert já tivesse considerado em 1902 uma axiomática para vizinhanças num plano.

¹⁹⁶Heine, Henrich (1821-1881). Uryshon, Pavel (1898-1924). Alexandroff, Pavel (1896-1982).

Um aspecto básico da noção de espaço topológico, até para entender até que ponto é mais amplo do que o conceito de espaço métrico, é o de condições para uma topologia poder ser definida por uma distância, ou seja para que um espaço topológico seja metrizável. No período 1920-1930 esta questão foi intensivamente estudada, principalmente por P. Uryshon, P. Alexandroff e V.I. Smirnov, e levou à obtenção em 1950-51 de condições necessárias e suficientes para um espaço topológico ser metrizável por R.H. Bing, J. Nagata e V.I. Smirnov. V.I. Smirnov estabeleceu 1º uma condição semelhante às de R.H. Bing e de J. Nagata, na sequência do Teorema de Metrização de Urysohn que deu uma condição suficiente para metrizabilidade, e depois uma outra condição com a noção de conjunto paracompacto, na sequência de A.H. Stone ter provado em 1948 que os espaços topológicos metrizáveis são paracompactos. O conceito de conjunto paracompacto é uma generalização de conjunto compacto, introduzida em 1944 por J. Dieudonné, com aplicações em Geometria Algébrica e em Geometria Diferencial¹⁹⁷.

Inclui-se uma prova do Teorema da Curva de Jordan com Homologia. Como definido na secção 4.2, uma curva de Jordan $J \subset \mathbb{C}$ é a imagem de um caminho fechado simples. O exemplo mais simples é uma circunferência. Uma circunferência num plano separa-o em duas componentes conexas: o círculo aberto que delimita e o conjunto ilimitado complementar no plano da sua união com esse círculo. Da secção 4.5, o complementar de uma curva de Jordan seccionalmente regular em \mathbb{C} é um conjunto aberto com exactamente uma componente conexa ilimitada e pelo menos uma componente conexa limitada. O Teorema da Curva de Jordan estabelece que, tal como para circunferências, $\mathbb{C} \setminus J$ tem exactamente duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada, ambas com fronteira J . Este resultado foi considerado evidente antes de 1817, altura em que B. Bolzano apontou a necessidade de o provar, o que só foi feito 70 anos depois por C. Jordan¹⁹⁸. As provas mais simples usam Topologia Algébrica, com base na noção de Homotopia introduzida pelo próprio C. Jordan em 1893 a propósito deste mesmo resultado, ou Homologia introduzida por H. Poincaré em 1895. A prova aqui apresentada baseia-se em espaços de Homologia. Nos exercícios I.28 e I.32 deste apêndice indica-se como obter outras provas, a última, ob-

¹⁹⁷Um **espaço paracompacto** é um espaço topológico tal que cada cobertura aberta tem um refinamento localmente finito que é uma cobertura aberta do espaço. Um refinamento de uma cobertura aberta é uma cobertura aberta em que cada elemento da 1ª contém um elemento da 2ª. Uma cobertura aberta é **localmente finita** se cada ponto do espaço tem uma vizinhança com pontos em comum com apenas um nº finito de elementos da cobertura. Smirnov, Vladimir Ivanovich (1887-1974). Bing, R.H. (1914-1986). Nagata, Jun-iti (1925-). Stone, Arthur Harold (1916-2000).

¹⁹⁸No livro *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Em 1905 Oswald Veblen (1880-1960) afirmou que essa prova era insatisfatória e apresentou uma prova alternativa que a partir dessa data foi amplamente considerada como a 1ª prova correcta do resultado, mas em 2007 Thomas Hales (1958-) reabilitou a prova de C. Jordan (120 depois de apresentada) que é hoje considerada a 1ª prova correcta. O Teorema da Curva de Jordan é de tal modo fundamental que na 1ª metade do séc. XX foram apresentadas muitas provas alternativas e extensões por matemáticos proeminentes.

tida por C. Thomassen em 1992, conceptualmente elementar, embora longa, usando apenas compacidade e aspectos elementares de Grafos.

O apêndice termina com uma prova que toda superfície compacta e conexa é Triangularizável, o que é aplicado para provar o teorema de classificação de superfícies compactas conexas. A 1ª prova de que toda superfície compacta conexa é Triangularizável foi em 1925 por T. Radó e é a prova que aparece no livro L. Ahlfors e L. Sario listado na bibliografia final. Em 1992 C. Thomassen deu uma prova mais simples que se apresenta aqui. Conclui-se com uma prova do teorema de classificação de superfícies compactas conexas orientáveis baseada na existência de triangulações.

I.2 Espaços métricos

Chama-se **distância** num conjunto $X \neq \emptyset$ a $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ tal que:

$$1) d(x, y) = d(y, x), \quad 2) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad 3) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Chama-se **espaço métrico** a um conjunto $X \neq \emptyset$ com uma distância d , (X, d) , que se designa simplesmente por X se a distância está implícita. Um subconjunto $Y \neq \emptyset$ de um espaço métrico X também é espaço métrico com a mesma distância, e diz-se que Y é **subespaço métrico** de X .

Considera-se num espaço métrico a topologia com base definida pelas **bolas abertas** $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, com $x \in X$ e $r > 0$, a que se chama, resp., centro e raio da bola aberta, *i.e.* os **conjuntos abertos** são todas as possíveis uniões (finitas ou infinitas) destas bolas abertas. Chama-se **vizinhança** de um ponto $x \in X$ a qualquer conjunto aberto que o contém.

Os **conjuntos fechados** são os complementares de conjuntos abertos. Para $S \subset X$, chama-se **interior** de S à união de todos conjuntos abertos nele contidos, designado $\text{int } S$, **exterior** de S a $\text{ext } S = \text{int}(X \setminus S)$, **fecho** ou **aderência** de S a $\text{cl } S = X \setminus \text{ext } S$, **fronteira** de S a $\partial S = \text{cl } S \setminus \text{int } S$.

Para qualquer $S \subset X$, $\{\text{int } S, \partial S, \text{ext } S\}$ é uma partição de X , *i.e.* um conjunto de conjuntos disjuntos com união igual a X .

Diz-se que um **ponto** é **interior**, **exterior** ou **fronteiro** de um conjunto $S \subset X$ se pertence a, resp., $\text{int } S$, $\text{ext } S$, ∂S . Chama-se **ponto limite** ou **ponto de acumulação** de S a $x \in X$ tal que toda vizinhança tem pelo menos um outro ponto de S ; chama-se **ponto isolado** de S a um ponto de S que não é de acumulação.

Diz-se que S é **denso** em X se $\text{cl } S = X$. Diz-se que X é um **espaço separável** se tem um subconjunto numerável denso em X .

Como exemplos, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o conjunto numerável \mathbb{Q}^n é denso em \mathbb{R}^n com a distância usual neste espaço $d(x, y) = \|x - y\|$ com a norma do produto interno canónico em \mathbb{R}^n . Como \mathbb{C} com a distância $d(x, y) = |x - y|$ tem a mesma estrutura métrica de \mathbb{R}^2 , o conjunto numerável dos números complexos com partes reais e imaginárias racionais é denso em \mathbb{C} . Logo, \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, e \mathbb{C} com as distâncias usuais são espaços métricos separáveis.

Unões (numeráveis ou não) de conjuntos abertos são conjuntos abertos, pois dado um ponto numa união, pertence a um dos conjuntos e, como esse conjunto é aberto, contém uma vizinhança do ponto, que está incluída união dos conjuntos, que, assim, é um conjunto aberto. Considerando complementares, obtêm-se: intersecções (numeráveis ou não) de conjuntos fechados são conjuntos fechados.

Se $Y \subset X$, os conjuntos abertos do subespaço métrico Y de X são as intersecções de Y com os subconjuntos abertos de X , pelo que se diz que cada um destes conjuntos é um **conjunto aberto relativamente a Y** . Os conjuntos fechados de Y são os complementares em Y dos conjuntos abertos relativamente a Y , pelo que são as intersecções de Y com os subconjuntos fechados de X , e diz-se que cada um destes conjuntos é um **conjunto fechado relativamente a Y** .

Diz-se que uma sucessão $\{x_n\}$ num espaço métrico **converge** para um ponto x ou **tem limite x** se para toda vizinhança V de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n > N$. Diz-se que x é um **ponto limite da sucessão $\{x_n\}$** se para toda vizinhança V de x e todo $N \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V$ com $n > N$.

Um ponto de um espaço métrico é ponto limite de uma sucessão se e só se é limite de alguma subsucessão.

Uma sucessão $\{x_n\}$ num espaço métrico com distância d converge para ℓ se e só se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, \ell) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

I.3 Espaços completos

Diz-se que uma sucessão $\{x_n\}$ num espaço métrico é **Sucessão de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todos $m, n > N$ (ou seja, em termos da distância, a definição de Sucessão de Cauchy difere da de sucessão convergente, apenas por substituir a distância de termos da sucessão ao limite pela distância entre termos da sucessão). Diz-se que um espaço métrico é **completo** se todas Sucessões de Cauchy no espaço são convergentes.

Toda sucessão convergente num espaço métrico é Sucessão de Cauchy.

Toda sucessão de Cauchy é limitada.

Um subespaço de espaço métrico completo é completo se e só se é fechado.

(I.1) \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$, com a **distância usual** $d(x, y) = \|x - y\|$, em que para $x = (x_1, \dots, x_n)$, com, resp., $x_j \in \mathbb{R}$ ou $x_j \in \mathbb{C}$ e $\|x - y\| = (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2)^{1/2}$, são espaços métricos completos.

Dem. A verificação das condições de definição de distância é simples, pelo que se supõe conhecida ou fica como exercício. Como uma sucessão em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n é de Cauchy ou é convergente se e só se as sucessões das resp. componentes são, resp., de Cauchy ou convergentes, e como metricamente \mathbb{C} é idêntico a \mathbb{R}^2 , basta provar que \mathbb{R} é completo.

Seja $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ sucessão de Cauchy e $y_n = \inf\{x_j : j \geq n, j \in \mathbb{N}\}$. A sucessão $\{y_n\}$ é crescente (em sentido lato) e é limitada, pois como $\{x_n\}$ é sucessão de Cauchy, é limitada. Logo, o conjunto $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é majorado e, portanto, tem supremo $s \in \mathbb{R}$, pelo que $\lim y_n = s$. Como $\{x_n\}$ é sucessão de Cauchy, também $\lim x_n = s$. Logo, \mathbb{R} com a distância usual é espaço métrico completo. *Q.E.D.*

Um exemplo simples de espaço métrico não completo é \mathbb{Q} com a distância usual, pois a sucessão crescente $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ (em sentido lato) obtida truncando num n° crescente de casas decimais a representação decimal de $\sqrt{2}$ é uma sucessão Cauchy que não converge para qualquer ponto de \mathbb{Q} . O menor espaço métrico completo que contém \mathbb{Q} com a distância que restrita a \mathbb{Q} coincide com a considerada neste espaço é \mathbb{R} . Diz-se que \mathbb{R} é o espaço métrico que **completa** o espaço métrico \mathbb{Q} , e esta é a razão fundamental para estender os números racionais acrescentando-lhes os números irracionais, designadamente garantir que sucessões que têm tendência a convergir por serem sucessões de Cauchy têm limites no espaço considerado.

Pode-se provar que *todo espaço métrico não completo pode ser completado*, i.e. dado um espaço métrico (X, d) , existe um espaço métrico (\tilde{X}, \tilde{d}) tal que existe uma isometria f de (X, d) sobre $(f(X), \tilde{d})$ e $f(X)$ é denso em \tilde{X} (na distância \tilde{d}), por um processo geral que, quando aplicado a \mathbb{Q} com a distância usual dá um método de definir \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q} , alternativo a outras definições como a axiomática de corpo ordenado (como \mathbb{Q}) que satisfaz o axioma de todo subconjunto não vazio majorado ter supremo (o que o distingue de \mathbb{Q}).

Diz-se que uma função entre espaços métricos $f: X \rightarrow Y$ é **contínua num ponto** $x \in X$ se para toda vizinhança V de $f(x)$ em Y existe vizinhança U de x em X tal que $f(U) \subset V$. Diz-se que f é **contínua num conjunto** $S \subset X$ se é contínua em cada $x \in S$.

As condições seguintes são necessárias e suficientes para uma função entre espaços métricos $f: X \rightarrow Y$, com distâncias d em X e d' em Y , serem contínuas em X :

1. Para todo $x \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in X$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
2. Para todo $x \in X$ e toda sucessão $\{x_n\} \subset X$ convergente para x , a sucessão $\{f(x_n)\}$ converge para $f(x)$.
3. Preimagens de subconjuntos abertos de Y são subconjuntos abertos de X , em que a **preimagem** de $S \subset Y$ é $f^{-1}(S) = \{x \in X : f(x) \in S\}$.

Diz-se que uma função entre espaços métricos $f: X \rightarrow Y$, com distâncias d em X e d' em Y , é **uniformemente contínua** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e para todos $y, x \in X$ tais que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (ou seja as definições dadas de continuidade e de continuidade uniforme só diferem pelo quantificador “para todo $x \in X$ ” passar de 1º quantificador para último).

Uma função entre espaços métricos uniformemente contínua é contínua.

Exemplos simples de funções contínuas não uniformemente contínuas são $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = \frac{1}{t}$ e $g: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = t^2$.

Se f é uma função definida num conjunto X com valores reais, com \mathbb{R} considerado espaço métrico com a distância usual $(x, y) \mapsto |x - y|$, chama-se a **oscilação de f em $S \subset X$** a $\omega(f, S) = \sup_S f - \inf_S f$ (considera-se $\omega(f, S) = +\infty$ se $\sup_S f$ ou $\inf_S f$ não existe) e **oscilação de f em $x \in X$** por $\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, B_\delta(x))$.

Se X é espaço métrico e \mathbb{R} é considerado espaço métrico com a distância usual, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se e só se a oscilação de f em a é 0.

É útil dominar a propriedade importante seguinte de conjuntos de pontos de continuidade de funções com valores em \mathbb{R}^n or \mathbb{C}^n .

(I.2) *Se X é espaço métrico, \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}$, e \mathbb{K}^n é o espaço métrico com a distância usual, os possíveis conjuntos de pontos de continuidade de funções de X em \mathbb{K}^n são as intersecções numeráveis de subconjuntos abertos de X que contêm todos os pontos isolados de X .*

Dem. É válido em geral se o é para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 1$; logo, considera-se este caso. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. É claro que f é contínua nos pontos isolados de X .

Para $\varepsilon > 0$ designa-se $C_\varepsilon = \{x \in X : \omega(f, x) < \varepsilon\}$. O conjunto de pontos de continuidade de f é $C_0 = \{x \in X : \omega(f, x) = 0\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_{\frac{1}{k}}$. Se $x \in C_k$, é $\omega(f, x) < \frac{1}{k}$ e, portanto, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, B_\delta(x)) < \frac{1}{k}$, pelo que existe $\delta_k > 0$ tal que $\omega(f, B_{\delta_k}(x)) < \frac{1}{k}$. Logo, $y \in B_{\delta_k}(x)$ implica $\omega(f, y) < \frac{1}{k}$ e, portanto, $y \in C_k$, o que prova que cada C_k é um conjunto aberto.

Reciprocamente, seja $I \subset X$ o conjunto de pontos isolados de X e $G \subset X$ intersecção numerável de subconjuntos abertos de X com $I \subset G$. É $X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ com os conjuntos F_n fechados. Define-se $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \sum_{j \in J} \frac{1}{2^j}$ para $x \in X \setminus G$, em que $J = \{n \in \mathbb{N} : x \in F_n\}$, e $g(x) = 0$ para $x \in G$. Se $a \in G$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, pelo que g é contínua em G . Se S_1, S_2, \dots, S_k são subconjuntos disjuntos $X \setminus I$ máximos tais que $d(x, y) \geq \frac{1}{j}$ para todos $x, y \in S_j$, então $(X \setminus I) \setminus \bigcup_{j=1}^k S_j$ é não vazio, pois $X \setminus I$ não tem pontos isolados, e existe S_{k+1} disjunto de S_1, S_2, \dots, S_k que é um subconjunto máximo de $X \setminus I$ tal que $d(x, y) \geq \frac{1}{k+1}$ para todos $x, y \in S_{k+1}$. Logo, existe sucessão $\{S_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos de $X \setminus I$ tais que $d(x, y) \geq \frac{1}{j}$ para todos $x, y \in S_j$. Os conjuntos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{2n}$ e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{2n-1}$ são disjuntos e densos em $X \setminus I$. Define-se a função $f: X \setminus I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)(\chi_A(x) - \frac{1}{2})$, em que χ_A é a função igual a 1 em A e a 0 fora de A . Cada vizinhança de um ponto $x \in \text{int}((X \setminus I) \setminus G)$ contém pontos y em que os sinais de $f(x)$ e $f(y)$ são diferentes. Se $x \in \partial G \cap ((X \setminus I) \setminus G)$, então $f(x) \neq 0$ e toda vizinhança de x contém um ponto $y \in X \setminus I$ com $f(y) = 0$. Logo, f não é contínua em pontos de $(X \setminus I) \setminus G$. A extensão de f a X com valores arbitrários nos pontos de

I é função de X em \mathbb{R} contínua em I , pelo que com conjunto de pontos de continuidade desta extensão é G . *Q.E.D.*

Segue-se um teorema importante e útil em espaços métricos completos¹⁹⁹.

(I.3) *Se X é um espaço métrico completo, intersecções numeráveis de abertos densos em X são densas em X .*

Dem. Seja $\{U_j\}$ um conjunto numerável de conjuntos abertos densos em X , B_R uma qualquer bola aberta de X e $b \in B_R$. Com subdivisões sucessivas de raios de bolas para menos de metade do raio da bola precedente obtém-se uma sucessão de bolas abertas $\{B_{r_n}\}$ com $0 < r_{j+1} < \frac{r_j}{2}$ para $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_R \supset (\text{cl } B_{r_1}) \cap U_1 \supset \text{cl } B_{r_2} \supset (\text{cl } B_{r_2}) \cap U_2 \supset \text{cl } B_{r_3} \supset \dots,$$

pois dada a bola B_{r_n} do passo n , como U_n é denso em X , é $(\text{cl } B_{r_n}) \cap U_n \neq \emptyset$ e, portanto, existe $b_n \in (\text{cl } B_{r_n}) \cap U_n \subset \text{cl } B_R$. Como $B_{r_n} \cap U_n$ é aberto, existe uma bola $B_{r_{n+1}}$ com raio $r_{n+1} \in]0, \frac{r_n}{2}[$ tal que

$$\text{cl } B_{r_{n+1}} \subset B_{r_n} \cap U_n \subset (\text{cl } B_{r_n}) \cap U_n.$$

$\{b_n\}$ é Sucessão de Cauchy e, como X é espaço métrico completo, converge para algum $b \in X$. Como para $n > m$ é $b_n \in \text{cl } B_{r_m}$ e este conjunto é fechado, $b \in \bigcap_{m=2}^{\infty} \text{cl } B_{r_m} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} (\text{cl } B_{r_m}) \cap U_m$. Este conjunto é simultaneamente subconjunto de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ e de B_R , pelo que $b \in B_R \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Logo, toda bola de X tem pontos de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. *Q.E.D.*

O resultado não vale em geral em espaço métricos não completos, como se pode ver com \mathbb{Q} com a distância usual. Se $\{q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma enumeração de \mathbb{Q} , como este é subconjunto aberto do espaço e o conjunto $\{q_j\}$ só com um dos elementos de \mathbb{Q} é fechado, cada $U_j = \mathbb{Q} \setminus \{q_j\}$ é subconjunto aberto do espaço. Como $\text{cl } U_j = \mathbb{Q}$, cada U_j é denso no espaço. Logo, $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j$ é união numerável de subconjuntos abertos densos do espaço, e, como está contido em cada U_j , não contém qualquer dos elementos de \mathbb{Q} , pelo que é o conjunto vazio, que não é denso no espaço.

O argumento do parágrafo precedente pode ser aplicado para provar que qualquer subconjunto Q numerável e denso de um espaço métrico completo X não é intersecção numerável de subconjuntos abertos de X . Portanto, de (I.2), um tal conjunto Q não pode ser o conjunto dos pontos de continuidade de uma função $f : X \rightarrow Y$, em que Y é o espaço métrico \mathbb{K}^n com \mathbb{K} igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} e $n \in \mathbb{N}$. Em particular não há funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas nos números racionais e descontínuas nos irracionais. Mas, também de (I.2), há funções contínuas nos números irracionais e descontínuas nos racionais, pois $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus \{q_j\})$ com $\{q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de \mathbb{Q} é uma união numerável de conjuntos abertos densos em \mathbb{R} ; um exemplo é $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

¹⁹⁹ Foi provado em 1899 por R.-L. Baire em \mathbb{R}^n a propósito de conjuntos de pontos de continuidade de funções de duas variáveis reais com valores reais contínuas separadamente em cada uma das variáveis, e tinha sido provado em \mathbb{R} por William Osgood (1864-1943) em 1897, a propósito da troca de limite com integral. A prova para espaços métricos completos foi em 1914 por F. Hausdorff.

com $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = \frac{1}{q}$ para x racional com $x = \frac{p}{q}$ e $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ relativamente primos; é óbvio que f é descontínua nos números racionais; prova-se que é contínua em cada x irracional notando que se $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow x$ com $n \in \mathbb{N}$, e $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}$ são relativamente primos, então $q_n \rightarrow \infty$ e $f(\frac{p_n}{q_n}) = \frac{1}{q_n} \rightarrow 0$.

Se X é um espaço métrico, diz-se que $S \subset X$ é um **conjunto Magro**²⁰⁰ ou **de 1ª categoria de Baire** em X se é união numerável de conjuntos com fechos com interiores vazios; caso contrário, diz-se que S é um **conjunto Gordo** ou **de 2ª categoria de Baire** em X .

Com esta terminologia, o Teorema de Baire pode ser enunciado:

(I.4) **Teorema de Baire:** *Um espaço métrico completo é Gordo nele próprio.*

Dem. A afirmação é, em essência, a de (I.3) por outras palavras, pois decorre simplesmente de aplicação das Leis de de Morgan. Se X fosse espaço métrico completo Magro em X , seria $X = \cup_{j \in \mathbb{N}} V_j$ com $\text{int } \text{cl } V_j = \emptyset$, pelo que $\cap_{j \in \mathbb{N}} (X \setminus \text{cl } V_j)$ seria intersecção numerável de abertos densos em X e, de (I.3), seria densa em X . Das Leis de de Morgan,

$$\cap_{j \in \mathbb{N}} (X \setminus \text{cl } V_j) = X \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}} \text{cl } V_j \subset X \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}} V_j = X \setminus X = \emptyset,$$

em contradição com ser denso em X . Logo, X é Gordo em X . *Q.E.D.*

Espaços métricos completos têm as seguintes propriedades importante.

(I.5) *Num espaço métrico completo X :*

1. *Subconjuntos numeráveis são Magros em X .*
2. *Complementares de conjuntos Magros são densos e Gordos em X .*
3. *Subconjuntos fechados $\neq \emptyset$ sem pontos isolados são inumeráveis.*

Dem. Todo conjunto numerável U é união numerável dos conjuntos que só têm cada um dos seus pontos, cada um conjunto fechado (por ser o complementar de um fechado num aberto) com interior vazio (por não conter qualquer bola). Logo, U é Magro.

Se R é o complementar de um conjunto Magro²⁰¹ em X , então $X \setminus R = \cup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ com $\text{int } \text{cl } U_j = \emptyset$, e, das Leis de De Morgan, $R = \cap_{j \in \mathbb{N}} (X \setminus U_j) \supset \cap_{j \in \mathbb{N}} (X \setminus \text{cl } U_j)$, que é intersecção numerável de conjuntos abertos densos em X , pelo que, de (I.3), é conjunto denso em X . Se R fosse Magro, como $X \setminus R$ é Magro, $X = R \cup (X \setminus R)$ seria Magro, em contradição com (I.4); logo, R é Gordo.

²⁰⁰ Em inglês diz-se *meager*. A noção de Categoria de Baire deve-se a R.-L. Baire em 1899.

²⁰¹ Ao complementar de um conjunto Magro num espaço chama-se **conjunto Residual**. Diz-se que uma propriedade é **Genérica** num espaço se vale num subconjunto Residual do espaço. Um conjunto Residual num espaço métrico completo é denso e Gordo no espaço, mas um subconjunto denso do espaço pode ser Gordo (e.g. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em \mathbb{R}) ou Magro (e.g. \mathbb{Q} em \mathbb{R}). Logo, a propriedade de um conjunto ser Residual é mais forte do que ser denso.

Se $S \neq \emptyset$ é subconjunto fechado do espaço métrico completo X , é subespaço métrico de X completo. Se S fosse numerável, com $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, cada $S \setminus \{x_j\}$ seria aberto e, como cada x_j não é ponto isolado de X , seria denso. Do Teorema de Baire, $\bigcap_{j=1}^{\infty} (S \setminus \{x_j\})$ seria Gordo em S , em contradição com esta intersecção ser \emptyset . Logo, S não é numerável. *Q.E.D.*

Uma consequência imediata deste resultado é que *bolas (fechadas ou abertas) de um espaço métrico completo X são conjuntos inumeráveis Gordos em X* , porque bolas fechadas são subconjuntos fechados não vazios sem pontos isolados e toda bola contém uma bola fechada, e, portanto são inumeráveis, e os complementares de bolas não são densos em X , pelo que as bolas não são Magros em X . Em particular, obtém-se uma prova que $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ não são numeráveis.

Uma outra consequência é que *todo subespaço métrico numerável de um espaço métrico X não é completo, e, portanto, não é fechado em X* .

Do capítulo 1, \mathbb{C} é espaço métrico com a distância entre dois pontos dada pelo valor absoluto da diferença dos pontos e, portanto, com a topologia definida com base nos círculos abertos na métrica considerada. O espaço \mathbb{C} é separável, nomeadamente o conjunto dos pontos com partes real e imaginária racionais é numerável e denso em \mathbb{C} .

Os espaços lineares normados são espaços métricos com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$, que designa a norma do vector $x - y$. Há espaços lineares métricos que não são normados, *e.g.* \mathbb{R}^2 com a distância

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|},$$

pois $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}$ não satisfaz a homogeneidade positiva de normas (*e.g.* $\|t(1, 0)\| = \sqrt{|t|} \|(1, 0)\|$ e $\sqrt{|t|} \neq |t|$ para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$). Um espaço linear real ou complexo métrico (X, d) é normado se e só se

$$d(tx, ty) = |t| d(x, y), \quad d(x+z, y+z) = d(x, y), \quad x, y \in X, t \in \mathbb{K},$$

em que \mathbb{K} é o corpo dos escalares do espaço linear X (em caso afirmativo a norma é $\|x\| = d(x, 0)$). Há espaços métricos que não são espaços lineares, *e.g.* qualquer $X \neq \emptyset$ com $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, e $d(x, y) = 0$ se $x = y$ é um espaço métrico com distância d .

I.4 Espaços compactos

Seja (X, d) um espaço métrico.

Chama-se **cobertura** de um subconjunto S de um espaço um conjunto de subconjuntos do espaço cuja união contém S .

Diz-se que $K \subset X$ é um **conjunto compacto** se para toda cobertura aberta de K existe uma subcobertura finita²⁰² de K . Considerando K como subespaço métrico de X , a condição anterior verifica-se ou não independentemente de se considerarem conjuntos abertos de X ou conjuntos abertos do

²⁰²Esta condição é conhecida por **Propriedade de Heine-Borel**.

subespaço métrico K (ou seja conjuntos abertos relativamente a K). Por isso, se K é conjunto compacto, também se diz que é **espaço compacto**.

A noção de compacidade de um conjunto só envolve topologia e relaciona-se com a de conjunto fechado pelos dois resultados seguintes.

(I.6) *Subconjuntos fechados de conjuntos compactos são compactos.*

Dem. Se K é um conjunto compacto, $F \subset K$ é fechado e \mathcal{U} é uma cobertura aberta de F , então $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta de K , pelo que existe uma subcobertura aberta finita de K , que também é cobertura aberta de F . Se esta cobertura contém $X \setminus F$, a família obtida retirando-lhe este conjunto é uma cobertura aberta de F , pelo que \mathcal{U} tem uma subcobertura finita de F e, em consequência, F é compacto. *Q.E.D.*

Um subconjunto de um espaço métrico é **limitado** se existe uma bola aberta que o contém, e é **totalmente limitado** se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura do conjunto por um n.º finito de bolas abertas com raio ε .

Um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico é limitado.

Chama-se **diâmetro** de um subconjunto S de um espaço métrico ao supremo das distâncias entre pares de pontos de S se este for finito, ou em caso contrário a $+\infty$.

Subconjuntos limitados de um espaço métrico são os com diâmetro finito.

(I.7) *Subconjuntos compactos de um espaço métrico são limitados e fechados.*

Dem. Seja K subconjunto compacto de um espaço métrico X . $\{B_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é cobertura aberta de X ; logo, também de K . Portanto, existe subcobertura finita de K , $\{B_{n_j}(0)\}_{j=1}^N$ com $N \in \mathbb{N}$. Se $R = \max\{n_j : j = 1, \dots, N\}$, $K \subset B_R(0)$; logo, K é limitado.

Se $x \in \partial K \setminus K$, $\{\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é cobertura aberta de $X \setminus \{x\}$; logo, também de K . Portanto, existe subcobertura finita de K , $\{\mathbb{C} \setminus \text{cl } B_{1/n_j}(x)\}_{j=1}^N$ com $N \in \mathbb{N}$. Se $R = \max\{n_j : j \in \{1, \dots, N\}\}$, $K \subset \{\mathbb{C} \setminus B_{1/R}(x)\}$, e $x \notin \partial K$, em contradição com o suposto. Logo, $\partial K \subset K$ e K é fechado. *Q.E.D.*

Em geral, o recíproco é falso, como é exemplo o espaço métrico limitado e fechado $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ com a distância usual $d(x, y) = |x - y|$, pois $\text{int } X = \emptyset$, $\partial X = X$, e se $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma enumeração dos elementos de X , então $\{]q_j - 2^{-(j+2)}, q_j + 2^{-(j+2)}[_{j=1}^{\infty}$ é cobertura aberta de X e qualquer subfamília finita é um conjunto de intervalos com soma de comprimentos $< \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+1)} = \frac{2^{-2}}{1-2^{-1}} = \frac{1}{2}$ e como a soma dos comprimentos dos intervalos de qualquer cobertura finita de X por intervalos abertos tem de ser > 1 , a cobertura aberta considerada não tem subcobertura finita e, portanto, X não é compacto, embora seja limitado e fechado.

Contudo, tem-se a caracterização de conjuntos compactos em espaços métricos com a condição mais forte de conjunto totalmente limitado seguinte.

(I.8) *Um subespaço de um espaço métrico é compacto se e só se é completo e totalmente limitado.*

Dem. 1) Necessidade. Como o conjunto das bolas abertas com raio $\varepsilon > 0$ qualquer centradas em cada ponto de um espaço métrico X é uma cobertura aberta de X , se $K \subset X$ é compacto, existe uma subcobertura finita de K , pelo que K é totalmente limitado. Se $\{x_n\} \subset K$ é Sucessão de Cauchy e $y \in K$ não é o limite de $\{x_n\}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x_n, y) > \varepsilon$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Como $d(x_m, y) \geq d(x_n, y) - d(x_m, x_n)$, tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m, n > N$ e escolhendo $n > N$ tal que $d(x_n, y) > \varepsilon$, é $d(x_m, y) > \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m > N$, pelo que a bola aberta $B_{\varepsilon/2}(y)$ contém um n.º finito de termos de $\{x_n\}$. Se $\{x_n\}$ não fosse convergente, a família dos conjuntos abertos com um n.º finito de termos da sucessão seria uma cobertura aberta de K e existiria uma subcobertura finita de K . Cada elemento desta subcobertura teria um n.º finito de termos de $\{x_n\}$, pelo que K também teria um n.º finito de termos de $\{x_n\}$, em contradição com ser uma sucessão em K . Logo, $\{x_n\}$ é convergente. Portanto, toda Sucessão de Cauchy em K converge para um ponto, que pertence a K porque, do penúltimo resultado anterior, K é fechado, e, portanto, é um subespaço métrico completo de X .

2) Suficiência. Seja X um espaço métrico e $K \subset X$ totalmente limitado e completo. Prova-se por absurdo, com sucessivas divisões ao meio dos raios de bolas de coberturas. Assim, supõe-se que existe uma cobertura aberta \mathcal{U} de K sem qualquer subcobertura finita de K . Como K é totalmente limitado, há uma cobertura finita com elementos que são bolas abertas com centros em pontos de K todas com raio $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Se a cobertura \mathcal{U} tivesse alguma subcobertura finita para cada uma destas bolas abertas, existiria uma subcobertura aberta finita de K e, como se supõe que tal não é o caso, não existiria subcobertura finita de \mathcal{U} que cobrisse alguma das bolas abertas de raio ε_1 consideradas, designada $B_{\varepsilon_1}(k_1)$. O conjunto $K \cap B_{\varepsilon_1}(k_1)$ é totalmente limitado, pelo que o argumento anterior garante que existiria $B_{\varepsilon_2}(k_2)$ com $k_2 \in K$ tal que não existiria subcobertura finita de \mathcal{U} que cobrisse alguma das bolas abertas com raio ε_2 consideradas. Procedendo assim sucessivamente, obter-se-ia uma sucessão $\{k_n\}$ tal que não existiria subcobertura finita de \mathcal{U} que cobrisse $B_{\varepsilon_n}(k_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$d(k_n, k_{n+p}) < \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon_{n+j} = \sum_{j=0}^{p-1} 2^{-(n+j)} < \frac{2^{-n}}{1-2^{-1}} = 2^{1-n}, \quad p \in \mathbb{N},$$

$\{k_n\}$ seria Sucessão de Cauchy, que, como K é completo, convergiria para algum $k \in K$ pertencente a algum elemento $U \in \mathcal{U}$. Como U é aberto, existiria $\delta > 0$ tal que $B_\delta(k) \subset U$. Para n grande seria $d(k_n, k) < \frac{\delta}{2}$ e $\varepsilon_n < \frac{\delta}{2}$, pelo que $B_{\varepsilon_n}(k_n) \subset B_\delta(k) \subset U$. Logo, $\{U\} \subset \mathcal{U}$ seria uma subcobertura finita de $B_{\varepsilon_n}(k_n)$, o que contradiz o que se supõe. Logo, K satisfaz a Propriedade de Heine-Borel e, portanto, é compacto. Q.E.D.

Um exemplo simples de um espaço métrico limitado e não totalmente limitado é $X = (\mathbb{R}, d')$ com $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ e $d(x, y) = |x - y|$ a distância usual, pois $d' \leq 1$ e, portanto, X é limitado, mas não é totalmente limitado porque um intervalo de comprimento $\varepsilon > 0$ na distância d' tem comprimento $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ na distância d e não é possível cobrir \mathbb{R} com um n.º finito de intervalos com este comprimento na distância usual d , e, portanto, também não com um n.º finito de intervalos com comprimento ε na distância d' . Devido à relação entre as distâncias d' e d , as sucessões de Cauchy do espaço métrico \mathbb{R} com a distância d' são as mesmas do espaço métrico \mathbb{R} com a distância usual d , e também as sucessões convergentes em cada um destes espaços são as mesmas; logo, $X = (\mathbb{R}, d')$ é espaço métrico completo. Portanto, $X = (\mathbb{R}, d')$ é um espaço métrico limitado, mas não totalmente limitado. pelo que, de (I.8), não é compacto. É um outro exemplo de um subconjunto de um espaço métrico que limitado e fechado, mas não é compacto, e agora num espaço métrico completo.

Contudo, em \mathbb{R}^n (logo, também em \mathbb{C}^n), para $n \in \mathbb{N}$, com a distância usual $d(x, y) = \|x - y\|$, os subconjuntos compactos são precisamente os que são limitados e fechados.

(I.9) $K \subset \mathbb{R}^n$ ou $K \subset \mathbb{C}^n$ é compacto se e só se é limitado e fechado.

Dem. \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n são espaços métricos e, de um ponto de vista métrico, \mathbb{C}^n é idêntico a \mathbb{R}^{2n} , pelo que basta provar o resultado para \mathbb{R}^n .

1) *Necessidade.* Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, de (I.7), é limitado e fechado.

2) *Suficiência.* Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e fechado, como, de (I.1), \mathbb{R}^n é espaço métrico completo, do que se referiu mesmo antes desse resultado, K é espaço métrico completo; logo, de (I.8), para provar que K é compacto basta provar que é totalmente limitado. Isto é trivial se $n = 1$, pois existe $R > 0$ tal que $K \subset [-R, R]$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ este intervalo pode ser coberto por um n.º finito de intervalos abertos com comprimento 2ε . Se $n > 1$, existe $R > 0$ tal que $K \subset [-R, R]^n$; como $[-R, R]$ é totalmente limitado, existe cobertura finita de K por conjuntos abertos I^n com $I \subset \mathbb{R}$ intervalos com comprimento 2ε ; cada I^n está contido numa bola aberta de \mathbb{R}^n com raio $\sqrt{n}\varepsilon$; logo, existe cobertura finita de K por bolas abertas com raio $\varepsilon > 0$ e, como é arbitrário, K é totalmente limitado. *Q.E.D.*

Obtém-se a seguir uma caracterização de subconjuntos compactos de espaços métricos pela existência de subsucessão convergente de qualquer sucessão no subconjunto para um ponto desse subconjunto.

(I.10) *Um subconjunto infinito de um compacto K tem ponto limite em K .*

Dem. Se K é compacto e $S \subset K$ é infinito sem qualquer ponto limite em K , cada $k \in K$ teria uma vizinhança com, no máximo, 1 ponto de S . Como K é compacto existiria uma subcobertura finita de K e S seria finito, o que é contraditório. Logo, K tem pelo menos um ponto limite de S . *Q.E.D.*

Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico tem a **Propriedade de Bolzano-Weierstrass** se toda sucessão em S tem pelo menos um ponto limite em S . Como x é ponto limite de uma sucessão se e só se alguma subsucessão converge para x , a propriedade de Bolzano-Weierstrass equivale a toda sucessão em S ter alguma subsucessão convergente para um ponto de S , pelo que se diz que S é **sequencialmente compacto**²⁰³.

(I.11) **Teorema de Bolzano-Weierstrass:** *Um subconjunto de um espaço métrico é compacto se e só se é sequencialmente compacto.*

Dem. 1) *Necessidade.* De (I.10), qualquer sucessão num conjunto compacto K com termos que assumem infinitos valores tem um ponto limite em K . Caso contrário, pelo menos um ponto de K é assumido em infinitos termos da sucessão, pelo que é um ponto limite da sucessão.

2) *Suficiência.* Se K é subconjunto de um espaço métrico com a Propriedade de Bolzano-Weierstrass, como toda Sucessão de Cauchy com um ponto limite em K converge para esse ponto, K é completo. Se K não é totalmente limitado, existe $\varepsilon > 0$ tal que não há qualquer cobertura finita de K com bolas abertas com raio $\varepsilon > 0$. Constrói-se uma sucessão $\{x_n\} \subset K$ escolhendo $x_1 \in K$ arbitrário e, sucessivamente, $x_{n+1} \in K \setminus \cup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$. Como $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ para $m, n \in \mathbb{N}$, nenhuma subsucessão de $\{x_n\}$ converge, em contradição com a Propriedade de Bolzano-Weierstrass. Logo, se K tem esta propriedade, é totalmente limitado, e, de (I.8), é compacto. *Q.E.D.*

Seguem-se resultados para funções contínuas em conjuntos compactos.

(I.12) *Se f é função contínua num espaço K compacto, $f(K)$ é compacto.*

Dem. Se \mathcal{U} é uma cobertura aberta de $f(K)$, $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ é uma cobertura aberta de K , pelo que existe uma subcobertura finita de K , e o conjunto das imagens dos elementos desta cobertura é uma subcobertura finita de $f(K)$ com elementos de \mathcal{U} . Logo, para toda cobertura aberta $f(K)$ existe uma subcobertura finita de $f(K)$, e $f(K)$ é compacto. *Q.E.D.*

(I.13) **Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas:** *Uma função com valores reais contínua num espaço compacto $K \neq \emptyset$ assume máximo e mínimo em K .*

Dem. De (I.12), se f é contínua num compacto K e $f(K) \subset \mathbb{R}$, $f(K)$ é compacto e, de (I.9), é um subconjunto limitado e fechado de \mathbb{R} , pelo que tem supremo e ínfimo em \mathbb{R} , que pertencem a $f(K)$ pois este conjunto é fechado, e, portanto, são, resp., máximo e mínimo de f em K . *Q.E.D.*

²⁰³Os teoremas de Arzelà-Ascoli e de Montel do capítulo 10 caracterizam pela Propriedade de Bolzano-Weierstrass a compacidade de espaços de funções, resp., contínuas e Holomorfas na métrica correspondente à convergência uniforme em conjuntos compactos.

(I.14) *Funções contínuas injectivas de um conjunto compacto não vazio num espaço métrico são Homeomorfismos.*

Dem. Se K é conjunto compacto, f é função injectiva contínua que transforma K num subconjunto de um espaço métrico e $F \subset K$ é fechado, de (I.7) F é compacto, de (I.12), $f(F)$ também é compacto, e, de (I.7) é fechado. Logo, f transforma conjuntos fechados em conjuntos fechados, pelo que, como f é injectiva, preimagens de conjuntos fechados por f^{-1} são conjuntos fechados, e, portanto, f^{-1} é contínua, e f é um Homeomorfismo. *Q.E.D.*

(I.15) **Teorema de Heine-Cantor:** *Funções contínuas de um espaço métrico compacto num espaço métrico são uniformemente contínuas.*

Dem. Se (K, d) é um espaço métrico compacto, f é uma função contínua de K num espaço métrico (Y, d') , e $\varepsilon > 0$, para cada $k \in K$ existe $\rho_k > 0$ tal que $f(B_{\rho_k}(k)) \subset B_\varepsilon(f(k))$, pelo que $\mathcal{U} = \{B_{\rho_k/2}(k) : k \in K\}$ é uma cobertura aberta de K , e, portanto, existe uma subcobertura finita de K . Se $\delta > 0$ é o menor dos raios das bolas em tal subcobertura finita de K , para todo $x, y \in K$ com $d(x, y) < \delta$ existe uma bola aberta na subcobertura finita considerada com centro num ponto $z \in K$ e raio $\frac{\rho_z}{2}$ tal que $d(x, z) < \frac{\rho_z}{2}$. Logo, $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \delta + \frac{\rho_z}{2} \leq \rho_z$. Portanto, $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$ e $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$, pelo que $d'(f(x), f(y)) < 2\varepsilon$. Conclui-se que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in K, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, pelo que f é uniformemente contínua em K . *Q.E.D.*

Seguem-se duas propriedades importantes de conjuntos compactos.

(I.16) **Teorema de Intersecção de Cantor:**

Se $\{K_n\}$ é sucessão de conjuntos compactos não vazios com $K_n \supset K_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não vazio e compacto.

Dem. Se fosse $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, a sucessão $\{U_j\}$ em que cada U_j é o complementar de K_j , $j \in \mathbb{N}$, seria uma cobertura aberta de K_1 , pelo que existiria uma subcobertura aberta finita $\{U_{j_1}, \dots, U_{j_N}\}$ de K_1 e o conjunto desta subcobertura com maior índice conteria os outros, e existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_j \subset K_1 \subset U_n$ para todo $j \in \mathbb{N}$, o que é contraditório porque U_n não contém os pontos de $K_n \neq \emptyset$. Logo, $S \neq \emptyset$. De (I.7), os conjuntos K_2, K_3, \dots são fechados e, portanto, $S = \bigcap_{n=2}^{\infty} K_n$ é fechado, logo compacto. *Q.E.D.*

(I.17) **Lema de Lebesgue:** *Para toda cobertura aberta de um subconjunto compacto K de um espaço métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que todo subconjunto de K com diâmetro $< \varepsilon$ está contido num elemento da cobertura.*

Dem. Caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $S_n \subset K$ de diâmetro inferior a $\frac{1}{n}$ não contido em nenhum dos elementos da cobertura. $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ é

infinito, pois se não fosse, para $\frac{1}{n}$ menor do que a distância mínima entre pontos de S , cada S_n teria quanto muito um ponto e, em consequência, estaria contido num elemento da cobertura. De (I.10), S tem pelo menos um ponto limite $p \in K$, que pertence a algum elemento U da cobertura. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset U$. Logo, para infinitos números naturais $n > \frac{2}{r}$ é $S_n \cap B_{\frac{r}{2}}(p) \neq \emptyset$ e, portanto, $S_n \subset B_r(p) \subset U$, em contradição com as especificações para escolha dos conjuntos S_n . *Q.E.D.*

A **distância de subconjuntos** de um espaço métrico X com distância d é $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ para $A, B \subset X$.

A distância de conjuntos fechados disjuntos pode ser 0, *e.g.* dos gráficos das funções reais $\frac{1}{x}$ e 0, mas se um é compacto, a distância não pode ser 0:

(I.18) *Se K e F são subconjuntos disjuntos não vazios, resp., compacto e fechado de um espaço métrico com distância d , então $d(K, F) > 0$.*

Dem. Define-se em K a função f por $f(x) = d(\{x\}, F)$, que é > 0 porque x não pertence a $F = \text{cl } F$. Para cada $x, y \in K$ e $\varepsilon > 0$ existe $a \in F$ tal que $d(\{x\}, a) \leq d(\{x\}, F) + \varepsilon$. Logo,

$$d(\{y\}, F) - d(\{x\}, F) \leq d(y, a) - d(x, a) + \varepsilon \leq d(y, x) + \varepsilon,$$

em que a última desigualdade se deve à Desigualdade Triangular. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $f(y) - f(x) \leq d(y, x)$. Trocando x com y , $|f(y) - f(x)| \leq d(y, x)$ para $x, y \in K$. Logo, $f: K \rightarrow]0, +\infty[$ é contínua e, do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, assume um valor mínimo m em K , pelo que $d(K, F) = m > 0$. *Q.E.D.*

O resultado seguinte é uma aplicação de compacidade que é utilizada no capítulo 13 na prova de (??).

(I.19) *Se K é um espaço métrico compacto com distância d e $h: K \rightarrow K$ é um Homeomorfismo expansivo no sentido de existirem $\varepsilon > 0$ e $C > 1$ tais que $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(h(x), h(y)) \geq Cd(x, y)$, então K é finito.*

Dem. De (I.12), $h(K)$ é compacto. Como h^{-1} é uma função contínua de $h(K)$ em K , de (I.15), h^{-1} é uniformemente contínua, pelo existe $\delta > 0$ tal que $d(h(x), h(y)) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$. Da hipótese de h ser expansivo, $d(x, y) \leq \frac{1}{C} d(h(x), h(y)) < \delta$. A cobertura aberta $\{B_\delta(x)\}_{x \in K}$ tem uma subcobertura finita $\{B_\delta(x_j)\}_{j=1, \dots, N}$ com $N \in \mathbb{N}$ e $\{h^{-n}(B_\delta(x_j))\}_{j=1, \dots, N}$ é uma cobertura finita de K por conjuntos com diâmetros $\leq \frac{\delta}{C^n}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, pelo que K é um conjunto finito. *Q.E.D.*

Se (X, d) é um espaço métrico, chama-se **distância de Hausdorff** no conjunto $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ dos subconjuntos não vazios de X a

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\}, \quad A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Em geral, a “distância de Hausdorff” não é uma distância, *e.g.* se X é ilimitado, $d_H(A, B)$ é infinito se um dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ é limitado e ou outro ilimitado. Contudo, se (X, d) é um espaço métrico e \mathcal{K} é o conjunto dos subconjuntos compactos de X não vazios, (\mathcal{K}, d_H) é um espaço métrico com a distância de Hausdorff, o que fica como exercício.

I.5 Espaços conexos

Seja (X, d) um espaço métrico.

Como se pretende definir subconjunto desconexo de um espaço com topologia (em termos de conjuntos abertos), é natural considerar um conjunto desconexo se pode ser separado em dois subconjuntos disjuntos não vazios, cada um separado do outro por estar incluído num conjunto aberto do espaço que não contém pontos do outro, e é natural considerar um conjunto conexo se não é desconexo, adoptam-se as definições seguintes.

Diz-se que $S \subset X$ é **conexo** se não é união de dois conjuntos não vazios, disjuntos e abertos relativamente a S (como um subconjunto de S é aberto se e só se o seu complementar em S é fechado, nesta definição pode-se substituir abertos por fechados); diz-se que é **desconexo** se não é conexo. Se S é desconexo, chama-se **separação** de S a qualquer partição de S em dois subconjuntos abertos (ou dois subconjuntos fechados) relativamente a S .

Considerando S como subespaço métrico de X , a condição anterior verifica-se ou não independentemente de se considerarem conjuntos abertos de X ou do subespaço S (*i.e.* conjuntos abertos relativamente a S). Por isso pode-se considerar um conjunto conexo como um **espaço conexo**.

(I.20) *Um conjunto S é conexo se e só se os seus únicos subconjuntos abertos e fechados relativamente a S são S e \emptyset . Se S é desconexo, os subconjuntos abertos e fechados relativamente a S , são S , \emptyset e os conjuntos $A \subset S$ tais que $\{A, S \setminus A\}$ é uma separação de S .*

Dem. $A \subset S$ é um subconjunto aberto e fechado relativamente a S se e só se $S \setminus A$ também é. Como $S = A \cup (S \setminus A)$, S é conexo se e só se $A = \emptyset$ ou $A \setminus S = \emptyset$; a última igualdade é equivalente a $A = S$. *Q.E.D.*

Diz-se que $S \subset X$ é conjunto **conexo por caminhos** se para cada par de pontos de S existe um caminho em S com extremidades nesses pontos.

A noção de conjunto conexo tem ligações importantes a continuidade de funções, como é evidenciado no resultado seguinte.

(I.21) *Funções contínuas têm as propriedades:*

1. *Transformam conjuntos conexos em conjuntos conexos.*
2. *Um conjunto não vazio é conexo se e só se as funções contínuas desse conjunto em $\{0, 1\}$ são constantes.*

Dem. 1) Se f é uma função contínua definida num conjunto conexo S e $f(S)$ fosse desconexo, existiriam conjuntos A, B não vazios, disjuntos e abertos relativamente a $f(S)$ tais que $f(S) = A \cup B$. Como preimagens de conjuntos abertos por uma função contínua são abertos relativamente ao domínio da função, seria $S = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ com $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ não vazios, disjuntos e abertos relativamente a S , em contradição com S ser conexo.

2) Se S é desconexo, existem $A, B \subset S$ não vazios, disjuntos, abertos relativamente a S e tais que $S = A \cup B$. Define-se $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ igual a 0 em pontos de A e a 1 em pontos de B . Como preimagens por esta função de subconjuntos de $\{0, 1\}$ são um dos conjuntos A, B, S, \emptyset , todos conjuntos abertos relativamente a S , f é contínua. Logo, se S é desconexo, existem funções contínuas de S em $\{0, 1\}$ que não são constantes. Reciprocamente, se existe $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e não constante, é $S = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ com $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ não vazios, disjuntos e abertos relativamente a S , pois preimagens de conjuntos abertos por uma função contínua são conjuntos abertos relativamente ao domínio da função. Logo, se existe uma função $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ contínua não constante, S é desconexo. *Q.E.D.*

(I.22) Se S é um conjunto conexo e $S \subset T \subset \text{cl } S$, T é conexo.

Dem. Se a restrição a S de uma função f contínua de T em $\{0, 1\}$ é constante, como f é contínua em $T \subset \text{cl } S$ também é constante em T . Logo, de 2 no resultado precedente, se S é conexo, também T é. *Q.E.D.*

Em \mathbb{R} as noções de conjuntos conexo ou conexo por caminhos e intervalo são indistinguíveis.

(I.23) Para $S \subset \mathbb{R}$ com mais de um ponto são condições equivalentes:
 1. S é um intervalo.
 2. S é conexo por caminhos.
 3. S é conexo.

Dem. 1) implica 2). Se S é intervalo, existe $[a, b] \subset S$. A identidade em $[a, b]$ é caminho em S de a a b ; logo, S é conexo por caminhos.

2) implica 1). Se S é conexo por caminhos e $x, y \in S$ com $x < y$, existe caminho $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ com $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$. Como γ é contínua, do Teorema de Bolzano, $\gamma([a, b]) \supset [x, y]$; logo, S é um intervalo.

1) implica 3). Se S é intervalo e $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e assume os valores 0 e 1, do Teorema de Bolzano, $f(S) \supset [0, 1]$, em contradição com só poder ter estes dois valores. Logo, f é constante em S e, de (I.21.2), S é conexo.

3) implica 1). Se S é conexo e fosse $x < z < y$ com $x, y \in S$ e $z \notin S$, $A =]-\infty, z[$ e $B =]z, +\infty[$ seriam conjuntos abertos disjuntos tais que $S \subset A \cup B$ e tanto $A \cap S$ como $B \cap S$ seriam não vazios, em contradição com S ser conexo. Logo, $z \in S$ e, portanto, S é um intervalo. *Q.E.D.*

Mesmo em geral, as noções de conjunto conexo e de conjunto conexo por caminhos estão interligadas, como se vê nos dois resultados seguintes.

(I.24) *Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.*

Dem. Se S é um conjunto conexo por caminhos, $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e $x, y \in S$ são arbitrários, existe um caminho $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ com $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e, como do resultado precedente o intervalo $[a, b]$ é conexo, de (I.21.2), $f \circ \gamma$ é constante em $[a, b]$. Logo, $f(x) = f(y)$ para todos $x, y \in S$, e outra vez de (I.21.2), S é conexo. *Q.E.D.*

(I.25) *Um subconjunto aberto de um espaço métrico é conexo se e só se é conexo por caminhos.*

Dem. Se S não é conexo por caminhos e $x, y \in S$ não podem ser ligados por caminhos em S , designando por A o conjunto de pontos de S que podem ser ligados a x por caminhos em S , verifica-se $x \in A$ e $y \notin A$. Considera-se $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f(z) = 0$ se $z \in A$ e $f(z) = 1$ se $z \in S \setminus A$. Se $w \in S$, como S é aberto, existe uma bola aberta $B_r(w) \subset S$. $B_r(w)$ é um conjunto convexo e, portanto, é conexo por caminhos. Se $w \in A$, todos pontos de $B_r(w)$ podem ser ligados a x por caminhos em S , e $f(B_r(w)) = \{0\}$. Se $w \in S \setminus A$, nenhum ponto de $B_r(w)$ pode ser ligado a x por caminhos em S , e $f(B_r(w)) = \{1\}$. Logo, f é contínua em todo $w \in S$, $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, e, de (I.21.2), S é desconexo. Portanto, se S é conexo, é conexo por caminhos. O recíproco é imediato do resultado precedente. *Q.E.D.*

Qualquer caminho num conjunto aberto pode ser arbitrariamente aproximado por caminhos seccionalmente regulares no conjunto, e qualquer caminho num subconjunto aberto de um espaço métrico linear de dimensão finita (*e.g.* \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) pode ser arbitrariamente aproximado por caminhos poligonais simples que são a concatenação de segmentos de recta paralelos a cada um dos elementos de uma qualquer base do espaço linear fixada (*e.g.* no caso de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n aos vectores da base canónica²⁰⁴).

Portanto, *para conjuntos abertos conexidade é equivalente a conexidade por caminhos seccionalmente regulares, e em \mathbb{R}^n (resp., \mathbb{C} equivalente a conexidade por caminhos poligonais uniões de segmentos de recta paralelos aos eixos coordenados (resp., eixos real e imaginário).*

O exemplo seguinte é de um conjunto conexo não conexo por caminhos.

(I.26) **Exemplo:** Seja $S = C_1 \cup C_2$, com C_1 C_2 o gráfico de $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ e C_2 o segmento de recta $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2: |y| \leq 1\}$ (Figura I.2).

²⁰⁴Em alternativa, um caminho num subconjunto aberto de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n pode ser arbitrariamente aproximado por caminhos poligonais simples concatenação de segmentos de recta não paralelos a cada um dos elementos de uma qualquer base do espaço linear fixada (*e.g.* no caso de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n aos vectores da base canónica).

C_1 é conexo por caminhos, pois se $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in C_2$ e $a_1 < b_1$, $\gamma: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t, \sin \frac{\pi}{t})$ é caminho em S que liga os dois pontos. Se existisse caminho $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2): [a, b] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^2$ de $(\frac{1}{2}, 0) \in C_1$ a $(0, 0) \in C_2$, seria $\lambda_1(a) = \frac{1}{2}$ e $\lambda_1(b) = 0$ e, do Teorema de Bolzano, existiriam sucessões estritamente crescentes $\{t_n\}, \{s_n\} \subset [a, b]$, com $t_n < s_n < t_{n-1}$ e $\lambda_1(t_n) = \frac{1}{2n}$, $\lambda_1(s_n) = \frac{2}{4n+1}$, limitadas, decrescentes e com limites iguais a algum $L \in [a, b]$. Seria $\lambda(t_n) \rightarrow (0, 0)$ e $\lambda(s_n) \rightarrow (0, 1)$, em contradição com a continuidade de λ . Logo, S não é conexo por caminhos.

Se $f: S \rightarrow S \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua, como C_1 é conexo por caminhos, f é uma constante c em C_1 . Como $C_2 \subset \text{cl} C_1$, para $\mathbf{y} \in C_2$, $f(\mathbf{y}) = c$. Logo, se $f: S \rightarrow S \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua, então é constante. De (I.21.2), S é conexo.

Portanto, S é conexo, mas não é conexo por caminhos.

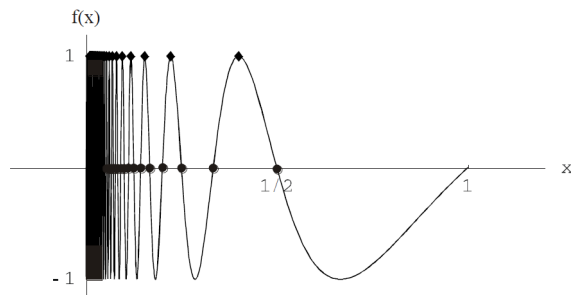


Figura I.2: Conjunto conexo que não é conexo por caminhos

(I.27) *Unões (finitas ou infinitas) de conjuntos conexos com intersecção não vazia são conjuntos conexos.*

Dem. Se \mathcal{F} é uma família de conjuntos conexos com $T = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, $S = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ e U, V são conjuntos abertos tais que $U \cup V \supset S$ e $S \cap U, S \cap V$ são disjuntos, com $a \in T$, que, sem perda de generalidade, se supõe $a \in U$ (caso contrário troca-se U com V), então para todo $F \in \mathcal{F}$ é $a \in F$ e, como F é conexo, tem de ser $F \cap V = \emptyset$, e $S \cap V = \emptyset$, pelo que S é conexo. *Q.E.D.*

(I.28) *A intersecção de uma sucessão $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos não vazios compactos conexos de um espaço métrico com $K_n \supset K_{n+1}$ é não vazia, compacta e conexa.*

Dem. Do Teorema de Intersecção de Cantor (I.16), $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ e compacto. Seja $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Se $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua, as restrições $f|_{K_n}$ são constantes e, como $a \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $f = f(a)$ em cada K_n para $n \in \mathbb{N}$. Logo, $f = f(a)$ em S . De (I.21.2), f é conexo. *Q.E.D.*

O resultado seguinte estabelece que qualquer conjunto não vazio pode ser decomposto de modo único em subconjuntos conexos máximos, chamados componentes conexas do conjunto considerado. Mais precisamente, diz-se que $T \subset S$ é uma **componente conexa** de S se T é conexo e não existe qualquer outro subconjunto conexo de S que contém T .

(I.29) *Todo conjunto $\neq \emptyset$ tem partição em componentes conexas única.*

Dem. Se a é um ponto de um conjunto $S \neq \emptyset$ e C_a é a união de todos subconjuntos conexos de S que contêm a , de (I.27), C_a é um subconjunto conexo de S . Se $B \subset S$ é conexo e $a \in B$, de (I.27), $C_a \cup B$ é conexo e contém a , pelo que $B \subset C_a$ e, portanto, C_a é uma componente conexa de S . Logo, para cada par de pontos $a, b \in S$ existem componentes conexas C_a e C_b que contêm, resp., a e b , e verifica-se a alternativa $C_a = C_b$ ou $C_a \cap C_b = \emptyset$. Logo, $\{C_a : a \in S\}$ é uma partição única de S em componentes conexas. *Q.E.D.*

(I.30) *Componentes conexas de subconjuntos abertos de um espaço métrico são conjuntos abertos.*

Dem. Se S é aberto e $a \in S$, existe um subconjunto aberto de S que contém a bola aberta $B_r(a) \subset S$. Se C_a é a componente conexa de S que contém $a \in S$, como $B_r(a)$ é conexo, é $B_r(a) \subset C_a$. Logo, as componentes conexas de S são conjuntos abertos. *Q.E.D.*

Há conjuntos com infinitas componentes conexas (*e.g.* um conjunto infinito de pontos isolados), o que pode acontecer mesmo para conjuntos abertos (*e.g.* uma união infinita de intervalos abertos disjuntos de \mathbb{R} como $\bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$). Apesar de haver subconjuntos de \mathbb{R} com infinitas componentes conexas não numeráveis, tal não acontece para conjuntos abertos, pois em espaços métricos separáveis (*e.g.* \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n) as componentes conexas de um conjunto aberto são numeráveis, como se prova a seguir.

(I.31) *O conjunto das componentes conexas de um subconjunto aberto de um espaço métrico separável é numerável.*

Dem. Se S é subconjunto aberto de um espaço métrico separável, do resultado precedente, as componentes conexas de S são conjuntos abertos e, como X é separável, existe um conjunto numerável $Q \subset S$ denso em S . Cada conjunto aberto $A \subset S$. Logo, cada componente conexa de S contém um ponto $q_a \in Q$, pelo que as componentes conexas de S são numeráveis. *Q.E.D.*

Diz-se que $S \subset X$ é **localmente conexo** (resp., **localmente conexo por caminhos**) se para todo ponto de S , todo conjunto aberto relativamente a S a que o ponto pertence contém um subconjunto aberto que contém o ponto relativamente a S conexo (resp., conexo por caminhos).

Tal como para a noção de conjunto conexo, considerando S como subespaço métrico de X , a condição anterior verifica-se ou não independentemente de se considerarem conjuntos abertos de X ou conjuntos abertos do subespaço S (*i.e.* conjuntos abertos relativamente a S). Assim, pode-se considerar um conjunto localmente conexo como um **espaço localmente conexo** e a definição pode ser simplificada considerando conjuntos abertos do espaço S .

(I.32) Exemplos:

1. Se X é espaço métrico e S é subconjunto aberto de X , para todo $x \in S$ existe bola aberta centrada no ponto contida em S e bolas abertas são conjuntos conexos; logo, subconjuntos abertos de espaço métrico X (inclusive o próprio X) são localmente conexos.

2. Considera-se o espaço métrico \mathbb{R} com a distância usual $d(x, y) = |x - y|$, $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $I_r =]-r, r[$ e $S_r = S \cap I_r$ para $r > 0$. Cada S_r contém 0 e é aberto relativamente a S . Todo conjunto aberto relativamente a S que contém 0 contém um conjunto S_a para algum $0 < a < 1$; S_a não é um intervalo e, portanto, é desconexo. Logo, S não é localmente conexo.

3. Um exemplo simples de subconjunto não localmente conexo denso no espaço métrico \mathbb{R} com distância usual é \mathbb{Q} , pois o argumento no penúltimo período do exemplo 2 é válido substituindo com $S = \mathbb{Q}$.

4. No espaço métrico \mathbb{R} com a distância usual $S =]0, 1[\cup]2, 3[$ é desconexo porque não é intervalo e, como é conjunto aberto, de 1, é localmente conexo.

5. O subconjunto $S = \overline{\{x + i \sin \frac{1}{x} : 0 < x < 1\}}$ do espaço métrico \mathbb{C} com a distância usual é conexo porque é o fecho da imagem da função contínua $x + iy \mapsto x + i \sin \frac{1}{x}$ definida no conjunto conexo $]0, 1[+ i\mathbb{R}$. Contudo, não é localmente conexo; e.g. todo subconjunto de S aberto relativamente a S que contém o ponto $i\frac{1}{2}$ é desconexo porque as rectas de equação $\frac{1}{\operatorname{Re} z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{N}$ não intersectam $S \cap B_{\frac{1}{4}}(i\frac{1}{2})$ e todos subconjuntos abertos relativamente a S que contêm $i\frac{1}{2}$ têm pontos com partes reais menores e com partes reais maiores do que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{N}$ grande.

Estes exemplos mostram que *um conjunto conexo pode ou não ser localmente conexo e um conjunto localmente conexo pode ou não ser conexo.*

Seguem-se várias caracterizações de conjuntos localmente conexos.

(I.33) *Se S é um subconjunto de um espaço métrico, as condições seguintes são equivalentes:*

1. *S é localmente conexo,*
i.e. Para todos $x \in S$ e $U \subset S$ aberto relativamente a S que contém x existe um subconjunto conexo aberto de U que contém x .
2. *Para todos $x \in S$ e $U \subset S$ aberto relativamente a S que contém x existe um subconjunto conexo de U que contém um conjunto aberto relativamente a S a que pertence x .*
3. *Todo subconjunto de S aberto relativamente a S é união de subconjuntos conexos de S abertos relativamente a S .*

Se S também é compacto, a condição seguinte equivale às anteriores:

4. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dois pontos de S que distam $< \delta$ pertencem a um subconjunto conexo de S com diâmetro $< \varepsilon$.*

Dem. É claro que $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$, $4 \Rightarrow 2$. $2 \Rightarrow 3$ porque, de 2, se $x \in S$ e $U \subset S$ é aberto relativamente a S , existe conjunto conexo C contendo um aberto $U \ni x$.

Logo, existe bola aberta $B_{r_x}(x) \subset U$. Portanto, $U = \cup_{x \in U} B_{r_x}(x)$ e, como as bolas de um espaço métrico são conexas, verifica-se 3. As implicações estabelecidas, com a transitividade de implicações, provam que 1, 2, 3 são equivalentes. Para provar a equivalência com 4 se S é compacto, basta provar que uma das condições 1,2,3 implica 4. Prova-se que $1 \Rightarrow 4$. Se \mathcal{O} é o conjunto de todos conjuntos conexas abertos relativamente a S com diâmetro $< \varepsilon$, e $\delta = \inf\{d(x, y) : (x, y) \in S^2 \setminus \cup_{U \in \mathcal{O}} U^2\}$, com d a distância, como $S^2 \setminus \cup_{U \in \mathcal{O}} U^2$ é subconjunto fechado do compacto S^2 , é compacto. É $\delta = d(x, y)$ para algum $(x, y) \in S^2 \setminus \cup_{U \in \mathcal{O}} U^2$, e, de 1, $\delta > 0$. *Q.E.D.*

Funções contínuas preservam compacidade e conexidade e em espaços métricos também preservam compacidade e conexidade local simultânea. Em particular, *curvas num espaço métrico descritas por caminhos definidos em intervalos compactos são conjuntos compactos localmente conexos.*

(I.34) *Se X, Y são espaços métricos, $f: X \rightarrow Y$ é contínua e $S \subset X$ é compacto e localmente conexo, também $f(S)$ é.*

Dem. Como $f(S)$ é compacto e preimagens de conjuntos abertos (resp., fechados) por funções contínuas são conjuntos abertos (resp., fechados) relativamente a S , dado $y \in f(S)$ e uma vizinhança N de y tem-se $f^{-1}(\{y\}) \subset S$ fechado e $f^{-1}(N) \subset S$ aberto, ambos relativamente a S , e como S é compacto, $f^{-1}(\{y\})$ também é compacto. Seja \mathcal{O} o conjunto dos subconjuntos de $f^{-1}(N)$ conexas e abertos relativamente a S que intersectam $f^{-1}(\{y\})$. $\cup_{U \in \mathcal{O}} f(U)$ é um subconjunto conexo de N porque é união de conjuntos conexos (por serem imagens de conjuntos conexos por uma função contínua) com intersecção $\neq \emptyset$ (por todos conterem y), e contém $f(S) \setminus f(S \setminus \cup_{U \in \mathcal{O}} f(U))$, que é aberto relativamente a $f(S)$ e contém y . Logo, de 2 no resultado precedente, $f(S)$ é localmente conexo. *Q.E.D.*

Segue-se uma condição suficiente para um subconjunto fechado da superfície de uma esfera em dimensão 3 com a distância esférica ser localmente conexo. Pode-se provar que esta condição também é necessária.

(I.35) *Se K é um subconjunto fechado da superfície S^2 de uma esfera em dimensão 3 com a distância esférica, as fronteiras das componentes conexas de $S^2 \setminus K$ são localmente conexas e para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto dessas componentes com diâmetros $> \varepsilon$ é finito, K é localmente conexo.*

Dem. De (I.33.4), para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in]0, \frac{\varepsilon}{2}[$ tal que para cada componente conexa U_j de $S^2 \setminus K$ e dois pontos de ∂U_j a distância $< \delta$ pertencem a um subconjunto conexo de ∂U_j de diâmetro $< \frac{\delta}{2}$. Para cada $y \in K \cap B_\delta(x)$ seja $G_{x,y}$ o arco de círculo máximo de S^2 com extremidades x e y de menor comprimento ou se x e y são diametralmente opostos um qualquer dos dois desses arcos. Substituindo cada componente conexa de $G_{x,y} \setminus K$ por um subconjunto conexo da fronteira do correspondente conjunto U_j com diâmetro

$< \frac{\varepsilon}{2}$ obtém-se um subconjunto conexo de $K \cap N_\varepsilon(x)$ que contém x e y . Logo, K é localmente conexo. Q.E.D.

I.6 Espaços topológicos (não) metrizáveis

Não é necessário, e por vezes não é possível, expressar relações de vizinhança em termos de distâncias. É fácil observar que muitas das propriedades anteriores são formuladas e estabelecidas a partir de conceitos definidos em termos de conjuntos abertos. Os conjuntos abertos são definidos em espaços métricos com base numa distância, mas a noção de espaço topológico considera directamente conjuntos abertos a partir de propriedades básicas, independentemente da noção de distância. Nem todos espaços topológicos são metrizáveis. O objectivo desta secção é alertar para a noção de espaço topológico e para alguns dos seus aspectos elementares, considerados a propósito das noções das secções anteriores²⁰⁵.

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ chama-se **topologia** em X a uma família \mathcal{T} de subconjuntos de X que contém X e \emptyset , e é fechada para uniões (finitas ou infinitas) e intersecções finitas de conjuntos. Um **espaço topológico** é um conjunto $X \neq \emptyset$ com uma topologia. Os **conjuntos abertos** de um espaço topológico são os elementos da sua topologia.

Tal como em espaços métricos, um subconjunto Y de um espaço topológico X com topologia \mathcal{T} é um espaço topológico com a topologia que consiste na intersecção de Y com os elementos de \mathcal{T} , *i.e.* os **conjuntos abertos relativamente a Y** , pelo que se diz que esta é a **topologia em Y herdada** da, ou **induzida** pela, topologia em X , e que este espaço topológico Y é um **subespaço topológico** de X .

Diz-se que uma família \mathcal{B} de conjuntos abertos de um espaço topológico é **base da topologia** se para cada ponto e cada conjunto aberto U que o contém existe um elemento de \mathcal{B} contido em U que contém o ponto.

A família das bolas abertas de um espaço métrico é uma base da topologia do espaço. *Dada uma base de uma topologia, os conjuntos abertos são todas as uniões (finitas ou infinitas) de elementos da base.*

É útil poder especificar uma topologia a partir de uma base, para o que é necessário identificar as propriedades que uma família de conjuntos deve satisfazer para ser base de alguma topologia.

Uma família \mathcal{B} de subconjuntos de $X \neq \emptyset$ é base de alguma topologia em X se e só se cada ponto de X está contido em pelo menos um elemento de \mathcal{B} e para cada ponto da intersecção de dois elementos de \mathcal{B} existe um elemento de \mathcal{B} contido nessa intersecção que contém o ponto.

Há espaços topológicos que não são métricos. Um exemplo trivial é $X = \{0, 1\}$ com topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$, pois se d fosse distância em X , seria $d(0, 0) = 0 = d(1, 1)$, $d(0, 1) = D > 0$ e $B_D(1) = \{1\} \notin \mathcal{T}$ seria aberto.

²⁰⁵Um excelente texto de topologia geral que contém os aspectos aqui mencionados e muitos outros é o livro de J.R. Munkres indicado na bibliografia: *Topology*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000. Munkres, James (1930-).

Para dar um exemplo mais natural de espaço topológico não métrico considera-se a noção de seminorma em espaços lineares reais ou complexos.

Chama-se **seminorma** num espaço linear real ou complexo V a uma função com as propriedades de definição de norma excepto que pode haver vectores não nulos com seminorma nula.

Uma seminorma num espaço linear real ou complexo pode não ser uma norma, *e.g.* no espaço linear complexo das das funções contínuas do intervalo real $[-1, 1]$ em \mathbb{C} , designado $C^0([-1, 1], \mathbb{C})$, $f \mapsto \|f\| = |f(0)|$.

Qualquer família de seminormas num espaço linear V real ou complexo define uma topologia em V pelos conjuntos S tais que $S = \text{int } S$, em que $x \in \text{int } S$ se para todo $f \in F$ existe $r > 0$ tal que $\{y \in V : \|y - x\|_f < r\} \subset S$.

O espaço linear complexo das funções com valores complexos definidas e contínuas na bola fechada $\text{cl } B_1(0) \subset \mathbb{C}$, designado $C^0(\text{cl } B_1(0), \mathbb{C})$, com a família de seminormas $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_x\}_{x \in \text{cl } B_1(0)}$, em que $\|f\|_x = |f(x)|$, é um espaço topológico que não é metrizável (*i.e.* não existe qualquer distância neste espaço que defina a mesma topologia). Neste espaço, uma sucessão $\{f_n\}$ converge para f se e só se converge pontualmente para f , ou seja $f_n(x) \rightarrow f(x)$ qualquer que seja $x \in [-1, 1]$, pelo que se diz que a topologia definida pela família de seminormas considerada é a **topologia da convergência pontual** em $C^0(\text{cl } B_1(0), \mathbb{C})$. Outro exemplo útil é a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos, por exemplo no conjunto $C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ das funções contínuas $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com a família de seminormas $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_K\}_{K \in \mathcal{K}}$, em que \mathcal{K} é o conjunto dos subconjuntos compactos de \mathbb{C} e para cada $K \in \mathcal{K}$ e $f \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\|f\|_K = \max f(K)$, chamada **topologia compacta-aberto**²⁰⁶ em $C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Os conceitos considerados em espaços métricos na secção 2 são todos definidos em termos de conjuntos abertos, com excepção das noções de bola aberta, conjunto limitado, conjunto totalmente limitado, diâmetro de conjunto, Sucessão de Cauchy, espaço completo, função uniformemente contínua e oscilação de função, pelo que, com excepção destas 8 noções, podem ser considerados em espaços topológicos. É de notar que em espaços topológicos uma sucessão pode ter mais de um limite, e pode ter um ponto limite que não é limite de uma qualquer das suas sub-sucessões. O Teorema de Baire pode falhar; se é válido, diz-se que é um **espaço topológico de Baire**.

As noções de conjunto e espaço compacto da secção 3 também fazem sentido no contexto mais geral de espaços topológicos, pois são definidas em termos de conjuntos abertos. Portanto, os resultados da secção 3 para conjuntos compactos são válidos em espaços topológicos, com excepção²⁰⁷ de (I.7), (I.8), (I.17), (I.11), (I.12), (I.14), (I.15), (I.18) e (I.19).

²⁰⁶Foi introduzida em 1945 por Ralph Fox (1913-1973). O nome é porque uma base da topologia é o conjunto dos conjuntos $V(K, U) = \{f \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}) : f(K) \subset U\}$ com K compacto e U aberto.

²⁰⁷Para distinguir nas secções 3 e 4 os resultados que permanecem válidos em espaços topológicos são enunciados sem referir que são subconjuntos de espaços métricos, enquanto os que não permanecem válidos em espaços topológicos arbitrários referem no enunciado espaços métricos.

A parte de (I.7) que respeita a conjuntos limitados não faz sentido em espaços topológicos gerais, pois depende da noção de distância. A parte que respeita a conjuntos fechados pode ser provada com o argumento alternativo seguinte: se K é subconjunto compacto de um espaço métrico X e $x \in X \setminus K$, como $\{B_{d(k,x)/2}(k) : k \in K\}$ é cobertura aberta de K , existe subcobertura finita de K , $\{B_{d(k_j,x)/2}(k_j) : j = 1, \dots, n\}$, e $U = \bigcap_{j=1}^n B_{d(k_j,x)/2}(x)$ é aberto, contém x e não intersecta elementos dessa subcobertura finita de K ; logo, $x \in U \subset X \setminus K$, pelo que $X \setminus K$ é aberto e K fechado. Este argumento exige que para qualquer par de pontos distintos do espaço haja pares de conjuntos abertos disjuntos com cada um dos pontos. Quando é assim, diz-se que o espaço topológico é um **espaço de Hausdorff**. Em espaços topológicos de Hausdorff o argumento anterior pode ser aplicado e, portanto, subconjuntos compactos destes espaços são fechados, pelo que a parte de (I.7) que respeita a conjuntos fechados é válida em espaços topológicos de Hausdorff.

Limitação total, diâmetro, continuidade uniforme e distância de dois conjuntos são noções métricas. Não fazem sentido em espaços topológicos e, assim, a parte de (I.7) relativa a conjuntos limitados, (I.8), (I.17), (I.15)), (I.18) e (I.19) nem sequer podem ser formulados em espaços topológicos. Na prova de (I.14), (I.7) é a única propriedade que se usou que pode falhar em espaços topológicos gerais, pelo que (I.14) é válido em espaços de Hausdorff.

Quanto ao Teorema de Bolzano-Weierstrass (I.11), a prova da necessidade da condição permanece válida em espaços topológicos gerais, mas a da suficiência usa limitação total e a convergência de toda Sucessão de Cauchy com um ponto limite, que podem falhar em certos espaços topológicos. A Propriedade de Bolzano-Weierstrass não é suficiente para compacidade em espaços topológicos arbitrários, mas é possível provar que é equivalente a compacidade em espaços topológicos que tenham uma base cujos elementos que contêm cada ponto do espaço sejam numeráveis. Quando um espaço topológico tem esta propriedade diz-se que satisfaz o **1º axioma de numerabilidade**. Como \mathbb{R} é um espaço métrico separável, *todo espaço métrico é um espaço topológico que satisfaz o 1º axioma de numerabilidade*.

As noções de conjunto e espaço conexo da secção 4 também fazem sentido no contexto mais geral de espaços topológicos, pois são definidas em termos de conjuntos abertos. Pela mesma razão, os resultados da secção 4 para conjuntos conexos são válidos em espaços topológicos gerais, com excepção²⁰⁸ de (I.23), (I.25), (I.28), (I.30), (I.31), (I.33) e (I.34).

(I.23) respeita a subconjuntos de \mathbb{R} .

A prova de (I.25) exige que toda vizinhança de um ponto contenha uma vizinhança do ponto conexa por caminhos, *i.e.* que o espaço seja localmente conexo por caminhos, o que equivale a existir uma base da topologia de conjuntos conexos por caminhos. Logo, (I.25) ainda é válida em espaços topológicos localmente conexos por caminhos. Um espaço topológico pode ser

²⁰⁸ Ver a nota de pé de página anterior.

localmente conexo por caminhos sem ser conexo e vice versa. É semelhante para (I.30), substituindo localmente conexo por caminhos por localmente conexo, o que equivale existir uma base da topologia de conjuntos conexos.

A prova de (I.28) exige que para qualquer par de pontos distintos do espaço haja pares de conjuntos abertos disjuntos que contêm cada ponto, ou seja que o espaço topológico seja de Hausdorff.

(I.31) não é válido para todos espaços topológicos, mas é válido se existe uma base numerável da topologia, caso em que se diz que o espaço topológico satisfaz o **2º axioma de numerabilidade**, e qualquer família de conjuntos abertos disjuntos é numerável. Pode-se provar que *todo espaço métrico satisfaz o 2º axioma de numerabilidade se e só se é separável*.

(I.33) e (I.34) não são válidos em todos espaços topológicos, mas sim em espaços topológicos de Hausdorff.

A validade do 2º axioma de numerabilidade implica a validade do 1º axioma de numerabilidade, acima referido como condição que assegura a validade do Teorema de Bolzano-Weierstrass num espaço topológico.

A relação entre espaços topológicos e espaços métricos é essencial, em particular o esclarecimento das condições em que um espaço topológico é **metrizável**²⁰⁹, *i.e.* em que existe uma distância tal que a topologia que define coincide com a do espaço topológico inicial. Uma 1ª grande contribuição para esta questão foi o **Teorema de Metrização de Uryshon**, que estabelece que uma condição suficiente para um espaço topológico ser metrizável é satisfazer o 2º axioma de numerabilidade e ter a propriedade de para qualquer par de um ponto e um conjunto fechado que não o contenha existir um par de conjuntos abertos disjuntos em que um deles contém o ponto e o outro contém o conjunto; quando um espaço topológico tem esta propriedade diz-se que é um **espaço regular**.

Pode-se verificar que com uma topologia tal que para cada par ordenado de pontos distintos existe um conjunto aberto que contém um dos pontos e não o outro, todos conjuntos singulares de pontos do espaço são fechados. Logo, esta propriedade é mais fraca do que a condição que define espaço de Hausdorff, acima referida como condição que assegura a validade de (I.7), e esta é mais fraca que a condição que define espaço regular. Portanto, *os espaços regulares são espaços de Hausdorff e em espaços regulares os conjuntos com um só ponto são fechados*.

Os espaços métricos são espaços regulares, pelo que a condição de um espaço topológico ser regular é necessária para ser metrizável. Contudo, a validade do 2º axioma de numerabilidade não é necessária. O **Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov** estabelece que *um espaço topológico é metrizável se e só se é regular e tem uma base numeravelmente localmente*

²⁰⁹Para provas dos teoremas de metrização referidos a seguir ver, *e.g.* o livro de J.R. Munkres referido na bibliografia final.

finita²¹⁰. Como consequência obtém-se o **Teorema de Metrização de Bing**, que estabelece que *um espaço topológico é metrizável se e só se é regular e tem uma base numeravelmente localmente discreta*. Também se obtém o **Teorema de Metrização de Smirnov**, pelo qual *um espaço topológico é metrizável se e só se é paracompacto e localmente metrizável*²¹¹.

I.7 Espaços de homologia-1 e de homologia-0

No capítulo 7 consideram-se Cadeias de caminhos com coeficientes inteiros e grupos de Homologia. De modo a tirar partido do que se sabe sobre dimensão de espaços lineares e evitar introduzir conceitos adicionais para grupos, consideram-se aqui Cadeias com coeficientes reais.

Chama-se **Cadeia-1 em $\Omega \subset \mathbb{C}$** a $\Gamma = \sum_{k=1}^r c_k \gamma_k$, em que $r \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ e γ_k são caminhos seccionalmente regulares em Ω , para $k=1, \dots, r$, considerando duas **Cadeias-1 iguais** se os integrais sobre elas de cada função contínua definida na união Γ^* das curvas descritas pelos caminhos que as compõem são iguais, com $\int_{\Gamma} f = \sum_{k=1}^r c_k \int_{\gamma_k} f$. Diz-se que uma Cadeia-1 é um **Ciclo-1** em Ω se é combinação linear de caminhos fechados em Ω . Chama-se **Índice do Ciclo-1** Γ em relação a um ponto $p \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ a $\text{Ind}_{\Gamma}(p) = \sum_{k=1}^r c_k \text{Ind}_{\gamma_k}(p)$. Diz-se que Ciclos-1 Γ, Σ em Ω são **Ciclos-1 Homólogos em Ω** se $\text{Ind}_{\Gamma} = \text{Ind}_{\Sigma}$ em $\mathbb{C} \setminus \Omega$. A relação de Homologia entre Ciclos-1 em Ω é uma relação de equivalência e as correspondentes classes de equivalência constituem um espaço linear real designado $H_1\Omega$ e chamado **espaço de Homologia-1 de Ω** .

Define-se analogamente **Cadeia-0 em Ω** , substituindo na definição de Cadeia-1 em Ω caminhos seccionalmente regulares por pontos em Ω e o integral de uma função contínua f sobre uma Cadeia-1 Γ pelo valor de uma função f numa Cadeia-0 $P = \sum_{k=1}^r c_k p_k$. Diz-se que P, Q são **Cadeias-0 Homólogas em Ω** se $f(P) = f(Q)$ para todas funções constantes em cada componente conexa de Ω . A relação de Homologia entre Cadeias-0 em Ω é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência formam um espaço linear real, designado $H_0\Omega$ e chamado **espaço de Homologia-0 de Ω** .

$H_0\Omega$ dá informação sobre as componentes conexas de Ω e $H_1\Omega$ sobre as componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Em particular, *o n° de componentes conexas de Ω é a dimensão do espaço linear $H_0\Omega$ e, no caso do n° de componentes conexas de Ω ser finito, uma base de $H_0\Omega$ é um conjunto de pontos de Ω com exactamente um elemento em cada componente conexa*

²¹⁰Diz-se que uma família de subconjuntos de um espaço topológico é localmente finita (resp., **localmente discreta**) se todo ponto do espaço tem uma vizinhança que intersecta apenas um n° finito de (resp., no máximo um dos) elementos da família. A uma união numerável de famílias localmente finitas (resp., localmente discretas) chama-se família **numeravelmente localmente finita** (resp., **numeravelmente localmente discreta**).

²¹¹Um **espaço paracompacto** é um espaço topológico de Hausdorff tal que toda a sua cobertura aberta tem um refinamento aberto localmente finito que cobre o espaço, em que um **refinamento aberto** de uma família de conjuntos é uma família de conjuntos abertos em que cada elemento está contido num elemento da família inicial. Um espaço topológico é **localmente metrizável** se todo ponto do espaço tem uma vizinhança em que a topologia induzida é metrizável.

de Ω . Analogamente, o n° de componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ é a dimensão do espaço linear $H_1\Omega$ e, no caso do n° de componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ser finito, uma base de $H_1\Omega$ é um conjunto de Ciclos-1 em Ω correspondentes a cada uma das componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ e com Índice 1 nessa componente e 0 nas outras.

Seja $\Gamma = \sum_{k=1}^r c_k \gamma_k$ uma Cadeia-1 em $\Omega \subset \mathbb{C}$, com $r \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ e γ_k caminhos seccionalmente regulares em Ω . Sem perda de generalidade, consideram-se estes caminhos definidos em $[0, 1]$. Chama-se **bordo do caminho** $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ à Cadeia-0 $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$, **bordo da Cadeia-1** Γ à Cadeia-0 $\partial\Gamma = \sum_{k=1}^r c_k \partial\gamma_k$, e diz-se que uma Cadeia-0 P em Ω é um **bordo-0 em Ω** se existe uma Cadeia-1 Γ em Ω tal que $P = \partial\Gamma$.

O bordo de uma Cadeia-1 Γ é vazio se e só se Γ é um Ciclo-1. Dois pontos de Ω são as extremidades de algum caminho em Ω se e só se pertencem a uma mesma componente conexa de Ω . Duas Cadeias-0 em Ω são Homólogas em Ω se e só se diferem de um bordo-0 em Ω .

Analogamente, se $R: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e tal que os caminhos que são as restrições de R às arestas de $[0, 1] \times [0, 1]$, i.e.

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, com $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$, $\gamma_3(t) = (t, 1)$, $\gamma_4(t) = (0, t)$, são seccionalmente regulares, **bordo de R** é a Cadeia-1 $\partial R = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$ (Figura I.3) e diz-se que uma Cadeia-1 Γ em Ω é um **bordo-1 em Ω** se é uma combinação linear finita de bordos de funções R_k com as propriedades acima consideradas para R , mas com valores em Ω . É claro que um Ciclo-1 em Ω Homólogo a zero em Ω é combinação linear de caminhos fechados seccionalmente regulares com Índices zero em $\mathbb{C} \setminus \Omega$, cada um Homólogo a um bordo-1 em Ω . Dois Ciclos-1 em Ω são Homólogos em Ω se e só se diferem de um bordo-1 em Ω .

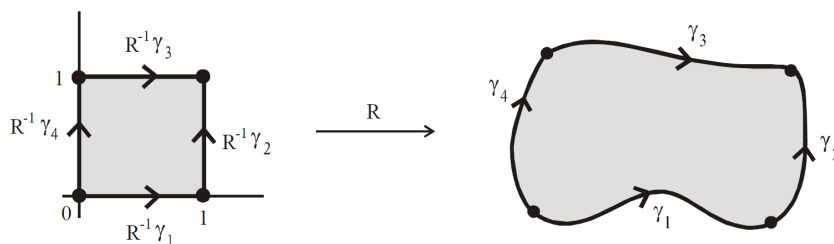


Figura I.3: Bordo de $R: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\partial R = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$

I.8 Teorema da curva de Jordan

Nesta secção prova-se o resultado seguinte.

(I.36) **Teorema da Curva de Jordan:** Se $J \subset \mathbb{C}$ é uma curva de Jordan, $\mathbb{C} \setminus J$ tem duas componentes conexas, uma limitada e a outra ilimitada, ambas com fronteira J .

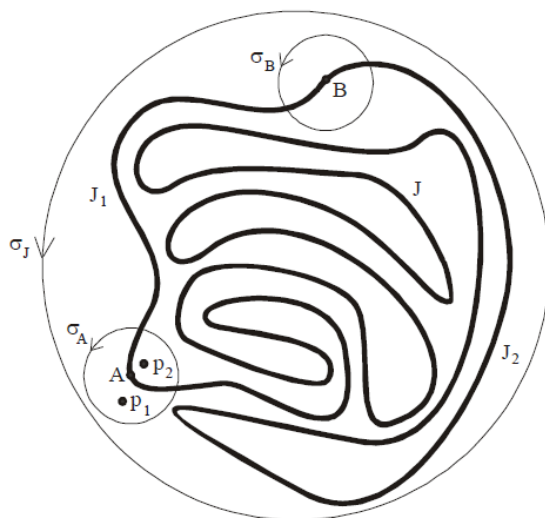


Figura I.4: Curva de Jordan J

Seja $J \subset \mathbb{C}$ uma curva de Jordan, $A \neq B$ pontos em J e J_1, J_2 as curvas com extremidades nestes pontos tais que $J_1 \cup J_2 = J$ e $J_1 \cap J_2 = \{A, B\}$ (Figura I.4). Provar que $\mathbb{C} \setminus J$ tem exactamente duas componentes conexas é equivalente a provar que $\dim H_0(\mathbb{C} \setminus J) = 2$, para o que se considera uma Cadeia de transformações lineares definidas entre espaços de Homologia

$$H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathbb{C} \setminus J) \xrightarrow{\iota} H_0(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}),$$

e se calcula a dimensão do núcleo e do contradomínio da transformação linear ι , designadas, resp., nul ι e rank ι , pois, de Álgebra Linear elementar, $\dim H_0(\mathbb{C} \setminus J) = \text{nul } \iota + \text{rank } \iota$.

ι transforma cada classe de Homologia-0 de $\mathbb{C} \setminus J$ que contém $p \in \mathbb{C} \setminus J$ na classe de Homologia-0 de $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ que contém p . Se p, q são pontos de uma mesma classe de Homologia-0 de $\mathbb{C} \setminus J$, pertencem à mesma componente conexa deste conjunto e, como $\{A, B\} \subset J$, $\mathbb{C} \setminus J \subset \mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ é conexo, também pertencem à mesma classe de Homologia-0 de $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$, pelo que ι é uma transformação linear de $H_0(\mathbb{C} \setminus J)$ em $H_0(\mathbb{C} \setminus \{A, B\})$. $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ é conexo, ι é sobrejectiva e $\dim H_0(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}) = 1$, pelo que rank $\iota = 1$.

δ é definida em cada classe α de Homologia-1 de $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ do modo seguinte. Toma-se um Ciclo-1 $\gamma \in \alpha$. De (I.37) abaixo, existem Cadeias-1 γ_1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ e γ_2 em $\mathbb{C} \setminus J_2$ tais que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Como $\partial\gamma_1 + \partial\gamma_2 = \partial\gamma = 0$, $\partial\gamma_1 = -\partial\gamma_2$ é simultaneamente uma Cadeia-0 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ e em $\mathbb{C} \setminus J_2$. Define-se $\delta\alpha = [\partial\gamma_1] = -[\partial\gamma_2]$, em que $[\partial\gamma_k]$, $k=1, 2$, designa a classe de Homologia-0 em $\mathbb{C} \setminus J$ que contém a Cadeia-0 $\partial\gamma_k$. Para que δ seja uma função de $H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\})$ em $H_0(\mathbb{C} \setminus J)$ é necessário que para $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ e $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ com as propriedades acima, $\partial\gamma_1$ seja Homóloga-0 a $\partial\tilde{\gamma}_1$ em $\mathbb{C} \setminus J$, o que resulta de (I.38) abaixo. δ é uma transformação linear de $H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\})$ em $H_0(\mathbb{C} \setminus J)$.

(I.37) Se γ é uma Cadeia-1 em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$, existem Cadeias-1 γ_1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ e γ_2 em $\mathbb{C} \setminus J_2$ tais que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Dem. Como γ^* é compacto, do Lema de Lebesgue (I.17), γ pode ser subdividido num n^o finito de caminhos, cada em $\mathbb{C} \setminus J_1$ ou $\mathbb{C} \setminus J_2$. Define-se a Cadeia-1 γ_1 pela soma dos caminhos da subdivisão contidos em $\mathbb{C} \setminus J_1$ e a Cadeia-1 γ_2 pela soma dos restantes caminhos da subdivisão. *Q.E.D.*

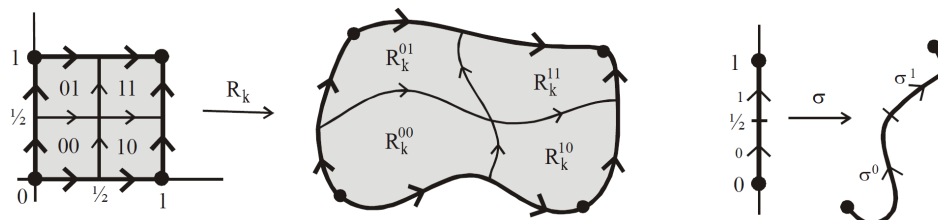


Figura I.5: Operador de subdivisão usado na prova de (I.38)

(I.38) Se $\gamma, \tilde{\gamma}$ são Ciclos-1 Homólogos em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$, $\gamma_j, \tilde{\gamma}_j$ são Cadeias-1 em $\mathbb{C} \setminus J_j$, $j = 1, 2$, tais que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$, então $\partial\gamma_1, \partial\tilde{\gamma}_1$ são Cadeias-0 Homólogas em $\mathbb{C} \setminus J$.

Dem. Como $\gamma, \tilde{\gamma}$ são Ciclos-1 Homólogos em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$, $\gamma - \tilde{\gamma}$ é um bordo-1 em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ e $\gamma - \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^r c_k \partial R_k$, em que $r \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ e $R_k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ são funções contínuas tais que as restrições às arestas de $[0, 1] \times [0, 1]$ são caminhos seccionalmente regulares. Define-se um **operador de subdivisão** S que transforma cada R_k na soma das quatro funções $R_k^{jl} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $j, l \in \{0, 1\}$, obtidas dividindo ao meio cada uma das arestas de $[0, 1] \times [0, 1]$ e reescalando-as de modo a $R_k^{jl}(t, s) = R_k(\frac{j+t}{2}, \frac{l+s}{2})$. Define-se o bordo $\partial S(R_k) = \sum_{j,l=1}^2 \partial R_k^{jl}$. Analogamente, S transforma cada caminho $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ na soma dos dois caminhos $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in \{0, 1\}$ tais que $\sigma_j(t) = \sigma(\frac{j+t}{2})$. Define-se o bordo $\partial S(\sigma) = \sum_{j=1}^2 \partial \sigma_j$. S estende-se linearmente a combinações lineares de caminhos definidos em $[0, 1]$ por $S(\sum_{k=1}^r c_k \sigma_k) = \sum_{k=1}^r c_k S(\sigma_k)$. É $S(\partial R_k) = \partial S(R_k)$ (Figura I.5).

Do Lema de Lebesgue (I.17), por um n^o finito $m \in \mathbb{N}$ de aplicações do operador de subdivisão obtém-se $S^m(\partial R_k)$ como soma finita de bordos-1, cada um em $\mathbb{C} \setminus J_1$ ou $\mathbb{C} \setminus J_2$. Portanto, a Cadeia-1 $\gamma - \tilde{\gamma} = \sum_{k=1}^r c_k \partial R_k$, em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ é uma combinação linear finita de bordos-1, cada um em $\mathbb{C} \setminus J_1$ ou $\mathbb{C} \setminus J_2$. Designa-se λ_1 a Cadeia-1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ que consiste nos termos que envolvem bordos-1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$, e λ_2 a Cadeia-1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ obtida subtraindo à combinação linear os termos que envolvem bordos-1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$. Como λ_1 é um bordo-1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$, é um Ciclo-1 e $\partial\lambda_1 = 0$. Como

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \gamma - \tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2 - \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2,$$

$\lambda_1 - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1 = -\lambda_2 + \gamma_2 - \tilde{\gamma}_2$ é simultaneamente uma Cadeia-1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ e em $\mathbb{C} \setminus J_2$, e, portanto, é uma Cadeia-1 em $\mathbb{C} \setminus J$ com bordo

$$\partial(\lambda_1 - \gamma_1 + \tilde{\gamma}_1) = \partial\lambda_1 - \partial\gamma_1 + \partial\tilde{\gamma}_1 = \partial\tilde{\gamma}_1 - \partial\gamma_1.$$

$\partial\tilde{\gamma}_1 - \partial\gamma_1$ é bordo-0 e $\partial\gamma_1, \partial\tilde{\gamma}_1$ são Cadeias-0 Homólogas em $\mathbb{C} \setminus J$. *Q.E.D.*

$\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ tem duas componentes conexas limitadas $\{A\}$ e $\{B\}$. Logo, $\dim H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}) = 2$ e uma base deste espaço consiste no par de caminhos regulares simples que descrevem no sentido positivo circunferências σ_A, σ_B com centro, resp., em A, B e o mesmo raio $r \in]0, |A-B| [$.

Como J é compacto, existe um círculo que contém J e está contido na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus J$. A fronteira deste círculo está contida na mesma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus J$; logo, se σ_j é um caminho regular simples que a descreve no sentido positivo, $\delta[\sigma_j] = 0$ (Figura I.4). Como, $\text{Ind}_{\sigma_j}(A) = 1$, é $[\sigma_j] \neq 0$ e, portanto, $\text{nul } \delta \geq 1$.

Se J é descrita por um caminho seccionalmente regular γ_j , de (7.1), com $r > 0$ suficientemente pequeno para $B_r(A) \cap J$ ser um arco conexo, $B_r(A) \setminus J$ é a união de duas componentes conexas tais que se p_1, p_2 são pontos de cada componente, é $|\text{Ind}_J(p_2) - \text{Ind}_J(p_1)| = 1$, pelo que p_1, p_2 pertencem a componentes conexas diferentes de $\mathbb{C} \setminus J$, e $\delta[\sigma_A] = \pm[p_1 - p_2]$, $\text{rank } \delta \geq 1$.

Como $\dim H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}) = 2$, é $\text{rank } \delta \geq 1$ e $\text{nul } \delta \geq 1$, e, do Teorema da Característica e Nulidade de transformações lineares

$$\text{rank } \delta + \text{nul } \delta = \dim H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}),$$

$\text{rank } \delta = \text{nul } \delta = 1$. Do resultado seguinte, $\mathcal{N}(\iota) = \mathcal{R}(\delta)$, pelo que $\text{rank } \delta = \text{nul } \iota = 1$. Logo, $\dim H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}) = \text{rank } \delta + \text{nul } \delta = 2$, o que conclui a prova do teorema para curvas seccionalmente regulares.

(I.39) O núcleo $\mathcal{N}(\iota)$ de $\iota: H_0(\mathbb{C} \setminus J) \rightarrow H_0(\mathbb{C} \setminus \{A, B\})$ e o contradomínio $\mathcal{R}(\delta)$ de $\delta: H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\}) \rightarrow H_0(\mathbb{C} \setminus J)$ são iguais.

Dem. Se $\alpha \in H_1(\mathbb{C} \setminus \{A, B\})$, $\delta(\alpha)$ é uma classe de Homologia-0 de $\mathbb{C} \setminus J$ que contém uma Cadeia-0 soma finita de diferenças de pares de pontos em $\mathbb{C} \setminus J$. Logo, $\iota \delta(\alpha)$ é uma classe de Homologia-0 de $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ que contém a Cadeia-0 referida. Como $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ é conexo e $\mathbb{C} \setminus J \subset \mathbb{C} \setminus \{A, B\}$, cada par dos pontos considerados está na mesma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$, pelo que a sua diferença é Homóloga-0 em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ a zero e $\iota \delta(\alpha) = 0$. Logo, $\mathcal{R}(\delta) \subset \mathcal{N}(\iota)$. Por outro lado, se uma classe de Homologia-0 $[P]$ em $\mathbb{C} \setminus J$ pertence ao núcleo de ι , $\iota([P]) = 0 \in H_0(\mathbb{C} \setminus \{A, B\})$, e, como $i([P])$ é a classe de Homologia-0 em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ que contém a Cadeia-0 P , esta é um bordo-0 em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$. Portanto, existem Cadeias-1 γ_1 em $\mathbb{C} \setminus J_1$ e γ_2 em $\mathbb{C} \setminus J_2$ tais que $P = \partial \gamma_1 = \partial \gamma_2$. A Cadeia-1 $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ satisfaz $\partial \gamma = \partial \gamma_1 - \partial \gamma_2 = 0$, pelo que é um Ciclo-1 em $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$. Se α é a classe de Homologia-1 de $\mathbb{C} \setminus \{A, B\}$ que contém γ , é $\delta(\alpha) = [\partial \gamma_1] = [P]$. Logo, $\mathcal{N}(\iota) \subset \mathcal{R}(\delta)$. Q.E.D.

A hipótese da curva de Jordan J ser seccionalmente regular foi usada apenas para considerar o Índice de um caminho que a descreve como definido no capítulo 4 e para aplicar o resultado (7.1) que estabelece que o Índice de um caminho seccionalmente regular altera-se de 1 se for atravessado transversalmente. Contudo, a noção de Índice e o resultado (7.1) podem ser estendidos

para caminhos de Jordan arbitrários. Para tal basta ver que para um caminho de Jordan γ em \mathbb{C} arbitrário e todo par de pontos $p \in \gamma^*$ e $q \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ existe um círculo aberto com centro em p cuja intersecção com $\gamma^* \cup \{q\}$ é um arco conexo e não fechado de γ^* , como se prova no resultado seguinte, pois dado $q \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ existe uma cobertura aberta de γ^* por círculos abertos com a propriedade indicada e, como γ^* é um conjunto compacto, existe uma subcobertura finita de γ^* , e o valor em q do Índice de um caminho poligonal inscrito em γ com cada um dos segmentos contido num dos círculos da subcobertura finita é independente da cobertura e do caminho poligonal inscrito considerados. Define-se $\text{Ind}_\gamma(q)$ por esse valor (Figura I.6). Com esta definição, (7.1) é válido para todos caminhos de Jordan, mesmo não seccionalmente regulares. Em consequência, a argumentação acima também é válida para quaisquer curvas de Jordan em \mathbb{C} , o que estabelece o Teorema da Curva de Jordan enunciado em (I.36).

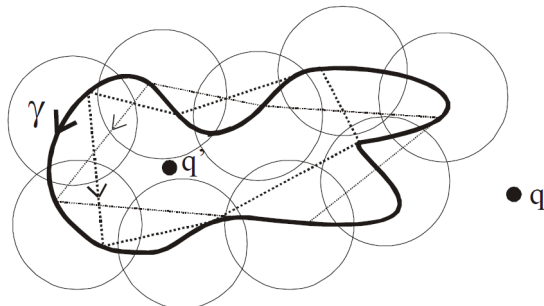


Figura I.6: Definição de $\text{Ind}_\gamma(q)$ se γ não é seccionalmente regular em termos do Índice de um caminho poligonal inscrito em γ

(I.40) *Se γ é caminho de Jordan em \mathbb{C} , para cada par de pontos $p \in \gamma^*$ e $q \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ existe um círculo aberto com centro em p cuja intersecção com $\gamma^* \cup \{q\}$ é um arco conexo e não fechado de γ^* .*

Dem. A função $d = |\gamma - p|$ é contínua no conjunto compacto $[a, b]$ e, do Teorema de Weierstrass de extremos de funções contínuas, assume um valor máximo $M > 0$ neste conjunto. Por subdivisões ao meio sucessivas de $[0, M]$ obtém-se uma sucessão de conjuntos $S_n = d^{-1}([0, \frac{M}{2^n}])$ tais que $S_{n+1} \subset S_n$ e cada S_n é uma união de subintervalos fechados de $[a, b]$. Se $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, como d é contínua, é $d(t) = 0$. Como $\gamma_{[a,b]}$ é injectiva e $\gamma(a) = \gamma(b)$, é $\gamma^{-1}(0) = \{a, b\}$ ou $\gamma^{-1}(0) = \{t_0\}$ com $a < t_0 < b$. No 1º caso é $t = a$ ou $t = b$, e no 2º caso é $t = t_0$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ no 1º caso S_n é a união de dois intervalos fechados, $S_n = [a, t_n] \cup [\tilde{t}_n, b]$ e no 2º caso é um intervalo fechado $[t_n, \tilde{t}_n]$ que contém t_0 . Para $n > N$ tal que $\frac{M}{2^n} < |p - q|$, a restrição de γ a S_n é um arco conexo não fechado de γ^* que é a intersecção de $\gamma^* \cup \{q\}$ com o círculo $B_{\frac{M}{2^n}}(p)$. Q.E.D.

Uma consequência imediata deste resultado é que *uma curva de Jordan no plano é Homeomorfa a uma circunferência.*

Um outro enunciado usual do Teorema da Curva de Jordan é que uma curva de Jordan num plano separa-o em duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada. De uma das caracterizações de regiões simplesmente conexas em (??) obtém-se que *a componente conexa limitada do complementar de uma curva de Jordan num plano é uma região simplesmente conexa*, pois o seu complementar é a união da curva de Jordan com a componente conexa ilimitada do seu complementar. Além disso, *a componente conexa ilimitada do complementar de uma curva de Jordan num plano é múltiplamente conexa com conectividade 2*, pois o seu complementar é a união da curva de Jordan com a componente conexa limitada do complementar desta curva.

Do Teorema do Mapeamento de Riemann e do Teorema de Carathéodory de correspondência de fronteiras²¹², o fecho da componente conexa limitada do complementar de uma curva de Jordan é Conforme, e portanto Homeomorfo, ao círculo fechado $\text{cl} B_1$ com raio 1 e centro na origem do plano complexo. Por outro lado, por projecção estereográfica do plano complexo numa superfície esférica com vértice num seu ponto, e nova projecção estereográfica da superfície esférica no plano, mas com vértice no ponto da superfície esférica diametralmente oposto, o fecho da componente conexa ilimitada do complementar de uma curva de Jordan seccionalmente regular é Homeomorfa a $B_1 \setminus \{0\}$ que, por sua vez, é Homeomorfa a $\mathbb{C} \setminus B_1$. Obtém-se, assim, uma prova simples do **Teorema de Schoenflies**²¹³ **para o plano**: *Um Homeomorfismo de $S^1 = \partial B_1$ numa curva de Jordan J num plano pode ser estendido a um Homeomorfismo do plano no plano, que transforma o círculo aberto limitado por S^1 na região do plano limitada por J e o complementar daquele círculo no fecho da componente conexa ilimitada do complementar de J no plano.*

O Teorema da Curva de Jordan no plano implica que toda curva fechada numa superfície esférica separa-a em duas componentes conexas. Neste caso o Teorema de Schoenflies assegura que os fechos destas componentes complexas são ambos Homeomorfos ao fecho de uma semiesfera.

O Teorema da Curva de Jordan é um caso particular de resultados topológicos conhecidos por **teoremas de separação**. Por exemplo, com base em espaços de Homologia de ordens superiores pode-se provar que uma esfera de dimensão n é separada em duas componentes conexas por qualquer seu subconjunto Homeomorfo a uma esfera de dimensão $n-1$. Contudo, o Teorema de Schoenflies não é válido em geral para $n > 2$ e a sua validade depende do modo como a esfera de dimensão $n-1$ está mergulhada na de dimensão n , o que revela a subtilidade destas questões.

²¹²Ver secção “Regiões simplesmente conexas conformes” no capítulo 10.

²¹³Schoenflies, Arthur (1853-1928).

I.9 Triangulação de superfícies compactas conexas

Como referido na introdução a este apêndice, a 1ª prova de toda superfície compacta conexa ser Triangularizável foi por T. Radó em 1925. Apresenta-se aqui a prova mais simples obtida em 1992 por C. Thomassen.

Chama-se **Superfície** a um espaço topológico tal que todo ponto tem uma vizinhança Homeomorfa a uma bola $B_r(0)$ de \mathbb{R}^2 .

Uma maneira comparativamente fácil de provar que toda Superfície compacta conexa tem Triangulação utiliza Grafos.

Chama-se **Grafo** G à união de dois conjuntos finitos disjuntos $V(G)$ e $E(G)$, com elementos chamados, resp., **vértices** e **lados** de G , tais que a cada lado estão associados 2 vértices distintos, chamados **extremidades** do lado; designa-se um lado com vértices X, Y por XY . A um Grafo subconjunto de um Grafo G chama-se **Subgrafo** de G . Chama-se **caminho** em G a uma sequência finita de lados, com lados consecutivos partilhando uma das extremidades. Chama-se **Ciclo** em G a um caminho com o vértice final coincidente com o inicial. Se G é Grafo e $A \subset G$, $G - A$ é o Grafo obtido de G suprimindo os vértices e os lados em A e os lados em G com uma extremidade num vértice em A . Diz-se que um Grafo G é **conexo** se todo par de vértices pode ser ligado por um caminho em G . Diz-se que um Grafo G é **conexo-2** se é **conexo-2** e para cada vértice X o Grafo $G - \{X\}$ é conexo.

(I.41) *Se H é Subgrafo de Grafo G e ambos são Grafos conexos-2, então G pode ser obtido de H acrescentando sucessivamente um lado de G que ainda não pertence ao Grafo com extremidades vértices deste Grafo.*

Dem. Se $H = G$ não há nada a provar. Se $H \neq G$, como G é conexo, existe algum lado em $G \setminus H$ com extremidades um vértice X em H e outro Y em G . Como G é conexo-2, $G \setminus \{X\}$ é conexo. Considera-se um caminho em $G \setminus \{X\}$ com n° de lados mínimo e extremidades Y e um vértice de H . Um tal caminho γ não tem lados de H devido à condição de minimalidade considerada. O caminho que se obtém começando com XY e prosseguindo com γ tem vértices inicial e final em H e lados fora de H . Adicionando este caminho a H obtém-se um Grafo conexo-2 H' e o n° de lados G fora de H' é menor do que o n° de lados de G fora de H . Repetindo sucessivamente este procedimento, o processo termina quando não há mais lados a adicionar, obtendo-se o Grafo G . Q.E.D.

Diz-se que um Grafo G pode ser **Mergulhado** num espaço topológico T se os vértices de G podem ser biunivocamente representados por pontos de um subconjunto de S e cada lado de G pode ser representado por uma curva simples em S com extremidades os vértices desse lado com cada par lados com no máximo uma extremidade comum. Diz-se que o Grafo Mergulhado em \mathbb{R}^2 é **Grafo Plano** e que um Grafo pode ser Mergulhado em \mathbb{R}^2 é um **Grafo Planar**. Se G é Grafo Plano, as componentes conexas limitadas

de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ chamam-se **Faces** de G e a componente conexa ilimitada chama-se **Face Exterior** de G . Se G é Grafo Plano conexo-2, chama-se **Ciclo Exterior** de G à fronteira da Face Exterior de G .

Se C é curva fechada em \mathbb{R}^2 , designam-se a união das componentes conexas limitadas de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ por **bd C** e o conjunto $C \cup \text{bd } C$ por **$\overline{\text{bd } C}$** .

Se γ_1, γ_2 são curvas de Jordan e G_1, G_2 são Grafos Planos conexos-2 com a união dos resp. lados coincidente com, resp., $\overline{\text{bd } \gamma_1}, \overline{\text{bd } \gamma_2}$, diz-se que G_1, G_2 são **Planarmente Isomorfos** se existe isomorfismo de G_1 em G_2 tal que um Ciclo em G é fronteira de uma Face de G se e só se esse isomorfismo transforma esse Ciclo na fronteira de uma Face de G' e transforma o Ciclo Exterior de G no Ciclo Exterior de G' , e a um tal isomorfismo chama-se **Isomorfismo Planar**.

(I.42) *Se G e G' são Grafos Planos conexos-2 e g é Homeomorfismo e Isomorfismo Planar de G sobre G' , então g pode ser estendido a um Homeomorfismo em todo plano.*

Dem. Se G é um Ciclo, é consequência do Teorema de Schoenflies no final da secção precedente. Caso contrário, de (I.41), existe Subgrafo conexo-2 G_1 de G que contém o Ciclo Exterior de G tal que G obtém-se de G_1 acrescentando um caminho γ em G em $\overline{\text{bd } C}$, com C um Grafo que delimita uma Face de G_1 . Repete-se sucessivamente este procedimento, primeiro a G_1 e depois aos dois Ciclos de $C \cup \gamma$ que contém γ , e prossegue-se com aplicações sucessivas deste processo ao resultado obtido até terminar. *Q.E.D.*

Na prova de existência de Triangulação de qualquer Superfície compacta conexa usa-se a propriedade seguinte de curvas de Jordan que é consequência da compacidade de curvas de Jordan.

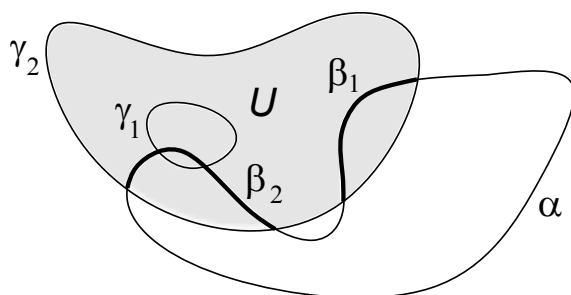


Figura I.7: Arco β_1 de α mau relativamente a γ_2 e arco β_2 de α muito mau relativamente a γ_1 e a γ_2

Se $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$ são curvas de Jordan em \mathbb{R}^2 com γ_1 na região limitada U por γ_2 , diz-se que um **arco β de α é mau relativamente a γ_2** se as suas extremidades são pontos de γ_2 e todos os outros pontos pertencem a U . Diz-se que um **arco β de α é muito mau relativamente a γ_2 e a γ_1** se é mau relativamente a γ_2 e intersecta γ_1 (Figura I.7)).

(I.43) Se $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$ são curvas de Jordan em \mathbb{R}^2 com $\gamma_1 \in \text{bd } \gamma_2$, o conjunto das arcos de α muito maus relativamente a γ_2 e a γ_1 é finito.

Dem. Como γ_1 é subconjunto compacto do conjunto aberto $\text{bd } \gamma_2$, existe cobertura finita de γ_1 por círculos abertos contidos em $\text{bd } \gamma_2$ com centros em pontos de γ_1 . Se houvesse infinitos arcos de α muito maus relativamente a γ_2 e a γ_1 , designando $\{\beta_m\}$ uma sucessão de tais arcos disjuntos, e $\{c_m\}$ uma sucessão das extremidades desses arcos monótona relativamente à orientação positiva de α em relação à região que limita, como $\{c_m\}$ é uma sucessão no conjunto compacto α , tem subsucessão convergente para algum $c \in \alpha$. Como $\{c_m\} \subset \gamma_2$ e γ_2 é conjunto fechado, $c \in \gamma_2 \cap \alpha$. Logo, todo círculo aberto $B(c)$ centrado em c contém algum dos arcos β_m ; com $B(c)$ com raio menor do que a distância de γ_1 a γ_2 , $B(c)$ e, portanto, também β_m não intersecta γ_1 , pelo que β_m não é um arco de α muito maus relativamente a γ_2 e a γ_1 , em contradição com o que se supôs. Portanto, o conjunto dos arcos de α muito maus relativamente a γ_2 e a γ_1 é finito. Q.E.D.

Um conjunto finito $S \subset \mathbb{R}^2$ de polígonos convexos (incluindo a região que limitam) com interiores disjuntos e todos os lados de comprimento 1 com cada aresta de cada polígono identificada com exactamente uma outra aresta do mesmo ou de outro polígono do conjunto é um espaço topológico compacto conexo com a topologia induzida pela de \mathbb{R}^2 e tendo em conta as identificações de lados. Também é um Grafo G cujos vértices e lados são, resp., os vértices e os lados dos polígonos. S é uma **Superfície compacta conexa** se cada vértice tem uma vizinhança Homeomorfa a uma bola $B_r(0)$ de \mathbb{R}^2 . Se sim, diz-se que o Grafo G é **uma Célula-2 Mergulhada** em S . Se todos os polígonos do conjunto são triângulos e o conjunto tem pelo menos 4 triângulos, diz-se que o Grafo G é uma **Triangulação** de S e que S tem uma Triangulação G .

(I.44) Toda Superfície compacta conexa é Homeomorfa a uma Superfície com Triangulação.

Dem. Como a região de \mathbb{R}^2 delimitada por um polígono convexo pode ser Triangularizada, basta provar que S é Homeomorfa a uma Superfície compacta conexa com uma Célula-2 nela Mergulhada.

Para cada $p \in S$ seja $B(p) \subset \mathbb{R}^2$ um círculo Homeomorfo a a uma vizinhança de p em S . Para não sobrecarregar a notação designam-se na mesma pontos correspondentes por um dado Homeomorfismo nessa vizinhança e em $B(p)$; consideram-se em $B(p)$ dois Quadriláteros²¹⁴ $Q_1(p) \subset Q_2(p)$ com p na região delimitada por $Q_1(p)$. Como a Superfície S é compacta existe um

²¹⁴Um **Quadrilátero** é uma curva de Jordan com 4 pontos ordenados de acordo com um sentido em que um caminho fechado simples descreve a curva, que são chamados os **vértices do Quadrilátero**; chama-se **lados do Quadrilátero** aos arcos da curva de Jordan com extremidades dois vértices consecutivos.

subconjunto finito de S , $\{p_1, \dots, p_n\}$ tal que $S = \cup_{j=1}^n \text{bd } Q_1(p_j)$. Reescolhem-se os círculos $B(p_j) \subset \mathbb{R}^2$ de modo a serem disjuntos.

Supõe-se que para um certo k as intersecções de cada par dos Quadriláteros $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_{k-1})$ são conjuntos finitos. A união de $Q_2(p_k)$ com os arcos muito maus de qualquer dos $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_{k-1})$ relativamente a $Q_2(p_k)$ e a um dado Quadrilátero $Q_3(p_k) \subset \text{bd } Q_2(p_k) \setminus (\text{bd } Q_2(p_k) \cup Q_2(p_k))$ é um Grafo G conexo-2. Aplicando (I.41) pode-se obter em $\text{bd } Q_2(p_k)$ uma Grafo G' Planarmente Isomorfo a G com arcos poligonais simples. Aplicando (I.42), estende-se um Isomorfismo Planar de G em G' a um Homeomorfismo em $\overline{\text{bd } Q_2(p_k)}$ que mantém $Q_2(p_k)$ fixo. Este Isomorfismo Planar transforma $Q_1(p_k)$ e qualquer $Q_3(p_k)$ incluído em $\text{bd } Q_2(p_k) \setminus (\text{bd } Q_1(p_k) \cup Q_1(p_k))$ em Quadriláteros, resp., Q'_1, Q'_3 tais que $p_k \in \text{bd } Q'_1 \subsetneq Q'_3$. Para cada $p \in Q'_3$ considera-se um quadrado $R(p)$ centrado em p que não intersecta Q'_1 nem qualquer arco de $Q_1(p_k)$ mau relativamente a $Q_2(p_k)$ que não seja muito mau relativamente a $Q_2(p_k)$ e a $Q_2(p_k)$. A união de um conjunto finito desses quadrados que é cobertura de Q'_3 e não tem qualquer subcobertura própria de Q'_3 é um Grafo Plano conexo-2. O Ciclo Exterior Q''_3 deste Grafo é uma curva poligonal simples em $\text{bd } Q_2(p_k)$ que não intersecta qualquer arco de $Q_1(p_k)$ mau relativamente a $Q_2(p_k)$ que não seja muito mau relativamente a $Q_2(p_k)$ e a $Q_2(p_k)$ e $\text{bd } Q''_3 \supset Q'_1$. $G' \cup Q''_3$ também é Grafo conexo-2. Tendo em conta (I.42), pode-se supor que Q''_3 é um Quadrilátero e $\text{bd } Q''_3 \supset Q'_1$. Substituindo $Q_1(p_k)$ por Q''_3 , obtém-se que as intersecções de cada par dos Quadriláteros $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_k)$ são conjuntos finitos. Portanto, fica provado por indução que tal se verifica para todos $k \in \{1, \dots, n\}$.

$\cup_{j=1}^n Q_1(p_j)$ pode ser visto como um Grafo G em S e a fronteira de cada componente conexa de $S \setminus G$ é um Ciclo C de G ; considera-se um polígono convexo C' com lados de comprimento 1 e vértices em correspondência biunívoca com os vértices de C . A união dos polígonos C' para todas componentes conexas de $S \setminus G$ é uma Superfície compacta conexa S' com uma Célula-2 G' nela Mergulhada que é um Grafo isomorfo a G . Um qualquer isomorfismo do Grafo G em G' pode ser estendido a um Homeomorfismo do conjunto dos pontos de G sobre o conjunto dos pontos de G' . A restrição de um tal Homeomorfismo a cada Ciclo C fronteira de uma componente conexa de $S \setminus G$ é Homeomorfismo de C sobre C' . Mais uma vez do Teorema de Schoenflies, estes Homeomorfismos podem ser estendidos a Homeomorfismos de $\overline{\text{bd } C}$ sobre $\overline{\text{bd } C'}$ e considerando todas estas extensões obtém-se um Homeomorfismo de S sobre S' e, como esta Superfície tem faces que são polígonos convexos, pode ser Triangularizada. Q.E.D.

I.10 Classificação de superfícies compactas conexas orientáveis

O teorema de classificação de superfícies compactas conexas estabelece que cada uma destas superfícies é Homeomorfa a uma superfície esférica a

que se acrescenta um número finito g de Pegas (o *Genus* da superfície), ou outras descrições equivalentes. Tem uma longa história com raízes nos trabalhos de B. Riemann e J. Listing, mas a 1ª formulação de uma classificação de superfícies compactas conexas foi em 1863 por A.F. Möbius que também percebeu a necessidade de considerar superfícies não orientáveis. Seguiram-se outras contribuições para o problema de que se destacam as de C. Jordan em 1866, W. von Dyck em 1888, M. Dehn e P. Heegard em 1907, J. Alexander em 1915, H. Brahana em 1921 e B. Kerékjártó. Até 1925 era usual assumir como óbvio que as superfícies são Triangularizáveis, o que, como já se referiu, só foi provado em 1925 por T. Radó. Em 1992 C. Thomassen apresentou uma prova elementar²¹⁵ que, além da utilização de Triangulações, é combinatória e inclui a prova da validade da Fórmula de Euler. Uma prova semelhante e mais simples de seguir foi apresentada por E. Zeeman em 1966 para superfícies orientáveis e é essa prova que se apresenta aqui²¹⁶.

Se T_1, T_2 são triângulos disjuntos com lados com o mesmo comprimento numa face F de uma Superfície compacta conexa S em que um Grafo G é uma Célula-2 Mergulhada, considera-se a superfície S' obtida eliminando de F os interiores dos triângulos T_1, T_2 e identificando dois a dois os lados destes triângulos, considerados num plano; das identificações possíveis, só se obtém uma superfície orientável identificando os lados dos triângulos considerados com orientações opostas, e diz-se que é obtida de S acrescentando uma **Pega**, pelo que a superfície resultante S' é a superfície de um Toro. Designa-se S_g a superfície obtida de uma superfície esférica S_0 acrescentando $g \in \mathbb{N}$ Pegas.

(I.45) **Teorema de Classificação de Superfícies Compactas Conexas Orientáveis:** *Se S é Superfície compacta conexa orientável e G é uma Triangulação de S com v Vértices, e Lados e f Faces, então S é Homeomorfa a S_g e vale a Fórmula de Euler $v - e + f = 2(1 - g)$.*

Dem. Suprimindo sucessivamente lados de G até obter um subgrafo conexo T de G com um n.º mínimo de lados, este n.º é $e_T = v - 1$. Considera-se também o Grafo D com exactamente 1 vértice em cada Face de G e um par de vértices ligados por um lado precisamente se as fronteiras das faces em

²¹⁵Inclusivamente para superfícies não orientáveis, que não se consideram aqui porque não são necessárias para os capítulos deste livro e complicariam a prova com a necessidade de considerar Pegas Torcidas correspondentes a identificar os lados de T_1, T_2 com a mesma orientação num plano e *Crosscaps* correspondentes a, depois de considerar circunferências C_1, C_2 Homeomorfas às fronteiras de, resp., T_1, T_2 com orientações opostas, identificar com cada ponto $p \in C_1$ não o ponto $q \in C_2$ correspondente através dos Homeomorfismos, mas o ponto diametralmente oposto a q , o que pode ser visto em C. Thomassen, The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces, *The American Mathematical Monthly*, **99** (1992), 116-130. Opta-se aqui por chamar *Crosscap* à superfície com bordo uma curva de Jordan que se acrescenta a uma superfície esférica no lugar em que se retirou um triângulo identificando esse bordo com os lados do triângulo, à semelhança de como se acrescenta uma Pega. Contudo, é frequente que se chame *crosscap* à superfície resultante desse acrescento, que é Homeomorfa ao Plano Projectivo real obtido identificando pontos diametralmente opostos da fronteira de um círculo.

²¹⁶Alexander, James (1888-1971). Brahana, Henry (1895-1972). Kerékjártó, Belá (1898-1946). Zeeman, Erik (1925-2016).

que estão os vértices não partilham um lado de T . Como os vértices de T coincidem com os de G e T não tem ciclos, $S \setminus T$ é conexo e, portanto, o Grafo D é conexo. O Grafo D tem $v_D = f$ vértices e $e_D = e - e_T$ lados, e tanto D como T têm 0 faces, pelo que as correspondentes Características de Euler são $\chi(D) = v_D - e_D = f - (e - e_T)$ e $\chi(T) = v_T - e_T = v - (v - 1) = 1$. Logo, $v - e + f = \chi(T) + \chi(D)$.

Como um Grafo conexo com V vértices contém um subgrafo com $V - 1$ lados e 0 Faces a partir do qual só pode aumentar sucessivamente o nº de faces com a adição de pelo menos um lado, a Característica de Euler de qualquer Grafo conexo C é $\chi(C) \leq 1$ e verifica-se igualdade se e só se o Grafo não tem Faces. Logo $\chi(T) = 1$ e $v - e + f = 1 + \chi(D) \leq 2$, com igualdade se e só se o Grafo D não tem faces. Se for este o caso, podem-se considerar vizinhanças de T e D Homeomorfas a círculos fechados que podem ser expandidas até terem fronteira comum, pelo que a Superfície S é Homeomorfa a S_0 .

Como $v - e + f \leq 2$ e $2 - (v - e + f) = 0$ se e só se S é Homeomorfa a S_0 , se existisse alguma Superfície compacta conexa que não fosse Homeomorfa a S_g com $g = \frac{1}{2}(2 - (v - e + f))$ existiria um valor mínimo de $g \in \mathbb{N}$ em que tal se verificaria. O correspondente Grafo D tem pelo menos 1 Face e, portanto, pelo menos 1 Ciclo que corresponde a uma curva de Jordan em S . Como os vértices do correspondente Grafo T são todos os vértices do correspondente Grafo G , existe um caminho que começa num ponto correspondente a um vértice de D segue uma curva correspondente a parte de um lado de D até chegar a um ponto correspondente à intersecção desse lado com um lado de T , prossegue por uma curva correspondente à união dos lados de T até um ponto em que passa um arco de curva contida num lado de D com extremidade num vértice pertencente a uma componente conexa de $S \setminus T$ que não contém o ponto inicial. Como a Superfície S é orientável, $S \setminus \gamma$ é uma superfície com bordo com duas componentes conexas. Acrescentando superfícies Homeomorfas a Círculos com bordos coincidentes com cada um dos bordos de $S \setminus \gamma$ obtém-se uma Superfície compacta orientável S' em que o Grafo G define mais 2 Faces sem alteração do nº de vértices nem do nº de lados, ou seja com $g' = \frac{1}{2}(2 - (v(S') - e(S') + f(S'))) = g - 1$, em que $v(S'), e(S'), f(S')$ são os nºs de, resp., vértices, lados e faces de S' . Da hipótese de minimalidade de g , a Superfície S' é Homeomorfa a S'_g e, portanto, S é Homeomorfa a S_g , em contradição com o que se supôs. Portanto, toda Superfície compacta conexa orientável S é Homeomorfa a S_g com $g = \frac{1}{2}(2 - (v - e + f))$ para uma Triangulação de S com com nºs de vértices, lados e faces, resp., v, e, f . Q.E.D.

Exercícios

- I.1 Diz-se que duas distâncias d, d' definidas num mesmo conjunto $X \neq \emptyset$ são **distâncias equivalentes** se existem constantes $k, K > 0$ tais que

$$k d(z, w) \leq d'(z, w) \leq K d(z, w), \quad z, w \in X.$$

- a) Mostre que as distâncias na desigualdade acima podem ser trocadas.
- b) Prove: *Topologias definidas num mesmo conjunto por duas distâncias são iguais se e só se as distâncias são equivalentes.*
- I.2 a) Prove que a distância euclidiana entre as projecções estereográficas (ver exercício 1.16) de dois números do plano complexo z e w é $d(z, w) = \frac{2|z-w|}{(|z|^2+1)^{1/2}(|w|^2+1)^{1/2}}$, e de um número do plano complexo z e ∞ é $d(z, \infty) = \frac{2}{(|z|^2+1)^{1/2}}$.
- b) Prove que a função d de a) é uma **distância no plano complexo estendido** \mathbb{C}_∞ . Mostre que esta distância é ≤ 2 e em cada subconjunto limitado do plano complexo é equivalente à distância usual entre números complexos.
- I.3 Considere o modelo de Geometria de Lobatchevski descrito no exercício 10.16.
- a) Determine a **distância de Lobatchevski** entre cada par ordenado de pontos de B_1 de modo às circunferências de Lobatchevski serem conjuntos de pontos equidistantes do ponto fixo, e os hiperciclos com o mesmo par de pontos fixos serem equidistantes. Prove que satisfaz as propriedades gerais de uma distância.
- b) Prove: *O comprimento de um ciclo e a área de um disco com raio r em geometria hiperbólica são, resp., $2\pi \sinh r$ e $4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}$.*
- I.4 Prove: *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, existe uma sucessão $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de Ω com as propriedades seguintes: 1) $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, 2) $K_n \subset K_{n+1}$, 3) se $K \subset \Omega$ é compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$, 4) toda componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ contém uma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.*
- I.5 Prove o **Teorema de Cantor**: *Um espaço métrico (X, d) é completo se e só se para toda sucessão $\{F_n\}$ de subconjuntos fechados não vazios de X , com $F_{n-1} \subset F_n$ para $n \in \mathbb{N}$, e $\text{diam } F_n \rightarrow 0$, a intersecção $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ tem só um ponto, em que $\text{diam } F_n$ designa o **diâmetro** de F_n , $\text{diam } F_n = \sup\{d(x, y) : x, y \in F_n\}$.*
- I.6 Diz-se que uma família de conjuntos \mathcal{F} tem a **propriedade de intersecção finita** se as intersecções de quaisquer suas subfamílias finitas não são vazias.
Prove: *Um subconjunto K de um espaço métrico é compacto se e só se a intersecção de todos os elementos de qualquer família de subconjuntos fechados de K com a propriedade de intersecção finita é não vazia.*
- I.7 Dê uma prova alternativa com os dois exercícios precedentes de: Um espaço métrico é compacto se e só se é completo e totalmente limitado.
- I.8 Prove²¹⁷: *O produto cartesiano de um n° finito de conjuntos compactos é compacto.*
- I.9 Para $S \subset \mathbb{C}$ designa-se por $C(S)$ o conjunto das funções contínuas de S em \mathbb{C} e, se $S = K$ é compacto, define-se $\rho_K(f, g) = \max\{|f(z) - g(z)| : z \in K\}$. Dado um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e uma sucessão $\{K_n\}$ de conjuntos compactos que satisfazem as condições do exercício I.4, define-se para $f, g \in C(\Omega)$ $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{\rho_{K_n}(f, g)}{1 + \rho_{K_n}(f, g)}$.
- a) Prove: $(C(K), \rho_K)$ é um espaço métrico completo .
- b) Prove: $(C(\Omega), \rho)$ é um espaço métrico completo .
- c) Prove: *Uma sucessão em $C(\Omega)$ é convergente se e só se é uniformemente convergente em subconjuntos compactos de Ω .*
- d) Caracterize os subconjuntos compactos de $C(\Omega)$ usando o Teorema de Arzelà-Ascoli.
- e) Prove: $(H(\Omega), \rho)$ é subespaço métrico do espaço em b) e $f \mapsto f'$ é contínua de $H(\Omega)$ em $H(\Omega)$. Caracterize os subconjuntos compactos usando o Teorema de Montel.
- f) Prove: *A topologia definida em $C(\Omega)$, ou em $H(\Omega)$, pela distância ρ é independente da sucessão $\{K_n\}$ considerada.*
- I.10 Para uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ designa-se $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ o conjunto das funções contínuas de Ω em \mathbb{C}_∞ e ρ_∞ a distância definida como ρ no exercício precedente, mas substituindo

²¹⁷A generalização deste resultado para famílias infinitas de conjuntos compactos é o **Teorema de Tikhonov**, estabelecido pela 1ª vez em 1926 por Andrei Nikolaevich Tikhonov (1906-1993).

- a distância usual em \mathbb{C} pela distância usual em \mathbb{C}_∞ , considerada no exercício I.2.
- a) Prove: $(C(\Omega, \mathbb{C}_\infty), \rho_\infty)$ é um espaço métrico completo.
- b) Prove: $(M(\Omega) \cup \{\infty\}, \rho_\infty)$ é um subespaço métrico do espaço anterior.
- c) Prove: Uma família de funções $\mathcal{F} \subset M(\Omega)$ é normal em $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ se e só se $\mu(\mathcal{F}) = \{\mu(f) : f \in \mathcal{F}\}$ é localmente limitada, com $\mu(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $[\mu(f)](z) = 2 \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ se z não é um pólo de f e $[\mu(f)](z) = \lim_{z \rightarrow a} 2 \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ se z é um pólo de f .
- I.11 a) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ compacto, $C(K)$ como no exercício I.9, $P = \mathbb{C}_\infty \setminus K$, $R_P(K)$ o fecho em $C(K)$ do conjunto das restrições a K das funções racionais com pólos em P .
 Prove:
 1) $R_P(K)$ é um espaço linear.
 2) $f, g \in R_P(K) \Rightarrow fg \in R_P(K)$.
 3) $a \in \mathbb{C} \setminus K \Rightarrow \frac{1}{z-a} \in R_P(K)$.
 (Sugestão: Se $\infty \notin P$, mostre que $V = \{a \in \mathbb{C} : \frac{1}{z-a}\}$ é aberto. Se $\infty \in P$, considere a distância usual d em \mathbb{C}_∞ (exercício I.2), escolha a_0 na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus K$ tal que $d(a_0, \infty) \leq \frac{1}{2}d(K, \infty)$, $|a_0| > 2 \max\{|z| : z \in K\}$, defina $P_0 = (P \setminus \{\infty\}) \cup \{a_0\}$ e prove que $\frac{1}{z-a} \in R_{P_0}(K) \subset R_P(K)$).
- b) Prove o **Teorema de Runge**²¹⁸: Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, $K \subset \Omega$ compacto e $P \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ um conjunto com um ponto em cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Se $f \in H(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função racional R com pólos que são os elementos de P tal que $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$.
 (Sugestão: Use a) e o exercício 7.1, e mostre que se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho seccionalmente regular fechado em $\mathbb{C} \setminus K$, existe uma função racional R com todos os pólos na curva γ^* tal que $|\int_\gamma g(w, z) dw - R(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in K$, em que $g(w, z) = \frac{f(w)}{w-z}$, mostrando que existe uma partição finita de $[0, 1]$, $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$, tal que $|g(t, z) - g(t_k, z)| < \frac{\varepsilon}{L^\gamma}$ para t no subintervalo da partição com extremidade direita t_k , e defina $R(z) = \sum_{k=1}^n g(t_k, z)$.
- c) Prove: Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, $P \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ com K compacto, um conjunto com um ponto em cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Se $f \in H(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, existe uma sucessão $\{R_n\}$ de funções racionais com pólos em P tal que $R_n \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω . (Sugestão: Use o exercício I.4).
- d) Prove²¹⁹: Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ conexo. Se $F \in H(\Omega)$, existe sucessão $\{P_n\}$ de funções polinomiais tal que $P_n \rightarrow F$ uniformemente em subconjuntos compactos de Ω .
- e) Prove: Se $B_1 \subset \mathbb{C}$ é o círculo aberto com raio 1 e centro em 0 e $\emptyset \neq K \subsetneq \partial B_1$ é compacto, existe um polinómio P tal que $P(0) = 1$ e $|P| < 1$ em K .
- f) Prove a caracterização das regiões simplesmente conexas seguinte²²⁰: $\Omega \subset \mathbb{C}$ é uma região simplesmente conexa se e só se toda função $f \in H(\Omega)$ pode ser aproximada por funções polinomiais, uniformemente em subconjuntos compactos de Ω .
- I.12 Prove o **Teorema de Mittag-Leffler**²²¹: Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, $A \subset \Omega$ sem pontos limite em Ω , $m : A \rightarrow \mathbb{N}$ e $P_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{m(\alpha)} c_{k,\alpha} \frac{1}{z-a}$, com $c_{k,\alpha} \in \mathbb{C}$, existe $f \in M(\Omega)$ com pólos que são os pontos $a \in A$, com partes principais P_α .

²¹⁸Foi estabelecido em 1885 por C.D. Runge para provar que toda região é domínio de Holomorfia de alguma função. A prova aqui sugerida segue o artigo Grabiner, S., A Short Proof of Runge's Theorem, *Amer. Math. Monthly*, **83** (1976), 807-808. Grabiner, Sandy (1939-).

²¹⁹C.D. Runge não referiu a aproximação de funções Holomorfas por funções polinomiais em regiões simplesmente conexas, embora esta propriedade seja uma consequência directa do resultado que obteve. Em 1897 D. Hilbert provou este caso particular de uma outra forma. Como consequência obtém-se: Toda função Holomorfa num conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo pode ser uniformemente aproximada em K por funções polinomiais. Em 1951 Sergei Margelyan (1928-2008) provou que a hipótese de f ser Holomorfa em K pode ser enfraquecida para ser contínua em K e Holomorfa no seu interior.

²²⁰Ver outras caracterizações em (??).

²²¹Foi estabelecido por M.G. Mittag-Leffler em 1884 (ver o exercício 8.17 para uma prova alternativa no caso $\Omega = \mathbb{C}$).

(Sugestão: Considere uma sucessão $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de Ω como no exercício I.4, defina $A_1 = A \cap K_1$, $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ e $Q_n = \sum_{a \in A_n} P_a$. Aplique o Teorema de Runge do exercício precedente para aproximar Q_n em por uma função racional R_n , a menos de $\frac{1}{2^n}$ e defina $f = Q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n - R_n)$).

- I.13 Seja (X, d) um espaço métrico, d_H a distância de Hausdorff associada e \mathcal{K} o conjunto dos subconjuntos compactos não vazios de X . Prove:
- (a) Se $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0: A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}$ em $Z_\varepsilon = \cup_{z \in Z} \{x \in X: d(z, x) \leq \varepsilon\}$.
- (b) $d_H(A, B) = 0$ com $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ se e só se os fechos de A e B são iguais.
- (c) Se $\text{int}(A \cap B) \neq \emptyset$ com $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, existe $c > 0$ tal que $S \cap Y \neq \emptyset$ para todo $S \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $d_H(S, A) < c$.
- (d) Se (X, d) é compacto, (\mathcal{K}, d_H) é um espaço métrico compacto.
- (e) Se (X, d) é completo, (\mathcal{K}, d_H) é um espaço métrico completo.
- I.14 Prove: Um conjunto S é conexo se e só se não é a união de dois conjuntos não vazios A e B tais que $(\text{cl } A) \cap B = \emptyset = A \cap (\text{cl } B)$.
- I.15 Prove: Um conjunto S é conexo se e só se não existem conjuntos abertos U e V tais que $S \subset U \cup V$, $S \cap V = \emptyset$, $S \cap U \cap V = \emptyset$.
- I.16 Prove: Um conjunto S é conexo se e só se os seus subconjuntos simultaneamente fechados e abertos são só S e \emptyset .
- I.17 Prove: A união de duas bolas abertas $B_r(a)$ e $B_R(A)$ de um espaço métrico é conexa se e só se $|a - A| < r + R$. O que se pode dizer da conexidade da união se uma ou as duas bolas são fechadas.
- I.18 Prove: Se S é um conjunto conexo e T é uma componente conexa do complementar de S , o complementar de T é conexo.
- I.19 a) Prove: O produto cartesiano de conjuntos conexos é conexo.
b) Prove: Se um produto cartesiano de conjuntos é conexo e não vazio, os conjuntos são conexos.
- I.20 a) Dê um exemplo de uma sucessão $\{F_n\}$ de subconjuntos fechados conexos de \mathbb{C} tal que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ não é conexo.
b) Prove: Se $\{F_n\}$ é uma sucessão de subconjuntos fechados conexos de \mathbb{R} tal que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ é conexo.
- I.21 a) Prove: A união de uma sucessão $\{S_n\}$ de conjuntos conexos tais que $S_n \cap S_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é um conjunto conexo.
b) Prove: Se $\{S_n\}$ é uma sucessão de conjuntos que intersectam um mesmo conjunto conexo C , $\cup_{n=1}^{\infty} S_n$ é conexo.
- I.22 Prove: Se S é um conjunto que intersecta um conjunto conexo C e o seu complementar, a fronteira de S intersecta C .
- I.23 a) Prove: Subconjuntos próprios conexos de conjuntos conexos têm fronteira não vazia.
b) O recíproco da afirmação em a) é verdadeiro?
- I.24 Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f: \Omega \rightarrow S^1 = \partial B_1 \subset \mathbb{C}$ é contínua, diz-se que f é uma **função inessencial** se existe uma função contínua $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{iu(z)}$ para $z \in \Omega$; caso contrário diz-se que é uma **função essencial**.
Prove:
- a) Se f_1, f_2 são funções inessenciais com o mesmo domínio, então f_1, f_2 e $\frac{1}{f_1} = \overline{f_1}$ são inessenciais. Se f_1 é função essencial e f_2 é função inessencial com o mesmo domínio, então $f_1 f_2$ e $\frac{f_1}{f_2}$ são essenciais.
- b) Se f é uma função inessencial definida em $\Omega \subset \mathbb{C}$ e g é função complexa contínua com contradomínio em Ω , então $f \circ g$ é inessencial.
- c) Toda função contínua de $\Omega \subset \mathbb{C}$ em S^1 não sobrejectiva é inessencial.

- d) Se $f_1, f_2: \Omega \rightarrow S^1$ são contínuas e $f_1 \neq -f_2$, se f_1 é essencial (resp., inessencial), também f_2 é.
- e) Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto, $f: K \times [0, 1] \rightarrow S^1$ e $z \mapsto f(z, 0)$ é essencial (resp., inessencial), também $z \mapsto f(z, 1)$ é.
- f) Toda função contínua de $\text{cl } B_1$ em S^1 é inessencial.
- g) Se $A, B \subset \mathbb{C}$ são conjuntos fechados, $A \cup B$, $A \cap B$ são conexos e as restrições de função contínua $f = A \cup B \rightarrow S^1$ a A e a B são funções inessenciais, também f é.
- h) $f: S^1 \rightarrow S^1$ é essencial se e só se $\text{Ind}_\gamma(0) \neq 0$, com $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(\theta) = f(e^{i\theta})$.
- I.25 Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ separa os pontos $a, b \in \mathbb{C}$ se estes não pertencem a uma mesma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus S$. Prove:
- a) **Crítério de Eilenberg**²²²: Um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ separa pontos $a, b \in \mathbb{C}$ se e só se a função definida em K por $f(z) = \frac{z-a}{z-b} / \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$ é essencial.
(Sugestão: Use o exercício anterior)
- b) **Teorema de Janiszewski**²²³: Se $A, B \subset \mathbb{C}$ são conjuntos, resp., compacto e fechado, $A \cap B$ é conexo e $a, b \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ são pontos distintos não separados por A nem por B , então $A \cup B$ também não separa os pontos a, b .
(Sugestão: Use a) e o exercício anterior)
- c) O complementar de uma curva simples não fechada em \mathbb{C} é conexo.
(Sugestão: Use a) e o exercício anterior)
- I.26 Prove: $C \subset \mathbb{C}$ é curva de Jordan se e só se os seus pontos são pontos simples da fronteira da região que limita (ver exercício 10.14).
(Sugestão: Prove necessidade com o exercício I.25.b) e suficiência com o exercício 10.13.b.)
- I.27 Prove: A fronteira de qualquer região limitada convexa em \mathbb{C} é curva de Jordan.
(Sugestão: Use o exercício precedente.)
- I.28 Dê uma prova alternativa do Teorema da Curva de Jordan com I.24 e I.25.
(Sugestão: Comece por provar que, se C é uma curva de Jordan em \mathbb{C} , a fronteira de cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C$ é C . Depois considere o caso em que C contém um segmento de recta, prove que $\mathbb{C} \setminus C$ não pode ter mais de duas componentes conexas e, a seguir, que não é conexo. Se C não contém um segmento de recta, escolha dois pontos em C e o segmento de recta que definem considere as curvas de Jordan que se obtêm concatenando este segmento de recta com cada um dos subarcs de C com extremidades nos pontos considerados, e aplique o caso anterior e II.25.b.)
- I.29 Dê uma prova alternativa do Teorema Fundamental da Álgebra²²⁴ com I.24.
(Sugestão: Comece por considerar um polinómio complexo $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ com $\sum_{k=0}^{n-1} |c_k| < 1$, suponha que P não tem zeros e mostre que a restrição de $f = \frac{P}{|P|}$ a S^1 é inessencial, prove que $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$, $F(z, t) = z^n + t \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ é uma Homotopia entre as restrições de $P(z)$ e z^n a S^1 e obtenha uma contradição. Aplique este caso particular a um polinómio qualquer $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ com a mudança de variável $z = aw$ com $a > 0$ grande.)
- I.30 Prove: Se $f: \text{cl } B_1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com B_1 a bola em \mathbb{C} com raio 1 e centro 0 é contínua, existem $a_1, a_2 \in S^1 = \partial B_1$ tais que $f(a_j) = c_j a_j$, $j = 1, 2$, com $c_1 < 0 < c_2$.
(Sugestão: Suponha que não existe a_1 com a propriedade indicada. Mostre que a restrição de f a S^1 é Homotópica a $j: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $j(z) = z$ e obtenha uma contradição com o resultado do exercício I.24.f).
- I.31 Prove o **Teorema de Ponto Fixo de Brouwer**²²⁵ para círculos no plano: Se $f: \text{cl } B_1 \rightarrow \text{cl } B_1$, em que B_1 é a bola em \mathbb{C} com raio 1 e centro em 0, é contínua,

²²² Foi provado em 1936 por Samuel Eilenberg (1913-1998).

²²³ Foi obtido em 1913 por Zygmunt Janiszewski (1888-1920).

²²⁴ Será a 7ª neste livro.

²²⁵ É um caso particular do resultado análogo para qualquer dimensão provado em 1910 por L. Brouwer. Em dimensão 1 é simples consequência do Teorema de Bolzano, ou seja do teorema de valor intermédio para funções contínuas num intervalo.

existe um ponto fixo de f , ou seja um ponto $z \in \text{cl } B_1$ tal que $f(z) = z$.

(Sugestão: Suponha que não existe ponto fixo, obtenha uma função a que possa aplicar o exercício precedente levando a contradição).

I.32 Dê uma prova do Teorema da Curva de Jordan provando as afirmações seguintes²²⁶:

a) *Todo Grafo Planar pode ser Mergulhado em \mathbb{R}^2 com cada lado curva poligonal simples.*

b) O Teorema de Curva de Jordan para curvas de Jordan poligonais $C \subset \mathbb{R}^2$.

(Sugestão: Prove que o n° de componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ não pode ser > 2 e, depois, que para cada $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ se o n° de segmentos de recta ou pontos isolados da intersecção de uma semirecta com origem em p e C (não contando os em que C não atravessa para lados diferentes da semirecta) é par, então é par para todas semirectas com origem em p).

c) Se C é curva de Jordan poligonal, P é curva simples poligonal com extremidades $p, q \in C$ e todos os outros pontos em $\text{bd } C$ e C_1, C_2 são os dois arcos de C com extremidades p, q , então $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ tem três componentes conexas com fronteiras são, resp., $C, C_1 \cup P, C_2 \cup P$.

d) *O Grafo $K_{3,3}$ com vértices em 2 conjuntos de 3 vértices e lados que ligam cada vértice de um dos conjuntos a cada vértice do outro não é Planar.* (Sugestão: Use a, c).

e) Se C é curva de Jordan em \mathbb{R}^2 , então $\mathbb{R}^2 \setminus C$ é desconexo, usando e).

(Sugestão: Considere rectas verticais que intersectam a curva de Jordan C e um arco poligonal em $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\text{bd } C}$ concatenação de um segmento de recta vertical com uma extremidade um dos pontos de C mais à esquerda, um segmento de recta horizontal e um segmento de recta vertical com uma extremidade um dos pontos de C mais à direita. Mostre que se um segmento de recta vertical entre as duas rectas verticais que intersecta C apenas nas extremidades pertencesse a $\mathbb{R}^2 \setminus \text{bd } C$, existiria um Grafo Plano isomorfo a $K_{3,3}$).

f) Se G é um Grafo Plano Conexo-2 com mais de 3 vértices cujos lados são curvas poligonais simples, então $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tem $\#E(G) - \#V(G) + 2$ componentes conexas cada uma com fronteira um Ciclo de G , em que $E(G), V(G)$ são os conjuntos dos, resp., vértices e lados de G (*i.e.* vale a Fórmula de Euler). (Sugestão: Use b), (I.41) e c)).

g) Se G_1, G_2 são Grafos Planos com lados curvas simples poligonais, então $G_1 \cup G_2$ pode ser decomposto numa união de pontos com uma união de segmentos de recta sem extremidades disjuntos, com a união de pontos o conjunto dos vértices e o fecho da união dos segmentos de recta o conjunto dos lados de um Grafo Plano.

h) Se G_1, \dots, G_k são Grafos Planos conexos-2 com lados curvas poligonais com $\#G_j \cap G_{j-1}, \#G_j \cap G_{j+1} \geq 2$ e $G_j \cap G_\ell = \emptyset$ para $\ell \in \{2, \dots, k-1\}$, $G_1 \cap G_k = \emptyset$, para $j \in \{1, \dots, k\}$, então todo ponto na Face Exterior de qualquer $G_j \cup G_{j+1}$ para $j \in \{1, \dots, k-1\}$ pertence à Face Exterior de $\cup_{j=1}^k G_j$.

(Sugestão: Use f), escolha um Ciclo $C \in \cup_{j=\ell}^s G_j$ com $s - \ell$ mínimo e prove que $s - \ell \leq 1$).

i) Se $P \subset \mathbb{R}^2$ é arco simples, $\mathbb{R}^2 \setminus P$ é conexo. (Sugestão: Use continuidade uniforme e h)).

j) O Teorema da Curva de Jordan, com i) e d). (Sugestão: Mostre que se $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tivesse 3 componentes conexas com C curva de Jordan, existiria um Grafo Plano isomorfo a $K_{3,3}$).

²²⁶Embora longa, esta prova é conceptualmente elementar, pois só usa compacidade e aspectos elementares de Grafos. Foi obtida por C. Thomassen em 1992.

Apêndice II

Elementos de integral e medida de Lebesgue

II.1 Introdução

Embora integral e medida de Lebesgue não sejam necessários em quase todo este livro, pois em geral o leitor pode optar por integral de Cauchy, Riemann ou Lebesgue sem inconvenientes, são usados pontualmente nos capítulos 10 e 13 e em um exercício em cada um dos capítulos 6 e 7 sobre transformações de Fourier e de Laplace. Inclui-se este apêndice principalmente para facilitar uma referência imediatamente disponível às noções básicas de integral e medida de Lebesgue, em particular a estudantes com uma boa preparação em Análise Matemática ao nível usual de 2º ou 3º ano na universidade.

Integrais de funções reais ou complexas de variável complexa em subconjuntos de \mathbb{C} são iguais a integrais nos correspondentes subconjuntos de \mathbb{R}^2 e como a teoria é idêntica para funções de variável em \mathbb{R}^n com $n \in \mathbb{N}$ considera-se este contexto mais geral. Na 1ª secção coligem-se propriedades básicas do integral de Lebesgue de funções com valores reais ou complexos definidas em subconjuntos de \mathbb{R}^n , sem provas, as quais podem ser encontradas em livros que abrangem as bases do integral de Lebesgue²²⁷ em \mathbb{R}^n .

A noção de integral de Lebesgue deve-se a H. Lebesgue em 1902 na sua tese de doutoramento com o elegante título *Intégrale, Longueur, Aire*, em que criou a Teoria de Medida e definiu o integral de funções aproximáveis por funções simples constantes em conjuntos mensuráveis excepto possivelmente em subconjuntos com medida nula, através de séries dos valores dessas funções em cada conjunto em que são constantes multiplicados pela medida do conjunto.

A ideia do integral de Lebesgue de uma função com valor e variável real limitada num intervalo limitado, comparativamente à de integral de Riemann introduzida por B. Riemann em 1854, pode ser apreendida geometricamente

²²⁷ Para uma exposição simples *e.g.* o livro do autor *Integrais Múltiplos*, 3ª ed., Texto Editora 1996.

em termos de aproximações do integral pelo de funções simples que só assumem um n° finito de valores. Para o integral de Riemann as aproximações são obtidas particionando o domínio da função num n° finito de subintervalos e somando as áreas dos rectângulos com larguras iguais ao comprimento de cada subintervalo e alturas iguais a um valor assumido pela função no resp. subintervalo. Para o integral de Lebesgue as aproximações são obtidas particionando o contradomínio da função num n° finito de subintervalos, escolhendo uma constante em cada um destes subintervalos e somando o produto dessas constantes pelas medidas das preimagens dos resp. subintervalos; esta ideia, substituindo partições finitas do domínio de uma função por partições finitas do seu contradomínio, requer medida de conjuntos que são preimagens de subintervalos do contradomínio da função, e esta é a razão porque é necessário considerar a medida de conjuntos que não são intervalos.

A definição de integral de Lebesgue de funções com valores de variáveis reais dada por H. Lebesgue começa pela definição de medida de conjuntos e a obtenção de várias das suas propriedades.

Em 1920 F. Riesz apresentou uma definição alternativa que segue a linha da definição do integral de Riemann, através de aproximações da função dada por sucessões não decrescentes de funções em escada com integrais limitados excepto num conjunto de medida nula, apenas por baixo da função considerada (em vez de também por cima, como para integral de Riemann), e o integral da função é definido só pelo limite da sucessão dos integrais das funções em escada consideradas para aproximar a função dada, que existe dado que esta é uma sucessão limitada não decrescente de números reais; logo, em vez de medida de conjuntos gerais esta definição só considera medida de conjuntos com medida nula, que são simplesmente os conjuntos com cobertura numerável por intervalos com soma (para somas infinitas, no sentido de séries) arbitrariamente pequena. O integral de funções que podem ser aproximadas por baixo como indicado é definido simplesmente deste modo, mas sem mais, o processo apenas definiria o integral destas funções, cujo conjunto designamos U , e como uma destas funções pode não ser analogamente aproximada por cima, multiplicando-a por constantes negativas daria uma função não integrável; logo, para se ter um espaço linear real de funções integráveis, como é usual, toma-se a expansão linear de U que, como U é fechado para a adição de funções, é um conjunto L das diferenças de elementos de U , com o integral definido de modo a ser transformação linear definida em L e, portanto, para $f = u_1 - u_2$ com $u_1, u_2 \in U$, o integral de f é definido pela diferença dos integrais de u_1 e u_2 .

Com este processo, a definição do integral de Lebesgue é simplificada seguindo a linha de definição de integral de Riemann, com a vantagem de ser baseada, pela própria definição, na troca de limites com integrais e, portanto, está directamente relacionada com a questão prática de troca de limites com integrais. Neste quadro, as definições de conjunto mensurável e medida de Lebesgue obtêm-se da definição do integral de Lebesgue e não o contrário.

II.2 Propriedades de integral e medida de Lebesgue

O espaço das funções com valores reais integráveis à Lebesgue $L(S)$, com $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, pode ser definido em 3 passos de funções:

- (1) **Funções limite superior** num intervalo (possivelmente ilimitado) $I \subset \mathbb{R}^n$, $U(I)$: As funções integráveis são os limites q.t.p. em I de uma sucessão não decrescente de funções em escada em I com a sucessão dos seus integrais majorada, e os seus integrais são os limites das sucessões dos integrais das correspondentes funções em escada ($U(I)$ é fechado para a soma e para a multiplicação por números reais não negativos, mas não por números negativos).
- (2) Funções definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, $L(I)$: As funções integráveis são $f = u - v$ com $u, v \in U(I)$ e os seus integrais são $\int_I f = \int_I u - \int_I v$ ($L(I)$ é espaço linear real e o integral é uma transformação linear de $L(I)$ em \mathbb{R}).
- (3) Funções definidas num conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, $L(S)$: As funções integráveis são as com extensão \tilde{f} a \mathbb{R}^n com 0 fora de S são integráveis no intervalo \mathbb{R}^n e os seus integrais são $\int_S f = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}$.

O integral de Lebesgue de funções com valores complexos em $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ é o número complexo com parte real e imaginária igual aos integrais da parte, resp., real e imaginária da função, sempre que existam; o conjunto das funções com valores complexos integráveis também se designa $L(S)$.

Se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, $L(S)$ é espaço linear com a adição e a multiplicação por escalares usuais definidas ponto a ponto, real ou complexo conforme se consideram funções com valores reais ou complexos (neste último caso pode ser considerado, em alternativa, como espaço linear real), e $f \mapsto \int_S f$ é uma transformação linear de $L(S)$ em, resp., \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Dada uma $f \in L(S)$ (possivelmente com valores reais) e com $z = \int_S f$, existe $w \in \mathbb{C}$ com $|w|=1$ tal que $wz = |z|$. Logo,

$$\left| \int_S f \right| = |z| = \int_S wf = \int_S \operatorname{Re}(wf) \leq \int_S |f|.$$

Portanto, $\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f|$ para $f \in L(S)$.

O que se segue só corresponde a assegurar que aplicando a funções integráveis com valores reais o mesmo processo utilizado para definir integral a partir do integral de funções em escada não leva a funções adicionais.

Teorema de Convergência Monótona de Levi²²⁸: Se $\{f_m\} \subset L(S)$ é sucessão de funções com valores reais monótona q.t.p. em S e $\{\int_S f_m\}$ é limitada, então $f = \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m$ q.t.p. em S existe, $f \in L(S)$ e $\int_S f = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_S f_m$.

Este resultado é útil para identificar integrabilidade, bem como a sua consequência seguinte.

²²⁸Levi, Bepo (1875-1961).

Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue: Se $\{f_m\} \subset L(S)$ e f, h são funções definidas em S com $f_m \rightarrow f$ q.t.p. em S , $|f_m| \leq h \in L(S)$ q.t.p. em S , então $f \in L(S)$, a sucessão $\{\int_S f_m\}$ converge e $\int_S f = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_S f_m$.

Um corolário imediato deste resultado é:

Se $\{f_m\} \subset L(S)$ e f, h são funções definidas em S com $f_m \rightarrow f$ q.t.p. em S e $|f| \leq h \in L(S)$ q.t.p. em S , então $h_m = \max(\min(f_m, h), -h) \rightarrow f$, a sucessão $\{\int_S h_m\}$ converge q.t.p. em S , $f \in L(S)$ e $\int_S f = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_S f_m$.

Uma consequência imediata do Teorema de Convergência Monótona de Levi é: $f = 0$ q.t.p. em $S \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow |f| \in L(S), \int_S |f| = 0$.

Chama-se **função mensurável em \mathbb{R}^n** a uma função definida em \mathbb{R}^n que é q.t.p. o limite de uma sucessão de funções em escada em \mathbb{R}^n (i.e. funções 0 fora de um intervalo compacto e em escada nesse intervalo).

Se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que S é **conjunto mensurável** se a função característica χ_S (1 em S e 0 fora de S) é mensurável. Se S é mensurável, a **medida de Lebesgue** de S a $\mu(S) = \int_S \chi_S$ se o integral existe, e se não existe diz-se que a medida de S é ∞ . Define-se que \emptyset é mensurável e $\mu(\emptyset) = 0$.

Em consequência, conjuntos de medida nula são mensuráveis, complementares e uniões ou intersecções finitas de conjuntos mensuráveis são mensuráveis, subconjuntos abertos ou fechados de \mathbb{R}^n são mensuráveis.

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ e \mathcal{I}_S é o conjunto das coberturas numeráveis de S por intervalos de \mathbb{R}^n e $|I|$ designa o volume- n de um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. o produto dos comprimentos das arestas de I), chama-se **medida exterior de Lebesgue de S** a $\mu^*(S) = \inf_{\{I_n\} \in \mathcal{I}_S} \sum_n |I_n|$.

As propriedades seguintes são imediatas da definição:

1. $A \subset B \subset \mathbb{R}^n \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
2. $A_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N} \implies \mu^*(\cup_k A_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)$.
3. $A \subset \mathbb{R}^n \implies \mu^*(A) = \inf\{\mu^*(X) : A \subset X, X \subset \mathbb{R}^n \text{ é aberto}\}$.
4. $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável $\implies \mu^*(A) = \mu(A)$.
5. $\{]c_k, d_k[\}$ é o conjunto das componentes conexas de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R} \implies \mu^*(U) = \sum_k (d_k - c_k)$.
6. $A \subset \mathbb{R}, a < b < c \implies \mu^*(A \cap]a, c[) = \mu^*(A \cap]a, b[) + \mu^*(A \cap]b, c[)$.

Chama-se **função mensurável num conjunto mensurável $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$** a $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ limite q.t.p. em S de uma sucessão de funções em escada em \mathbb{R}^n ; designa-se o conjunto das funções mensuráveis em S por $M(S)$.

Se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, $M(S)$ é um subespaço linear do espaço linear das funções de S em \mathbb{R} , pois é $\neq \emptyset$ (contém a função 0) e satisfaz as propriedades de fecho das operações no espaço linear \mathbb{R}^S .

É imediato das definições que se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável e $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $f_1, \dots, f_m \in M(S)$ e h é definida em S por $h(\mathbf{x}) = \varphi(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, então $h \in M(S)$. Em particular, se $f, g \in M(S)$, então

$f \pm g, fg, |f|, \max(f, g), \min(f, g), f^+ = \max(f, 0), f^- = -\min(f, 0) \in M(S)$,

e se, adicionalmente, $g \neq 0$ q.t.p. em S , então $\frac{f}{g} \in M(S)$. Se $\{f_m\} \subset M(S)$ e $f_m \rightarrow f$ q.t.p. em S , então $f \in M(S)$.

Portanto, $M(S)$ é fechado em relação às operações algébricas usuais, e em geral a composição com funções contínuas e a limites de sucessões, o que simplifica muito a identificação de funções e conjuntos mensuráveis²²⁹.

A identificação da integrabilidade de uma função mensurável num conjunto mensurável é facilitada pelas propriedades seguintes, em que $S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável:

1. Se $f \in L(S)$ e $T \subset S$ é mensurável, então $f \in L(T)$.
2. Se $f \in M(S)$ e $|f| \leq g \in L(S)$ q.t.p. em S , então $f \in L(S)$.
3. Se $f \in M(S)$, então $f \in L(S)$ se e só se $|f| \in L(S)$.

As provas destes resultados são simples uma vez provado o Teorema de Convergência Monótona de Levi, seguindo a ordem indicada e usando os resultados anteriores e os passos de definição do integral indicados no início.

Se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, a função $f \mapsto \int_S \|f\|$ é uma norma no espaço linear das funções integráveis em S com as operações usuais, no caso do integral de Lebesgue com as funções iguais q.t.p. identificadas, que se designa $L^1(S)$; designa-se esta norma por $\|f\|_{L^1}$.

Define-se analogamente o espaço $L^2(S)$ das funções f tais que $|f|^2 \in L^1(S)$ considerado como espaço euclidiano com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_S f \bar{g}$, e, portanto, com norma $\|f\|_{L^2} = \| |f|^2 \|_{L^1} = \int_S \|f\|^2$.

Teorema de Riesz-Fisher²³⁰: Se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, os espaços normados $L^1(S)$ e $L^2(S)$ são completos, e para toda sucessão $\{f_m\}$ que converge num destes espaços para f , é $f_m(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ q.t.p. para $\mathbf{x} \in S$.

Dem. Seja $p = 1$ ou $p = 2$. Se $\{f_m\}$ é sucessão de Cauchy em $L^p(S)$, para alguma subsucessão $\{f_{m_j}\}$ é $\|f_m - f_{m_j}\|_{L^p} \leq 2^{-j(1+\frac{1}{p})}$ para $m \geq m_j$. Com $g_j = f_{m_{j+1}} - f_{m_j}$, é

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_S 2^{jp} |g_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp} \|g_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp} 2^{-j(p+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j},$$

e, do Teorema de Convergência Monótona de Levi, $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp} |g_j|^p$ converge q.t.p. em S para alguma função $h \in L^1(S)$. Como $|g_j| \leq 2^{-j} h^{\frac{1}{p}}$ q.t.p. em S ,

$$|f_{m_{j+k}} - f_{m_j}| \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} |g_{j+\ell}| \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^{-(j+\ell)} h^{\frac{1}{p}} = 2^{1-j} h^{\frac{1}{p}}, \quad \text{q.t.p. em } S.$$

Quando $j \rightarrow +\infty$ o último termo desta expressão tende para 0 q.t.p. em S , e, portanto, q.t.p. para $\mathbf{x} \in S$ a sucessão numérica $\{f_{m_j}(\mathbf{x})\}$ é de Cauchy e

²²⁹ A construção de conjuntos ou funções não mensuráveis é complicada sem assumir o Axioma de Escolha. Em 1970 Robert Solovay (1938-) provou que não é possível no quadro usual da teoria de conjuntos, ou seja com a axiomática de Zermelo-Fraenkel, provar a existência de subconjuntos de \mathbb{R} não mensuráveis à Lebesgue, embora G. Vitali tivesse dado um 1º exemplo de conjunto não mensurável em 1905 assumindo adicionalmente o Axioma de Escolha. Contudo, a existência de conjuntos não mensuráveis não implica o Axioma de Escolha.

²³⁰ Fischer, Ernst (1875-1950).

converge para um número que se designa $f(\mathbf{x})$; nos pontos \mathbf{x} em que essa sucessão diverge, define-se $f(\mathbf{x}) = 0$. Logo, *toda sucessão de Cauchy em $L^p(S)$ converge q.t.p. em S para alguma função f .*

Resta provar que $f_m \rightarrow f$ em L^p . Fazendo $k \rightarrow +\infty$ nas desigualdades acima, $|f - f_{m_j}| \leq 2^{1-j} h^{\frac{1}{p}}$ q.t.p. em S , e

$$\int_S |f - f_{m_j}|^p \leq 2^{(1-j)p} \int_S h = 2^{(1-j)p} \|h\|_{L^1}.$$

Logo, $\|f - f_{m_j}\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow +\infty$ e, da Desigualdade Triangular,

$$\|f_m - f\|_{L^p} \leq \|f_m - f_{m_j}\|_{L^p} + \|f_{m_j} - f\|_{L^p}.$$

Para $m \geq m_j$ é $\|f_m - f\|_{L^p} \leq 2^{-j(1+\frac{1}{p})} + \|f_{m_j} - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow +\infty$, e, portanto, $\|f_m - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow +\infty$. Conclui-se que toda sucessão de Cauchy em $L^p(S)$ é convergente neste espaço. *Q.E.D.*

Se $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável à Jordan²³¹, o conjunto das funções iguais q.t.p. a funções integráveis à Riemann em S é subconjunto de $L(S)$, com os valores dos integrais dessas funções nos dois sentidos iguais.

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável à Jordan, $L^1(S)$ é o menor espaço normado completo que contém o espaço das funções integráveis à Riemann em S com a norma indicada, pelo que a extensão do integral de Riemann para o de Lebesgue num conjunto mensurável à Jordan é análoga à dos números racionais para os números reais, e igualmente natural.

Sob hipóteses bastante gerais as funções definidas por integrais

$$F(\mathbf{x}) = \int_S f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

com f definida em $S \times A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ são contínuas e diferenciáveis, e derivadas parciais trocam com o integral (Regra de Leibniz), em consequência dos resultados de convergência enunciados, em que para estabelecer a regra de Leibniz para derivadas de F também se usa o Teorema do Valor Intermédio do Cálculo Diferencial de uma variável real para estimar acréscimos de F nas razões incrementais que definem as derivadas parciais.

Para $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{\mathbf{x}}$ e $f^{\mathbf{y}}$ são definidas por, resp., $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $f^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ em, resp., B e A , para, resp., $\mathbf{y} \in B$ e $\mathbf{x} \in A$ fixos.

Se S é mensurável, para cada $\mathbf{x} \in A$ a função $f_{\mathbf{x}}$ é mensurável em S , existe $h \in L(S)$ tal que $|f_{\mathbf{x}}| \leq h$ q.t.p. em S e a função $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é contínua em A q.t.p. para $\mathbf{y} \in S$, então para cada $\mathbf{x} \in A$ o integral na fórmula acima que define F existe e F é contínua em A .

Regra de Leibniz: Se $\text{int } A \neq \emptyset$, $f_{\mathbf{x}} \in L(S)$ e existe $h \in L(S)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ existe e $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq h(\mathbf{y})$ q.t.p. para $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{x} \in \text{int } A$, então $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ existe para todo $\mathbf{x} \in \text{int } A$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_S \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

²³¹ $S \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável à Jordan se tem fronteira que pode ser coberta por uniões finitas de retângulos com somas de n -volumes arbitrariamente pequenas. o nome "mensurável" é tradicional, embora não corresponda a qualquer medida no sentido usual.

Os integrais de funções integráveis em subintervalos de \mathbb{R}^n podem ser obtidos por integrais iterados em subconjuntos das variáveis independentes, inclusivamente por n integrais iterados em intervalos de \mathbb{R} .

Teorema de Fubini²³²: Se $A \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^p$ são intervalos e $f \in L(A \times B)$, então: $f_{\mathbf{x}} \in L(B)$ q.t.p. para $\mathbf{x} \in A$, $f^{\mathbf{y}} \in L(A)$ q.t.p. para $\mathbf{y} \in B$, $\mathbf{x} \mapsto \int_B f_{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{y} \mapsto \int_A f^{\mathbf{y}}$ são integráveis, resp., em A e B , e

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left[\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int_B \left[\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

A prova deste resultado é mais elaborada do que as dos enunciados anteriores e pode ser feita com aproximações por funções em escada e utilizando o resultado seguinte: se $S \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tem medida nula, então as secções cartesianas $S_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S\}$ e $S^{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S\}$ têm medida nula em, resp., \mathbb{R}^p e \mathbb{R}^m , q.t.p. para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, que pode ser provado utilizando o Teorema de Convergência Monótona de Levi.

O resultado que se segue é útil para facilitar a aplicação do Teorema de Fubini, pois permite concluir sobre a integrabilidade a partir de mensurabilidade e da existência de integrais iterados do valor absoluto da função.

Teorema de Tonelli²³³: Se $A \in \mathbb{R}^m$ e $B \in \mathbb{R}^p$ são intervalos, $f \in M(A \times B)$ e pelo menos um dos integrais iterados seguintes existe, então $f \in L(A \times B)$,

$$\int_A \left[\int_B |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}, \quad \int_B \left[\int_A |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}.$$

A prova deste teorema pode ser feita considerando funções em escada $s_k = k$ na bola de raio k com a norma $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\infty}$ para $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ e $s_k = 0$ fora desta bola e as funções $f_k = \min(s_k, |f|)$, $k \in \mathbb{N}$, aplicando o Teorema de Fubini a cada função f_k e obtendo do Teorema de Convergência Monótona de Levi que $|f| \in L(A \times B)$; como $f \in M(A \times B)$ é $f \in L(A \times B)$.

Teorema de Mudança de Variáveis de Integração:

Se $S, T \subset \mathbb{R}^n$ são abertos, $\mathbf{g}: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma mudança de variáveis C^1 injectiva q.t.p. em T , $S \subset \mathbf{g}(T)$ é mensurável e $f \in L(S)$, então

$$\int_S f = \int_{\mathbf{g}^{-1}(S)} (f \circ \mathbf{g}) |\det D\mathbf{g}|.$$

A prova é elaborada, mas para certas mudanças de variáveis, como as definidas por funções afins ou com simetria esférica, é simples.

II.3 Teorema de densidade de Lebesgue

Se $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $B_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ designa a bola aberta com centro em \mathbf{x} e raio $r > 0$ a **densidade de \mathbf{x} em A** é $d_A(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu^*(A \cap B_r(\mathbf{x}))}{\mu(B_r(\mathbf{x}))}$. Diz-se que \mathbf{x} é **ponto de densidade de A** se $d_A(\mathbf{x}) = 1$.

Por exemplo, para um quadrado em \mathbb{R}^2 a densidade de um ponto no quadrado é 1, 0, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ conforme o ponto é, resp., interior, exterior, de um dos lados mas não um vértice ou um vértice do quadrado.

²³²Fubini, Guido (1879-1943).

²³³Tonelli, Leonida (1885-1946).

O resultado seguinte foi obtido por H. Lebesgue em 1910. A prova mais simples que se segue é de W. Sierpiński²³⁴ em 1917.

(II.1) **Teorema de Densidade de Lebesgue em \mathbb{R}^n :** Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $D = \{p \in A : p \text{ é ponto de densidade de } A\}$, $N \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus D$ tem medida nula.

Dem. Designa-se N_k o conjunto dos $\mathbf{x} \in A$ tais que $\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu^*(A \cap B_r(\mathbf{x}))}{\mu(B_r(\mathbf{x}))} < 1 - \frac{1}{k}$ e $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Para provar $\mu(N) = 0$ basta provar $\mu(N_k) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$. Se um conjunto N_k é ilimitado, é união numerável de subconjuntos limitados, e basta provar que tais conjuntos limitados têm medida nula. Para simplicidade de notação, designa-se N_k um qualquer de tais conjuntos limitados e $\mu^*(N_k) \in \mathbb{R}$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Existe um conjunto aberto $U \supset N_k$ tal que $\mu^*(U) < \mu^*(N_k) + \varepsilon$. Para $\mathbf{x} \in N_k$ existe $r > 0$ arbitrariamente pequeno tal que $\frac{\mu^*(A \cap B_r(\mathbf{x}))}{\mu(B_r(\mathbf{x}))} < 1 - \frac{1}{k}$. Como $N_k \subset A \cap U$, existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}) \subset U$ e $\mu^*(N_k \cap B_r(\mathbf{x})) < (1 - \frac{1}{k})\mu(B_r(\mathbf{x}))$.

Como \mathbb{R}^n é separável, existem sucessões $\{\mathbf{x}_j\} \subset U$ e $\{r_j\} \subset]0, +\infty[$ tais que $S_j \stackrel{\text{def}}{=} B_{r_j}(\mathbf{x}_j) \subset U$ e $N_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, pelo que

$$\mu^*(N_k \cap S_j) < (1 - \frac{1}{k})\mu(S_j), \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \geq \mu^*(N_k).$$

Logo, para $J \in \mathbb{N}$ grande $\mu(\bigcup_{j=1}^J S_j) \geq \mu^*(N_k) - \varepsilon$. Reordenam-se r_1, \dots, r_K por ordem decrescente (em sentido lato) e consideram-se $n_1, \dots, n_\ell \in \{1, \dots, J\}$ tais que $n_1 = 1$ e n_{j+1} é o menor dos elementos de $\{1, \dots, J\}$ tal que $S_{n_{j+1}}$ não intersecta $\bigcup_{m=1}^j S_{n_m}$, até que não haja n_{j+1} que satisfaça esta condição, pelo que $\ell \leq J$. Seja $S'_j = B_{3r_j}(\mathbf{x}_j)$. Se $\mathbf{y} \in S_j$ e j não é um dos índices n_1, \dots, n_ℓ , o conjunto S_j tem um ponto \mathbf{z} comum com algum S_{n_s} com $n_s < j$, pelo que $r_{n_s} \geq r_j$; com a norma do produto interno canónico em \mathbb{R}^n ,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_{n_s}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_{n_s}\| \leq 2r_j + r_{n_s} \leq 3r_{n_s};$$

logo, $\mathbf{y} \in S'_{n_s}(\mathbf{x}_{n_s})$, e $S_j \subset S'_{n_s}(\mathbf{x}_{n_s})$. Portanto, $\bigcup_{j=1}^J S_j \subset \bigcup_{s=1}^{\ell} S'_{n_s}$.

Com $R \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=1}^{\ell} S_{n_s} \subset U$,

$$3^n \mu(R) = 3^n \sum_{s=1}^{\ell} \mu(S_{n_s}) = \sum_{s=1}^{\ell} \mu(S'_{n_s}) \geq \mu\left(\bigcup_{s=1}^{\ell} S'_{n_s}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^J S_j\right) \geq \mu^*(N_k) - \varepsilon.$$

$$\mu^*(R \cap N_k) \leq \sum_{s=1}^{\ell} \mu^*(S_{n_s} \cap N_k) < \sum_{s=1}^{\ell} (1 - \frac{1}{k})\mu(S_{n_s}) = (1 - \frac{1}{k})\mu(R).$$

Como $R \setminus N_k \subset U \setminus N_k$ e $N_k \subset U$,

$$\mu(R) - \mu^*(R \cap N_k) \leq \mu(U) - \mu^*(U \cap N_k) = \mu(U) - \mu^*(N_k) < \varepsilon;$$

com a última desigualdade do período precedente, $\mu(R) \leq (1 - \frac{1}{k})\mu(R) + \varepsilon$ e, portanto, $\mu(R) \leq k\varepsilon$, e agora com a 1ª desigualdade do período precedente, $\mu^*(N_k) \leq 3^n \mu(R) + \varepsilon \leq (3^n k + 1)\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $\mu^*(N_k) = 0$. Logo, cada N_k tem medida nula e, portanto, também N tem medida nula. *Q.E.D.*

²³⁴Sierpiński, Waclaw (1882-1969).

Apêndice III

Invariância de integral de campo vectorial fechado com homotopia

Inclui-se este apêndice para possível benefício de leitores que podem não ter visto uma prova da invariância de integrais de linha de campos vectoriais fechados em caminhos homotópicos seccionalmente regulares estabelecida com o Teorema de Green em \mathbb{R}^2 , que é usado na seção do capítulo 4 “Índice de caminhos fechados e homotopia de caminhos” para provar a invariância do Índice de caminhos fechados seccionalmente regulares Homotópicos em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ relativamente a pontos fora do conjunto.

Não é diferente provar esta propriedade em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^n para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Portanto, considera-se este quadro mais geral.

Homotopia de caminhos num subconjunto aberto S de \mathbb{R}^n é definida como na seção do capítulo 4 mencionada, com $S \subset \mathbb{R}^n$ em vez de $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Diz-se que $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, com componentes campos escalares (f_1, \dots, f_n) , é **campo vectorial fechado** em S se é C^1 e as derivadas cruzadas são iguais em S , i.e. $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S$, que é uma condição necessária bem conhecida para \mathbf{f} ser um gradiente em S .

(III.1) *Integrais de linha de campos vectoriais fechados num aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ em caminhos seccionalmente regulares Homotópicos em S são iguais.*

Dem. É mais fácil provar se a Homotopia $\mathbf{H}: R \stackrel{def}{=} [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S$ de caminhos seccionalmente regulares $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2: [a, b] \rightarrow S$ é C^2 . Por isso, considera-se 1º este caso. Como o integral de linha de \mathbf{f} num caminho \mathbf{g}_j é, por definição, $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_1 = \int_a^b \mathbf{f}(g_1(t)) \cdot \mathbf{g}'_1(t) dt$ e $H(t, 0) = \mathbf{g}_1$, $H(t, 1) = \mathbf{g}_2$,

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_1 = \int_a^b \mathbf{f}(H(t, 0)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, 0) dt, \quad \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_2 = \int_a^b \mathbf{f}(H(t, 1)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, 1) dt,$$

Com

$$P(t, s) = \mathbf{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, s), \quad Q(t, s) = \mathbf{f}(H(t, s)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}(t, s), \quad \mathbf{F} = (P, Q),$$

o campo vectorial $\mathbf{F}: R \rightarrow \mathbb{R}^2$ é C^1 e do Teorema de Green,

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial s} \right) dt ds = \int_{\partial R} P dt + Q ds,$$

em que o integral de linha no lado direito é num caminho seccionalmente regular fechado simples no sentido positivo em relação a pontos de int R . É

$$\frac{\partial P}{\partial s} = (Df \circ H) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{f} \circ H) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial s \partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = (Df \circ H) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} + (\mathbf{f} \circ H) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t \partial s},$$

Como \mathbf{f} é campo fechado, a matriz jacobiana Df é simétrica, e, portanto, os 1ºs termos nos lados direitos das duas igualdades são iguais, e como \mathbf{H} é C^2 , os 2ºs termos nos lados direitos das igualdades também são iguais; portanto, $\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial s} = 0$ in R . Logo,

$$0 = \int_{\partial R} P dt + Q ds = \int_a^b \mathbf{f}(H(t, 0)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, 0) dt + \int_0^1 \mathbf{f}(H(b, s)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}(b, s) ds \\ - \int_a^b \mathbf{f}(H(t, 1)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, 1) dt - \int_0^1 \mathbf{f}(H(a, s)) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s}(a, s) ds.$$

Se $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ são caminhos fechados, então $\mathbf{H}(a, s) = \mathbf{H}(b, s)$ para $s \in [0, 1]$ e, portanto, o 2º e o 4º integrais no lado direito da igualdade são iguais; se $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ não são caminhos fechados com pontos inicial e final, resp., A, B , então $\mathbf{H}(a, s) = A$, $\mathbf{H}(b, s) = B$ e esses integrais anulam-se; portanto, em ambos casos

$$0 = \int_{\partial R} P dt + Q ds = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_1 - \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_2.$$

Logo, os integrais nos caminhos Homotópicos são iguais $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_1 = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_2$.

Se a Homotopia \mathbf{H} de \mathbf{g}_1 a \mathbf{g}_2 não é C^2 , a ideia é aproximá-la por uma função indefinidamente diferenciável \mathbf{H}_ε uniformemente convergente para \mathbf{H} quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e usar a validade da propriedade de invariância estabelecida para Homotopias C^2 para obter no limite a sua validade para \mathbf{H} . Começa-se por estender $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ para \mathbb{R} de modo a serem contínuas e constantes em $]-\infty, a]$ e $[b, +\infty[$, e estendendo \mathbf{H} para \mathbb{R}^2 começando por estendê-la para $[a, b] \times \mathbb{R}$ de modo a para cada $t \in [a, b]$ as restrições a $\{t\} \times]-\infty, 0]$ e a $\{t\} \times [1, +\infty[$ serem contínuas e constantes, e depois estendendo-a a \mathbb{R}^2 de modo a ser periódica na 1ª variável com período $b-a$. Prova-se no resultado a seguir à presente que as extensões $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{H}$ podem ser arbitrariamente aproximadas por funções C^∞ $\mathbf{g}_{1,\varepsilon}, \mathbf{g}_{2,\varepsilon}, \mathbf{H}_\varepsilon$ uniformemente convergentes para, resp., $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{H}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e as restrições de \mathbf{H}_ε a R são Homotopias C^∞ de caminhos em S que são restrições $\mathbf{h}_{1,\varepsilon} = \mathbf{H}_\varepsilon[a, b] \times \{0\}$ $\mathbf{h}_{2,\varepsilon} = \mathbf{H}_\varepsilon[a, b] \times \{1\}$. Como os caminhos iniciais $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ definidos em $[a, b]$ e \mathbf{H} definida em R são funções contínuas definidas em conjuntos compactos, os seus contradomínios são subconjuntos compactos de S . Logo, existe $\delta > 0$ tal que os conjuntos dos pontos cuja distância a cada um desses contradomínios é $\leq \delta$ são conjuntos compactos contidos em S e para $\varepsilon > 0$ pequeno os contradomínios de $\mathbf{g}_{1,\varepsilon}, \mathbf{g}_{2,\varepsilon}, \mathbf{H}_\varepsilon$ também estão contidos em S e a distância dos pontos nos contradomínios de $\mathbf{g}_{1,\varepsilon}, \mathbf{h}_{1,\varepsilon}$ a pontos do cotradomínio de \mathbf{g}_1 é $\leq \delta$ e analogamente para $\mathbf{g}_{2,\varepsilon}, \mathbf{h}_{2,\varepsilon}$ e \mathbf{g}_2 . As funções $\mathbf{G}_{j,\varepsilon}: R \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\mathbf{G}_{j,\varepsilon}(t, s) = (1-s)\mathbf{g}_{j,\varepsilon}(t) + s\mathbf{h}_{j,\varepsilon}(t)$, $j \in \{1, 2\}$ são Homotopias C^∞ de $\mathbf{g}_{j,\varepsilon}$ para $\mathbf{h}_{j,\varepsilon}$ em S e, da invariância de integrais de linha de campos vectoriais fechados com Homotopias C^2 provada no parágrafo precedente,

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_{1,\varepsilon} = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{h}_{1,\varepsilon} = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{h}_{2,\varepsilon} = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_{2,\varepsilon}.$$

Para $j \in \{1, 2\}$, como \mathbf{g}_j é um caminho seccionalmente regular, $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_{j,\varepsilon}$ é uma soma finita de integrais em subintervalos fechados de $[a, b]$ em que \mathbf{g}_j é C^1 . Como a convergência das aproximações consideradas para os resp. limites quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é uniforme nos resp. domínios, $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_{j,\varepsilon}$. Como, do período precedente, $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_{1,\varepsilon} = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_{2,\varepsilon}$, é $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_1 = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g}_2$, i.e. também há invariância de integrais de linha de campos vectoriais fechados em caminhos Homotópicos para Homotopias que não são C^2 . *Q.E.D.*

(III.2) **Molificação:** *Toda função limitada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ com conjunto de pontos de descontinuidade com medida nula pode ser aproximada quando $\varepsilon \rightarrow 0$ por funções C^∞ $\mathbf{f}_\varepsilon : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ para algum $\varepsilon > 0$, com:*

1. *If $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, então $\|\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x})\| \leq M$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.*
2. *Se a derivada parcial de uma componente escalar de \mathbf{f} existe e é contínua excepto possivelmente num subconjunto com medida nula de \mathbb{R}^m e tem valor absoluto majorado por $M > 0$, então o valor absoluto da derivada parcial correspondente de \mathbf{f}_ε é majorado por M .*
3. *Se \mathbf{f} é contínua num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, então $\mathbf{f}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{f}$ uniformemente em subconjuntos compactos de U quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
4. *Se a derivada parcial de uma componente escalar de \mathbf{f} existe em $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, então a correspondente derivada parcial de \mathbf{f}_ε converge uniformemente para a derivada parcial da correspondente componente de \mathbf{f} em subconjuntos compactos de U quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
5. *Se \mathbf{f} é periódica de período $T > 0$ numa das variáveis escalares, então \mathbf{f}_ε é periódica de período T nessa variável.*

Dem. Seja²³⁵ $\Phi_\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty[$ uma função C^∞ que se anula fora de $[-\varepsilon, \varepsilon]^m \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\int_{\mathbb{R}^m} \Phi_\varepsilon = 1$. Uma função com estas propriedades é $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \prod_{j=1}^m \varphi_\varepsilon(x_j)$ para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, em que $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ é C^∞ e anula-se fora de $[-\varepsilon, \varepsilon]$, que pode ser construída de uma função C^∞ com valores positivos excepto em 0 onde é 0 assim como as derivadas de todas as ordens, e.g. $\psi(t) = e^{-1/t^2}$ para $t \neq 0$ e $\psi(0) = 0$, definindo $\varphi_\varepsilon(t) = \psi(t+\varepsilon)\psi(-(t+\varepsilon))$ para $|t| < \varepsilon$ e igual a 0 para $|t| \geq \varepsilon$, e para o integral de Φ_ε ser 1, $c = \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^m} \prod_{j=1}^m \varphi_\varepsilon(x_j) d\mathbf{x}$.

\mathbf{f}_ε é definida por **Convolação** de \mathbf{f} com Φ_ε , i.e.

$$\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) = (\mathbf{f} * \Phi_\varepsilon)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} .$$

Todas as derivadas parciais de todas as ordens de componentes desta função podem ser obtidas aplicando a regra de Leibniz para troca de derivadas com integrais, pois Φ_ε é C^∞ e anula-se fora de $[-\varepsilon, \varepsilon]^m$; logo, \mathbf{f}_ε é C^∞ .

Mudando variáveis de integração,

$$\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) = (\mathbf{f} * \Phi_\varepsilon)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} .$$

²³⁵ As funções com as propriedades de Φ_ε chamam-se **Molificadores** e o método de regularização associado chama-se **Molificação**.

1) Com esta fórmula, 1 é imediata.

2) Segue-se da mesma fórmula usando a regra de Leibniz para troca de derivadas com integrais e majorando como para 1.

3) Se K é subconjunto compacto de U , existe outro conjunto compacto K' tal que $K \subset \text{int } K' \subset K' \subset U$. Como \mathbf{f} é contínua no conjunto compacto K' , do teorema de Heine-Cantor (I.15), é uniformemente contínua em K' . Portanto, para todo $\delta > 0$ existe partição finita de um intervalo limitado e fechado em \mathbb{R}^m (i.e. um produto cartesiano de m intervalos limitados e fechados) que contém K' em subintervalos fechados onde o máximo da norma de diferenças de valores de \mathbf{f} em cada subintervalo é $< \delta$. A distância de K a $\partial K'$, $d = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in \partial K'\}$ é > 0 . Sem perda de generalidade, todos subintervalos fechados da partição têm diâmetros $< d$. Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K'$ pertencem a subintervalos da partição adjacentes, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < 2\delta$. Para $\varepsilon > 0$ menor do que as arestas de todos os subintervalos, $\Psi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ if $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K'$ pertence a subintervalos não adjacentes da partição. Portanto,

$$-2\delta < \left| \int_{\mathbb{R}^m} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})] \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| = \left| \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})] \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| < 2\delta.$$

Logo, $\|\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| < 2\delta$. Portanto, $\mathbf{f}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{f}$ uniformemente em cada conjunto compacto $K \subset U$.

4) Como para 3, usando a regra de Leibniz como para 2.

5) Se $x_k \mapsto \mathbf{f}(x_1, \dots, x_m)$ para $k \in \{1, \dots, m\}$ e todas as outras variáveis fixos é periódica com período $T > 0$, designando $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ a base canónica de \mathbb{R}^m , é $\mathbf{f}(\mathbf{z} + T\mathbf{e}_j) = \mathbf{f}(\mathbf{z})$ e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + T\mathbf{e}_j) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{f}(\mathbf{y}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} + T\mathbf{e}_j - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{f}(\mathbf{y} + T\mathbf{e}_j) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x});$$

logo, $x_k \mapsto \mathbf{f}_\varepsilon(x_1, \dots, x_m)$ é periódica com período T .

Q.E.D.

Este método de aproximação de funções contínuas por funções C^∞ tem amplas aplicações. Um exemplo é a aplicação directa deste resultado para provar que o conjunto das funções C^∞ (e, portanto, também das funções C^k para um qualquer $k \in \mathbb{N}$) de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ para \mathbb{R}^n é denso no espaço normado das funções contínuas de K para \mathbb{R}^n com norma o máximo das normas dos valores da função em K .

Bibliografia

A bibliografia sobre os assuntos deste texto é imensa. Optou-se por indicar uma lista reduzida, com alguns livros alternativos sobre os temas considerados e incluindo, também, livros sobre assuntos aflorados mas não aprofundados neste texto. Pretende-se, assim, facultar referências possíveis para a continuação do estudo destes assuntos. Os livros citados têm referências bibliográficas adicionais que podem ser úteis.

1. AHLFORS, L.V., *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.
2. AHLFORS, L.V., *Lectures on Quasiconformal Mappings*, 2nd ed. with additional chapters by C.J. Earle and I. Kra, M. Shishikura, J.H. Hubbard, University Lecture Series, vol. 38, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2006.
3. AHLFORS, L.V., *Conformal Invariants – Topics in Geometric Function Theory*, AMS Chelsea Pub., Providence, Rhode Island, 2010.
4. AHLFORS, L.V., SARIO, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2016.
5. BOOTHBY, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, REvised 2nd ed., Academic Press, San Diego, California, 2003.
6. CARATHÉODORY, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, (2 vols.), reprinted with corrections, AMS Chelsea Publishing Co., Providence, Rhode Island, 2001.
7. CARLESON, L., GAMELIN, T.W., *Complex Dynamics*, Springer Verlag, New York, 1993.
8. CHABAT, B., *Introduction à L'Analyse Complexe, Tome 1: Fonctions d'Une Variable, Tome 2: Fonctions de Plusieurs Variables*, Éditions MIR, Moscou, 1990.
9. COHN, H., *Conformal Mapping on Riemann Surfaces*, Dover Publications, Inc., New York, 1967.
10. CONWAY, J.B., *Functions of One Complex Variable*, vol. I, 1978; 2nd edition, vol. II, 1995; Springer-Verlag, New York.

11. FULTON, W., *Algebraic Topology, A First Course*, Springer-Verlag, New York, 1995.
12. HILLE, E., *Analytic Function Theory*, vol. I 2nd ed. reprinted, 2012 vol. II reprinted, Rhode Island; vol. II, 2002, AMS Chelsea Publishing Co., Providence, Rhode Island.
13. KNOPP, K., *Theory of Functions*, 2 vols. Dover, New York, 1945.
14. LEHTO, O., VIRTANEN, K.I., *Quasiconformal Mappings in the PLane*, Springer-Verlag, New York, 1973.
15. MAGALHÃES, L.T., *Integraís Múltiplos*, Texto Editora, Lisboa 1993.
16. MAGALHÃES, L.T., *Transformações Quaseconformes no Plano e Dinâmica Complexa*, em preparação.
17. MILNOR, J.W., *Topology from a Differentiable Viewpoint*, University of Virginia Press, Charlottesville, Virginia, 1965.
18. MILNOR, J.W., *Dynamics in One Coomplex Variable*, Princeton University Press, Charlottesville, Princeton, 2006.
19. MUNKRES, J.R., *Topology*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000.
20. NARASIMHAN, R., *Several Complex Variables*, University of Chicago Press, Chicago, 1971.
21. NARASIMHAN, R., NIEVERGELT, Y., *Complex Analysis in One Variable*, Birkhäuser, Boston, 2001.
22. NEHARI, Z., *Conformal Mapping*, Dover Publications Inc., New York, 1975.
23. REMMERT, R., *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
24. RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1976.
25. RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
26. SAKS, S., ZYGMUND, A., *Analytic Functions*, 3th ed., Elsevier Publishing Co., 1971.
27. STEIN, E.M., SHAKARCHI, R., *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2003.
28. TITCHMARSH, E.C.²³⁶, *Theory of Functions*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1939.

²³⁶Earle, Clifford John (1935-2017). Kra, Irwin (1937-). Hille, Einar (1849-1980). Knopp, Konrad (1882-1957). Lehto, Olli (1925-). Virtanen, Kaarlo (1921-2006). Nievergelt, Yves. Saks, Stanislav (1897-1942). Zygmund, Antoni (1900-1992). Titchmarsh, Edward Charles (1899-1963).

