Apêndice A

Existência de soluções de equações diferenciais ordinárias pelo método de Euler: Teorema de Peano

Apresenta-se neste apêndice uma prova do Teorema de Peano que estabelece a existência de solução local para o problema de valor inicial.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0},$$

em que $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ que contém $(t_0, \mathbf{y_0})$. A prova baseia-se em provar a convergência de uma sucessão de aproximações da solução obtidas pelo método de Euler. Permite provar a existência de solução local apenas com a hipótese de f ser contínua, e fundamenta o método de Euler. Naturalmente, com esta hipótese não é possível garantir unicidade de solução do problema de valor inicial¹⁷⁹.

Analogamente ao que se fez no capítulo 2, para provar a existência de uma solução sem a determinar explicitamente segue-se o esquema geral:

- 1. provar que uma subsucessão da sucessão de aproximações tem limite,
- 2. provar que o limite é uma solução.

A sucessão de aproximações para uma possível solução local do problema de valor inicial (A.1) é definida num intervalo $I_{\alpha} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, com $\alpha > 0$ apropriado. Nomeadamente, pode-se tomar uma sucessão $\{\mathbf{y}_j\}$ de funções definidas em I_{α} tal que $\mathbf{y_j}$ é a função poligonal que liga os pontos calculados pelo método de Euler para intervalos de comprimentos iguais a $h_j = \frac{\alpha}{2^j}$. Para garantir que esta sucessão está bem definida há que escolher α de modo a cada uma das linhas poligonais obtidas por aplicação do método de Euler no intervalo I_{α} não sair do domínio D de definição de \mathbf{f} , o que pode ser feito exactamente como na demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf no capítulo 2. Começa-se com $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ e $B_b = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \le b\} \subset \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n), em que a,b>0 são suficientemente pequenos para que $R = I_a \times B_b \subset D$, e define-se M>0 tal que $M \ge \max_R \|\mathbf{f}\|$ e $\alpha = \min \left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

¹⁷⁹Por exemplo, o problema de valor inicial $\dot{y} = \sqrt[3]{y}$, y(0) = 0 tem infinitas soluções.

Teorema de Arzelà-Ascoli

É preciso provar que a sucessão de aproximações considerada tem uma subsucessão convergente. Diz-se que uma família \mathcal{F} de funções com valores em \mathbb{R}^m (ou \mathbb{C}^m) definidas num conjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n) é uma família normal se toda sucessão de funções em \mathcal{F} tem uma subsucessão que converge uniformemente em subconjuntos compactos de S. Esta propriedade é muitas vezes referida como "propriedade de compacidade de conjuntos de funções"., pois, uma caracterização de conjuntos compactos em espaços métricos é pela chamada **Propriedade de Bolzano** 180-**Weierstrass**, nomeadamente toda sucessão no conjunto ter uma subsucessão convergente para um ponto do conjunto. Considerando o espaço das funções complexas contínuas definidas em S com uma métrica (que existe) correspondente à convergência uniforme em conjuntos compactos, verifica-se que uma família é normal se e só se o seu fecho é um conjunto compacto na métrica referida. Provar que a sucessão de aproximações acima considerada tem uma subsucessão convergente corresponde a provar que é uma família normal.

O Teorema¹⁸¹ de Arzelà-Ascoli¹⁸² que se segue caracteriza famílias normais num conjunto separável por propriedades de limitação pontual e equicontinuidade. Diz-se que um conjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n é **separável** se contém um subconjunto numerável denso¹⁸³ em S. Diz-se que \mathcal{F} é uma **família pontualmente limitada** se para cada $\mathbf{x} \in S$ existe M > 0 tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le M$ para $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$. Diz-se que \mathcal{F} é uma **família localmente equicontínua** se para cada conjunto compacto $K \subset S$ e cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le \epsilon$ para $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in K$ com $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \delta$ e $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$. A razão do nome "localmente equicontínua" é por esta propriedade valer localmente numa vizinhança de cada ponto de um conjunto implicar que vale em todos subconjuntos compactos do conjunto (dado que toda a cobertura aberta de um conjunto compacto tem uma subcobertura finita) e vice-versa.

Para o Teorema de Peano só se usa a suficiência da condição enunciada, mas devido à importância geral do resultado e às suas amplas aplicações opta-se por estabelecê-lo como condição necessária e suficiente, o que, naturalmente, alonga a prova. O leitor pode saltar sobre a prova de necessidade sem perder o caminho lógico em que se fundamenta o Teorema de Peano.

(A.2) Teorema de Arzelà-Ascoli: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n) separável e \mathcal{F} uma família de funções com valores em \mathbb{R}^m (ou \mathbb{C}^m) definidas em S. \mathcal{F} é normal se e só se é pontualmente limitada e localmente equicontínua.

¹⁸⁰Bolzano, Bernard (1781-1848).

 $^{^{181}}$ Este teorema caracteriza compacidade de conjuntos de funções no espaço de funções definidas em S com a métrica da convergência uniforme em conjuntos compactos.

¹⁸²Arzelà, Cesaro (1847-1912). Ascoli, Giulio (1843-1896).

 $^{^{183}}$ Diz-se que $Q \subset S$ é **denso** em S se $\overline{Q} = S$. Como o conjunto dos pontos de componentes racionais é denso em \mathbb{R}^n , todos subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n , com excepção do conjunto vazio, são separáveis, assim como os fechos destes conjuntos.

Dem. 1) Suficiência. Seja $\{\mathbf{f}_i\}$ uma sucessão de funções em \mathcal{F} . Como S é separável tem um subconjunto Q numerável e denso em S, e $Q \cap S$ é um conjunto numerável e denso em S. Seja $\{\mathbf{q}_k\}$ uma sucessão que enumera os pontos de $Q \cap S$. Organizam-se os termos das sucessões $\{\mathbf{f}_i(\mathbf{q}_k)\}$ sucessivamente em linhas (correspondentes a diferentes valores de k) e colunas (correspondentes a diferentes valores de j) como na Figura A.1. A sucessão $\{\mathbf{f}_i(\mathbf{q}_1)\}\$ é uma sucessão limitada de números complexos, pelo que tem pelo menos uma subsucessão convergente; tomam-se os termos de uma tal subsucessão para 1^a linha. Procede-se sucessivamente para as linhas seguintes, construindo cada linha k com os termos de uma subsucessão convergente de uma subsucessão de $\{\mathbf{f}_i(\mathbf{q}_k)\}$ cujos índices percorrem apenas os índices retidos para a linha imediatamente anterior. Toma-se, agora, a sucessão $\{\mathbf{f}_{j_{kk}}(\mathbf{q}_k)\}\$ dos termos na diagonal da construção anterior, indicados na Figura A.1 entre parênteses rectos. A sucessão de funções consideradas na diagonal $\{\mathbf{f}_{j_{kk}}\}$ é uma subsucessão das sucessões de funções consideradas nas linhas anteriores $\{\mathbf{f}_{j_k}\}, j=1,\ldots,k-1$, pelo que converge em todos pontos $\mathbf{q}_k,\ k\in\mathbb{N}\,,\ i.e.$ em todos pontos de $Q\cap S\,.$ Esta construção chama-se Argumento Diagonal de Cantor¹⁸⁴ e tem utilidade noutros contextos.

```
[f_{j_{11}}(q_1)] \quad [f_{j_{12}}(q_1)] \quad \cdots \quad [f_{j_{1k}}(q_1)] \quad \cdots
[f_{j_{21}}(q_2)] \quad [f_{j_{22}}(q_2)] \quad \cdots \quad [f_{j_{2k}}(q_2)] \quad \cdots
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
[f_{j_{k1}}(q_2)] \quad [f_{j_{k2}}(q_2)] \quad \cdots \quad [f_{j_{kk}}(q_2)] \quad \cdots
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
```

Figura A.1: Ilustração do Argumento Diagonal de Cantor

Para simplicidade de notação, redesigna-se por $\{f_k\}$ a sucessão de funções obtida na diagonal do processo anterior.

Sejam $\epsilon > 0$ e $K \subset S$ um conjunto compacto arbitrários. Como \mathcal{F} é uma família localmente equicontínua, existe $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \le \epsilon$ para $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in K$ com $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \delta$ e $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$. O conjunto de todas bolas abertas de raios $\frac{\delta}{2}$ centradas em pontos de K é uma cobertura aberta deste conjunto. Como K é compacto, esta cobertura tem uma subcobertura finita constituída por bolas abertas B_1, B_2, \ldots, B_N . Como $Q \cap S$ é denso em S, para cada $s = 1, 2, \ldots, M$ existe $\mathbf{p}_s \in Q \cap S$. A sucessão $\{\mathbf{f}_k(\mathbf{p}_s)\}$ é convergente, e, portanto, é uma sucessão de Cauchy; logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para j, k > N é $\|\mathbf{f}_j(\mathbf{p}_s) - \mathbf{f}_k(\mathbf{p}_s)\| < \epsilon$ para todo $s = 1, 2, \ldots, M$.

Se $\mathbf{x} \in K$, para algum s = 1, 2, ..., M é $\mathbf{x} \in B_s$ e, portanto, $\|\mathbf{x} - \mathbf{p_s}\| < \delta$. Em consequência, para j, k > N,

$$\|\mathbf{f}_{j}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_{k}(\mathbf{x})\| \le \|\mathbf{f}_{j}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_{j}(\mathbf{p}_{s})\| + \|\mathbf{f}_{j}(\mathbf{p}_{s}) - \mathbf{f}_{k}(\mathbf{p}_{s})\| + \|\mathbf{f}_{k}(\mathbf{p}_{s}) - \mathbf{f}_{k}(\mathbf{x})\| < 3\epsilon$$

 $^{^{184}\}mathrm{G.}$ Cantor introduziu este argumento em 1874 para provar $\#\mathbb{R}\!>\!\mathbb{N}.$

pelo que $\{\mathbf{f}_k(\mathbf{x})\}$ é uma sucessão de Cauchy em \mathbb{R}^m (ou \mathbb{C}^m), e como este é um espaço completo, *i.e.* toda sucessão de Cauchy é convergente neste espaço, obtém-se que $\{\mathbf{f}_k(\mathbf{x})\}$ é uma sucessão convergente, digamos $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \to L(\mathbf{x})$ quando $k \to +\infty$. Fazendo $k \to +\infty$ na fórmula acima obtém-se para j > N que $\|\mathbf{f}_j(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x})\| < 3\epsilon$ para todo $\mathbf{x} \in K$. Resulta que $\mathbf{f}_k \to L$ uniformemente em K, quando $k \to +\infty$.

Provou-se que toda sucessão $\{\mathbf{f}_k\}\subset\mathcal{F}$ tem uma subsucessão que converge uniformemente em todos subconjuntos compactos K de S. Logo \mathcal{F} é uma família normal.

2) Necessidade. Seja $\mathbf{x} \in S$ arbitrário. Se $\{\mathbf{a}_j\}$ é uma sucessão em $A_z = \overline{\bigcup_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} \mathbf{f}(\mathbf{x})}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\mathbf{f}_j \in \mathcal{F}$ tal que $\|\mathbf{f}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{a}_j\| < \frac{1}{j}$. Como se supõe que \mathcal{F} é normal, existe uma subsucessão de $\{\mathbf{f}_j(\mathbf{x})\}$ que é convergente (pois $\{\mathbf{x}\}$ é um conjunto compacto) para algum $L_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n). A subsucessão de $\{\mathbf{a}_j\}$ obtida considerando os termos com os mesmos índices da subsucessão anterior também converge para $L_{\mathbf{x}}$. Concluiu-se que A_z é compacto, e, portanto, limitado. Logo, \mathcal{F} é pontualmente limitada.

Resta provar que se \mathcal{F} é normal, então é localmente equicontínua. Supõese que não é equicontínua num conjunto compacto $K \subset S$. Então existem $\epsilon > 0$ e sucessões $\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_i\} \subset K$ tais que $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\| \to 0$ e $\|\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i)\| > \epsilon$ para $j \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, existe uma subsucessão de $\{\mathbf{x}_i\}$ convergente. Pela mesma razão, a subsucessão de $\{y_i\}$ dos termos com os mesmos índices da subsucessão anterior tem uma subsucessão convergente. Como \mathcal{F} é normal, a subsucessão de $\{\mathbf{f}_i\}$ dos termos com os mesmos índices da subsucessão anterior tem uma subsucessão uniformemente convergente em K. Consideram-se as subsucessões das três sucessões consideradas $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $\{\mathbf{f}_i\}$ dos termos com os mesmos índices da subsucessão anterior. Tem-se $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\| \to 0$ e, para alguma função \mathbf{f}_0 definida em $S \mathbf{f}_j \to \mathbf{f}_0$ uniformemente em K. Como $\{\mathbf{f}_i\}$ é uma sucessão de funções contínuas e a convergência é uniforme, \mathbf{f}_0 é contínua em K. Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para j > N é $\|\mathbf{f}_{j}(\mathbf{x}_{j}) - \mathbf{f}_{0}(\mathbf{y}_{j})\| < \frac{\epsilon}{3}, \|\mathbf{f}_{0}(\mathbf{x}_{j}) - \mathbf{f}_{j}(\mathbf{y}_{j})\| < \frac{\epsilon}{3}, \|\mathbf{f}_{0}(\mathbf{x}_{j}) - \mathbf{f}_{0}(\mathbf{y}_{j})\| < \frac{\epsilon}{3} e$ $\|\mathbf{f}_{j}(\mathbf{x}_{j}) - \mathbf{f}_{j}(\mathbf{y}_{j})\| \le \|\mathbf{f}_{j}(\mathbf{x}_{j}) - \mathbf{f}_{j}(\mathbf{y}_{j})\| + \|\mathbf{f}_{0}(\mathbf{y}_{j}) - \mathbf{f}_{j}(\mathbf{x}_{j})\| + \|\mathbf{f}_{0}(\mathbf{x}_{j}) - \mathbf{f}_{j}(\mathbf{y}_{j})\| < \epsilon$ em contradição com $\|\mathbf{f}_{i}(\mathbf{x}_{i}) - \mathbf{f}_{i}(\mathbf{y}_{i})\| > \epsilon$ para $j \in \mathbb{N}$. Concluiu-se que se \mathcal{F} é normal, então é localmente equicontínua. Q.E.D.

Teorema de Peano

Voltando às aproximações obtidas pelo método de Euler para soluções do problema de valor inicial considerado no início, observa-se que todas linhas poligonais consideradas nos segmentos de cada aproximação são limitadas por $\|\mathbf{y_0}\| + M\alpha$ e satisfazem $\|\mathbf{y_j}(t) - \mathbf{y_j}(s)\| \le M|t-s|$, para $t,s \in I_\alpha$. Portanto, a sucessão de aproximações considerada é uma família equilimitada e equicontínua de funções definidas no intervalo I_α , que é um conjunto separável, pois o conjunto dos números racionais contidos nesse intervalo é numerável e denso no intervalo. Do Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma

subsucessão convergente, o que completa o 1º passo do esquema geral previsto no início para provar a existência de solução do problema de valor inicial. Mais precisamente, provou-se que a sucessão de funções poligonais $\{\mathbf{y}_j\}$ obtida pelo método de Euler no intervalo I_α tem uma subsucessão que converge uniformemente neste intervalo para uma função contínua $\mathbf{y}: I_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Para concluir o esquema previsto basta verificar que esta função satisfaz o problema de valor inicial (A.1).

Designa-se $\widetilde{\mathbf{f}}_j: I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ a função que em cada subintervalo de comprimento h_j em que a função poligonal \mathbf{y}_j tem declive constante tem como valor esse declive. É claro que \mathbf{y}_j satisfaz (Figura A.2) $\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \widetilde{\mathbf{f}}_j(s) \, ds$.

Como $\mathbf{y}_j \to \mathbf{y}$, se for provado que $\int_{t_0}^t \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{j}}(s) \, ds \to \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds$, obtém-se por passagem ao limite $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y_0} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) \, ds$ e, do Teorema Fundamental do Cálculo, \mathbf{y} é diferenciável e $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Como \mathbf{f} e \mathbf{y} são funções contínuas, \mathbf{y} é C^1 em I_{α} e satisfaz a equação diferencial. A verificação de $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}$ é imediata da equação anterior. Portanto, \mathbf{y} é uma solução do problema de valor inicial (A.1).

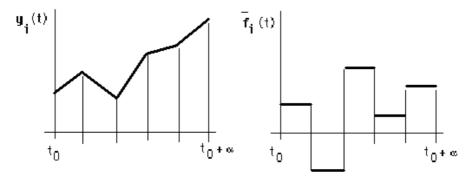


Figura A.2: Aproximação de Euler e função que dá os declives da correspondente linha poligonal

Como \mathbf{f} é contínua no intervalo compacto $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ considerado acima, então é uniformemente contínua nesse conjunto, pelo que qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que a oscilação desta função em cada intervalo de arestas de comprimentos inferiores a δ é menor do que ϵ . Como a sucessão $\{\mathbf{y}_j\}$ converge uniformemente para \mathbf{y} em I_{α} , se j for suficientemente grande é $\|\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}(t)\| \le \delta$ para $t \in I_{\alpha}$, e também $h_j < \delta$. Conclui-se que, para t em cada um dos subintervalos de largura h_j em que I_{α} é dividido com base no ponto t_0 verifica-se $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t)) - \widetilde{\mathbf{f}}_j(t)\| \le \epsilon$. Portanto,

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{j}}(s) ds - \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right\| \leq |t - t_0| \epsilon \leq \alpha \epsilon,$$

o que prova a convergência de integrais desejada.

Fica assim estabelecido o resultado seguinte.

(A.3) Teorema de Peano: Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $(t_0, \mathbf{y_0}) \in D$, então existe solução do problema de valor inicial (A.1) definida num intervalo $I_{\alpha} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ com $\alpha > 0$. Se $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ e $B_b = \{\mathbf{y}: \|\mathbf{y} - \mathbf{y_0}\| \le b\}$ são tais que $I_a \times B_b \subset D$ e M > 0 é tal que $M \ge \|\mathbf{f}\|$ em $I_a \times B_b$ e L é uma constante de Lipschitz de $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ em relação \mathbf{y} em $I_a \times B_b$, então pode-se tomar $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Pode-se estabelecer um resultado de prolongamento de soluções a intervalos máximos para o caso em que \mathbf{f} é contínua num conjunto aberto inteiramente análogo ao do capítulo 2 para o caso em que $\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ é localmente lipschitziana em relação a \mathbf{y} num conjunto aberto. Também é possível estabelecer a dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais para o caso em que se supõe simplesmente que \mathbf{f} é contínua e que as soluções de problemas iniciais são únicas, sem exigir que \mathbf{f} seja localmente lipschitziana.

Para provar unicidade de solução para o problema de valor inicial (A.1) na sequência do Teorema de Peano, supondo satisfeita a hipótese adicional de $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ser localmente lipschitziana em relação a \mathbf{y} , pode-se usar exactamente a argumentação no capítulo 2 no final da prova do Teorema de Picard-Lindelöf, ou um argumento baseado na Desigualdade de Gronwall.

Notas históricas

O conceito de equicontinuidade foi introduzido em 1883 por G. Ascoli quando este observou que é uma condição necessária para que uma família de funções reais seja normal. A prova da suficiência da sucessão ser pontualmente limitada e localmente equicontínua deve-se a C. Arzelà em 1885. A prova do Teorema de Arzelà-Ascoli usa o famoso Argumento Diagonal de Cantor, aplicado por G. Cantor em 1874 para provar que a cardinalidade de $\mathbb R$ é maior do que a de $\mathbb N$. A designação de família normal foi introduzida por P. Montel em 1912 que a explorou em Análise Complexa.

O Teorema de Peano foi obtido por G. Peano, para equações escalares em 1886 e para equações vectoriais em 1890, embora tenha raízes no trabalho de A.-L. Cauchy em 1820 e de R. Lipschitz em 1876. A prova inicial foi simplificada por, entre outros, C. de la Valée Poussin, C. Arzelà, P. Montel e O. Perron.

Apêndice B

Teorema Fundamental do Cálculo com integral de Lebesgue

Um dos aspectos centrais do cálculo diferencial e integral é a relação de derivadas com integrais. O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que, sob hipóteses razoavelmente gerais, derivada e integral são o inverso um do outro, no sentido da derivada de um integral indefinido ser a função integranda e o integral da derivada de uma função num intervalo ser a diferença da função nos extremos do intervalo. Para integrais de Riemann estes resultados são conhecidos do cálculo elementar para funções integrandas, resp., contínuas e continuamente diferenciáveis. Neste apêndice estudam-se as relações referidas no contexto do integral de Lebesgue.

Funções de variação limitada

As hipóteses naturais para validade do Teorema Fundamental do Cálculo com integral de Lebesgue envolvem o conceito de **funções de variação limitada** num intervalo compacto [a,b], que são funções com a propriedade de existir M>0 tal que qualquer que seja a partição finita do intervalo por pontos $a=t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ verifica-se $\sum_{k=1}^m |f(t_k)-f(t_{k-1})| \le M$. Se f é uma função de variação limitada em [a,b] chama-se **variação total** $T_a^b(f)$ de f em [a,b] ao supremo das somas $\sum_{k=1}^m |f(t_k)-f(t_{k-1})|$, consideradas para todas possíveis partições finitas de [a,b].

Toda função f monótona em [a,b] é de variação limitada neste intervalo, com variação total majorada por |f(b)-f(a)|. Também toda função diferenciável com derivada limitada em [a,b] é de variação limitada, com variação total majorada por $(b-a)\sup_{[a,b]}|f'|$, em particular as funções em $C^1[a,b]$ são de variação limitada.

A soma de duas funções de variação limitada em [a,b] também é de variação limitada, com variação total majorada pela soma das variações totais das duas funções, e o produto de uma constante por uma função de variação limitada também é uma função de variação limitada com variação total igual ao produto do módulo da constante pela variação total da função.

Portanto, as funções de variação limitada em [a,b] com as operações de soma e multiplicação por escalares usuais formam um espaço linear.

(B.1) **Teorema:** Uma função f é de variação limitada em [a,b] se e só se é a diferença de funções crescentes em [a,b]. Uma função f de variação limitada em [a,b] é diferenciável q.t.p. em [a,b] e satisfaz $f' \in L^1([a,b])$ com $\int_a^b |f'| \leq 2 T_a^b(f)$ e $\left| \int_a^b f' \right| \leq T_a^b(f)$.

Dem. Começa-se por observar que a variação total é uma função aditiva em relação ao intervalo em que é considerada, i.e. se $a \le t_1 < t_2 < t_3 \le b$, então $T_{t_1}^{t_2}(f) = T_{t_1}^{t_2}(f) + T_{t_2}^{t_3}(f)$, pois, da Desigualdade Triangular, para qualquer partição de $[t_1,t_3]$ por um conjunto de pontos, a correspondente soma dos valores absolutos dos acréscimos em cada subintervalo não pode decrescer com a inclusão de t_2 nos pontos da partição, e para cada partição que inclua t_2 essa soma em cada subintervalo é igual à adição da soma das parcelas correspondentes a subintervalos de $[t_1,t_2]$ com a soma das parcelas correspondentes a subintervalos de $[t_2,t_3]$, pelo que os supremos destas somas considerados em relação a todas as partições de $[t_1,t_3]$ satisfazem a mesma relação de aditividade. Logo, $t \mapsto T_a^t$ é crescente.

Como $f(t) = T_a^t(f) - [T_a^t(f) - f(t)]$, interessa provar que $t \mapsto T_a^t(f) - f(t)$ também é crescente, o que resulta de observar que para $t_1 < t_2$ é $|f(t_2) - f(t_1)| \le T_{t_1}^{t_2}(f) = T_a^{t_2}(f) - T_a^{t_1}(f)$, e $T_a^{t_1}(f) - f(t_1) \le T_a^{t_1}(f) - f(t_1)$.

O teorema seguinte estabelece que uma função crescente g em [a,b] é diferenciável q.t.p. em [a,b] e a sua derivada satisfaz $g' \in L^1([a,b])$ e $\int_a^b g'(\tau) d\tau \leq g(b) - g(a)$. Logo, a função de variação limitada f é diferenciável q.t.p. em [a,b] e a sua derivada é $f'(t) = \frac{d}{dt}[T_a^t(f)] - \frac{d}{dt}[T_a^t(f) - f(t)]$, e f' é mensurável. Como $\frac{d}{dt}[T_a^t(f)], \frac{d}{dt}[T_a^t(f) - f(t)] \geq 0$, é

$$|f'(t)| \le \frac{d}{dt}[T_a^t(f)] + \frac{d}{dt}[T_a^t(f) - f(t)],$$

e, como também $|f(b)-f(a)| \le T_a^b$,

$$\begin{split} \int_{a}^{b} &|f'(t)| \, dt \leq \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [T_{a}^{t}(f)] \, dt + \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [T_{a}^{t}(f) - f(t)] \, dt \\ &\leq T_{a}^{b}(f) + [T_{a}^{b}(f) - (f(b) - f(a))] \leq 2 \, T_{a}^{b}(f) \,, \\ \left| \int_{a}^{b} f'(\tau) \, d\tau \right| &= \left| \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [T_{a}^{t}(f)] \, dt - \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [T_{a}^{t}(f) - f(t)] \, dt \right| \\ &\leq \max \left\{ \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [T_{a}^{t}(f)] \, dt \,, \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [T_{a}^{t}(f) - f(t)] \, dt \right\} \\ &\leq \max \left\{ T_{a}^{b}(f), T_{a}^{b}(f) \right\} = T_{a}^{b}(f) \,. \end{split} \quad Q.E.D.$$

Na prova do teorema seguinte é útil usar a notação $185 m^*(S)$ para o ínfimo das somas dos comprimentos dos intervalos de qualquer cobertura

 $^{^{185}}$ É usual chamar a $m^*(S)$ medida exterior de S.

numerável de $S \subset \mathbb{R}$ por intervalos. Com esta notação S tem medida nula se e só se $m^*(S) = 0$.

(B.2) Teorema de Diferenciação de Lebesgue: $Toda\ função\ f$ monótona em [a,b] é diferenciável q.t.p. em [a,b] e $f'\in L^1([a,b])$, $\int_a^b |f'| \leq |f(b)-f(a)|$.

Dem. Define-se a derivada direita superior e inferior de f num ponto t, resp., $D^+f(t)$ e $D_+f(t)$, pelo, limite, resp., superior e inferior da razão incremental $\frac{1}{h}[f(t+h)-f(t)]$ quando $h\to 0+$. Analogamente, define-se a derivada esquerda superior e inferior no ponto t, $D^-f(t)$ e $D_-f(t)$ pelo limite, resp., superior e inferior da razão incremental quando $h\to 0-$. É $D^+f(t)\geq D_+f(t), D^-f(t)\geq D_-f(t)$ e a função f é diferenciável no ponto t se e só se $D^+f(t)=D_+f(t)=D^-f(t)=D_-f(t)\neq \pm\infty$. Prova-se que os conjuntos em que quaisquer duas das 4 derivadas consideradas são diferentes tem medida nula. Aqui considera-se explicitamente apenas o conjunto E onde $D^+f(t)>D_-f(t)$, pois os conjuntos para os outros pares de derivadas podem ser tratados analogamente.

Como E é a união dos conjuntos $E_{u,v} = \{t : D^+f(t) > u > v > D_-f(t)\}$, com $u,v \in \mathbb{Q}$, basta provar $m^*(E_{u,v}) = 0$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma cobertura numerável de $E_{u,v}$ por intervalos abertos cuja soma de comprimentos é inferior a $m^*(E_{u,v}) + \epsilon$. Designa-se por U a união destes intervalos que satisfaz $m^*(U) \leq m^*(E_{u,v}) + \epsilon$.

Para cada $t \in E_{u,v}$ existe um intervalo arbitrariamente pequeno [t-h,t], com h>0, contido em U tal que f(t)-f(t-h)< vh. Do Lema de Vitali¹⁸⁶, que se prova a seguir, existe um conjunto finito disjunto de tais intervalos $\{I_1,\ldots,I_N\}$, com $I_j=[t_j-h_j,t_j]$, cujos interiores cobrem um subconjunto A de $E_{u,v}$ com $m^*(E_{u,v}\backslash A)<\epsilon$, e

$$A \text{ de } E_{u,v} \text{ com } m^*(E_{u,v}\backslash A) < \epsilon \text{ , e}$$

$$\sum_{j=1}^{N} [f(t_j) - f(t_j - h_j)] < v \sum_{j=1}^{N} h_j \le v \, m^*(U) \le v \left[m^*(E_{u,v}) + \epsilon \right].$$

Se fosse $m^*(A) < m^*(E_{u,v}) - \epsilon$, existiriam coberturas numeráveis de $E_{u,v} \setminus A$ e de A por intervalos com somas de comprimentos menores do que, resp., ϵ e $m^*(E_{u,v}) - \epsilon$ cuja união seria uma cobertura numerável de $E_{u,v}$ por intervalos com somas de comprimentos menores do que $\epsilon + m^*(E_{u,v}) - \epsilon = m^*(E_{u,v})$, em contradição com a definição de $m^*(E_{u,v})$. Logo, $m^*(A) \ge m^*(E_{u,v}) - \epsilon$.

Para cada $x\in A$ há um intervalo arbitrariamente pequeno $[x,x+\delta]$, com $\delta>0$, contido num dos intervalos I_j tal que $f(x+\delta)-f(x)>u\,\delta$. Aplicando outra vez o Lema de Vitali, existe um conjunto finito disjunto de tais intervalos $\{J_1,\ldots,J_M\}$, com $J_k=[x_k,x_k+\delta_k]$, cujos interiores cobrem um $B\subset A$ com $m^*(B)\geq m^*(E_{u,v})-2\,\epsilon$ e

$$\sum_{k=1}^{M} [f(x_k + \delta_k) - f(x_k)] > u \sum_{k=1}^{M} \delta_k \ge u \, m^*(B) \ge u [m^*(E_{u,v}) - 2\epsilon].$$

¹⁸⁶Vitali, Giuseppe (1875-1932).

Cada intervalo J_k está contido num I_j . Como f é crescente, somando para todos k tais que $J_k \subset I_j$, $\sum_k [f(x_k + \delta_k) - f(x_k)] \leq f(t_j) - f(t_j - h_j)$, e

$$v[m^*(E_{u,v}) + \epsilon] \ge \sum_{j=1}^{N} [f(t_j) - f(t_j - h_j)] \ge \sum_{k=1}^{M} [f(x_k + \delta_k) - f(x_k)] \ge u[m^*(E_{u,v}) - 2\epsilon].$$

Logo, $v m^*(E_{u,v}) \ge u m^*(E_{u,v})$. Como u > v, tem de ser $m^*(E_{u,v}) = 0$ como se pretendia provar.

Fica assim estabelecido que $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(t+h)-f(t)]$ existe para quase todo $t\in [a,b]$. Para estabelecer que f é diferenciável q.t.p. em [a,b] resta provar que o conjunto de pontos F em que este limite é $+\infty$ tem medida nula. Designando $F_u^+=\{t:D^+f(t)>u\},$ é $F\subset F_u^+,$ pelo que basta provar que $m^*(F_u^+)\to 0$ quando $u\to +\infty$. Seja $\epsilon>0$ arbitrário. Para cada $x\in F_u^+$ existe um intervalo arbitrariamente pequeno $[x,x+\delta]$, com $\delta>0$, contido num conjunto aberto V com $m^*(V)< m^*(F_u^+)+\frac{\epsilon}{2}$ tal que $f(x+\delta)-f(x)>u$ δ . Do Lema de Vitali, existe um conjunto finito disjunto de intervalos J_k , que se designa $\{J_1,\ldots,J_M\},$ com $J_k=[x_k,x_k+\delta_k],$ cujos interiores cobrem um subconjunto B de F_u^+ com $m^*(B)\geq m^*(F_u^+)-\frac{\epsilon}{2}$ e

$$\sum_{k=1}^{M} [f(x_k + \delta_k) - f(x_k)] > u \sum_{k=1}^{M} \delta_k \ge u \left[m^*(F_u^+) - \frac{\epsilon}{2} \right].$$

Como f é crescente o 1º termo desta desigualdade $\leq f(b) - f(a)$. Fazendo $u \to +\infty$, obtém-se $m^*(F_u^+) \to 0$.

Conclui-se que $g(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)]$ define uma função real q.t.p. em [a,b], pelo que f é diferenciável q.t.p. em [a,b], com f' = g. Definindo $g_m(t) = m \left[f\left(t + \frac{1}{m}\right) - f(t) \right]$ e considerando f(t) = f(b) para $t \geq b$, obtém-se $g_m \geq 0$, pois f é crescente e $g_m(t) \to g(t) = f'(t)$ para quase todo $t \in [a,b]$, pelo que f' é mensurável e o Lema de Fatou¹⁸⁷ implica

$$\begin{split} &\int_a^b f' \leq \varliminf_{m \to +\infty} \int_a^b g_m = \varliminf_{m \to +\infty} m \int_a^b \left[f\left(t + \frac{1}{m}\right) - f(t) \right] dt \\ &= \varliminf_{m \to +\infty} \left(m \int_b^{b+1/m} f - m \int_a^{a+1/m} f \right) = \varliminf_{m \to +\infty} \left(f(b) - m \int_a^{a+1/m} f \right) \leq f(b) - f(a) \,. \end{split}$$
 Conclui-se que $f' \in L^1([a,b])$ e $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$. Q.E.D.

(B.3) Lema de Vitali: Seja $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m^*(E) < +\infty$ e \Im uma cobertura de E por intervalos tal que para todo $t \in E$ existem intervalos de \Im arbitrariamente pequenos que contêm t. Então, qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito $\{I_1, \ldots, I_N\}$ de intervalos de \Im tal que $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \epsilon$.

¹⁸⁷Fatou, Pierre (1878-1929). O Lema de Fatou garante que a função limite q.t.p. num conjunto mensurável de uma sucessão de funções mensuráveis não negativas tem integral majorado pelo limite inferior da sucessão dos integrais dos termos da sucessão no conjunto.

Dem. Basta provar para cada intervalo da cobertura é fechado, pois se não, substitui-se cada intervalo pelo seu fecho, observando que os extremos dos intervalos têm medida nula.

Como $m^*(E) < +\infty$ existe uma cobertura numerável de E por intervalos abertos com soma de comprimentos $< m^*(E) + \epsilon$. Designa-se a união destes intervalos por U. Sem perda de generalidade, pode-se supor que todos os intervalos da cobertura \Im estão contidos em U, pois se não, substitui-se a cobertura inicial por uma com esta propriedade. Seleccionam-se sucessivamente intervalos desta cobertura por indução escolhendo arbitrariamente I_1 e, uma vez conhecidos I_1, \ldots, I_j , parando a escolha se a união dos intervalos já seleccionados contém E e, caso contrário, escolhendo I_{j+1} dos intervalos da cobertura disjuntos dos já seleccionados e com comprimento superior a metade do supremo dos seus comprimentos, que é necessariamente finito porque estão todos incluídos em U e $m^*(U) \ge m^*(E) + \epsilon$.

Se os intervalos obtidos por indução como indicado forem em nº finito, então E está incluído na união desses intervalos e o complementar dessa união em E é \emptyset , pelo que a afirmação no enunciado verifica-se. Caso contrário, obtém-se uma sucessão $\{I_j\}$ de intervalos disjuntos contidos em U com a soma dos comprimentos $\sum_j |I_j| \leq m^*(U) \leq m^*(E) + \epsilon$. Como esta série é convergente, existe N tal que $\sum_{j \geq N+1} |I_j| \leq \frac{\epsilon}{5}$. Considera-se também a sucessão de intervalos $\{J_j\}$ em que cada J_j está centrado no mesmo ponto que I_j e tem comprimento 5 vezes maior do que este intervalo.

Prova-se agora que $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \epsilon$. Seja $x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j$. Como $\bigcup_{j=1}^N I_j$ é um conjunto fechado que não contém x, existe um intervalo J da cobertura $\mathfrak I$ que contém x com comprimento tão pequeno que não intersecta os intervalos I_1, \ldots, I_N . Para j > N, se J não intersecta os intervalos I_1, \ldots, I_j , de como I_{j+1} foi seleccionado, é $|J| < 2 |I_{j+1}|$. Como a convergência da série implica $|I_j| \to 0$ para $j \to +\infty$, J intersecta pelo menos um dos intervalos da sucessão. Designa-se I_M o 1° intervalo da sucessão intersectado por J. Como M > N, $|J| \le 2 |I_M|$, $x \in J$, os intervalos J e I_M têm pelo menos um ponto comum e $|J| \le 2 |I_M|$, a distância de x ao ponto no centro de I_M é $\le |J| + |I_M|/2 \le \frac{5}{2} |I_M|$. Logo, x pertence ao intervalo J_M . Portanto, $E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j$ está contido na união $\bigcup_{j=N+1}^{+\infty} J_j$, e

$$\leq |J|+|IM|/2 \leq \frac{1}{2}|IM|. \text{ Logo, } x \text{ pertence ao intervalo } JM. \text{ Fortanto, } E \setminus \bigcup_{j=1}^{j} I_j \text{ está contido na união } \bigcup_{j=N+1}^{+\infty} J_j \text{ , e}$$
$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right) \leq \sum_{j=N+1}^{+\infty} |J_j| \leq 5 \sum_{j=N+1}^{+\infty} |I_j| < \epsilon \text{ .}$$
$$Q.E.D.$$

Funções absolutamente contínuas

Para estabelecer a validade do Teorema Fundamental do Cálculo com o integral de Lebesgue num intervalo compacto [a,b] consideram-se **funções absolutamente contínuas** em [a,b], que são as funções $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ com a propriedade de qualquer que seja $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para toda a família finita $\{]t_j,t_j^*[\}$ de subintervalos disjuntos de [a,b] com soma de comprimentos $<\delta$ é $\sum_{k=1}^m |f(t_j^*)-f(t_j)| \le \epsilon$.

Toda função absolutamente contínua em [a,b] é uniformente contínua neste intervalo. Também toda função absolutamente contínua em [a,b] é de variação limitada em [a,b], porque se f é absolutamente contínua neste intervalo existe $\delta>0$ tal que a variação total de f em cada subintervalo de [a,b] com comprimento $<\delta$ é <1, e como o intervalo [a,b] pode ser subdividido num nº finito de subintervalos com comprimentos $<\delta$, a variação total de f em [a,b] é finita.

Além disso, a soma de duas funções absolutamente contínuas em [a,b] e o produto de um escalar por uma função absolutamente contínua em [a,b] são funções absolutamente contínuas neste intervalo. Portanto, as funções absolutamente contínuas em [a,b] com as operações de soma e multiplicação por escalares usuais são um subespaço linear da intersecção dos espaços lineares das funções contínuas e das funções de variação limitada em [a,b].

(B.4) **Teorema:** Uma função f é absolutamente contínua em [a,b] se e só se é a diferença de funções absolutamente contínuas crescentes.

Dem. Suficiência é imediata. Para estabelecer necessidade, começa-se por observar que uma função f absolutamente contínua é de variação limitada e, portanto, é uma diferença de funções crescentes, em particular $f(t) = T_a^t(f) - [T_a^t(f) - f(t)]$, como se observou na prova do Teorema (B.1). Como as funções absolutamente contínuas formam um espaço linear, para verificar que as duas funções são absolutamente contínuas, basta provar que uma delas o é. Prova-se que $v(t) = T_a^t(f)$ é absolutamente contínua. Seja $\epsilon > 0$ e escolha-se δ de modo à condição na definição de continuidade absoluta para a função f ser satisfeita. Considera-se uma família de intervalos abertos $|a_j,b_j[\subset [a,b]]$ com soma dos comprimentos $<\delta$. A soma $\sum_j v(b_j) - v(a_j)$ é o supremo das somas $\sum_k \sum_m |f(x_{k,m}) - f(x_{k,m-1})|$ para todas partições finitas possíveis dos intervalos $|a_j,b_j[]$, com $j=\ldots,N$. Estas somas são todas majoradas por ϵ , pelo que também $\sum_j |v(b_j) - v(a_j)| \le \epsilon$. Q.E.D.

As funções absolutamente contínuas com derivadas 0 q.t.p. em [a,b] são as funções constantes em [a,b] .

(B.5) **Teorema:** Seja f uma função absolutamente contínua em [a,b]. Verifica-se f'=0 q.t.p. em [a,b] se e só se f é constante em [a,b].

Dem. Seja $t \in [a, b]$ e A o subconjunto de medida nula de]a, t[em que $f' \neq 0$. Sejam $\epsilon, \eta > 0$ arbitrários. Para cada $x \in]a, b[\setminus A$ existem intervalos com comprimentos arbitrariamente pequenos [x, x+h] contidos em [a, t] tais que $|f(x+h)-f(x)| < \eta h$. Do Lema de Vitali (B.3), existe uma família finita de intervalos disjuntos do tipo considerado $\{[x_k, y_k]\}$, com $x_k < x_{k+1}$, tal que $m^*(]a, t[\setminus A) \setminus \cup_k [x_k, y_k]) < \delta$, com $\delta > 0$ como na definição da continuidade absoluta de f para o valor de ϵ considerado. Logo,

$$\bigcup_{k}]y_{k}, x_{k+1}[\subset (]a, t[\backslash A) \setminus \bigcup_{k} [x_{k}, y_{k}],$$

pelo que $\sum |x_{k+1}-y_k|<\delta$. Portanto, $\sum |f(y_k)-f(x_k)|\leq \sum |y_k-x_k|<\eta$ (t-a) e $\sum |f(x_{k+1})-f(y_k)|<\epsilon$. Em consequência,

$$|f(t)-f(a)| = \sum_{k} |f(x_{k+1})-f(y_k)| + \sum_{k} |f(y_k)-f(x_k)| \le \epsilon + \eta (t-a).$$

Como $\epsilon, \eta > 0$ são arbitrários, é f(t) - f(a) = 0. Q.E.D.

Teorema Fundamental do Cálculo

Prova-se agora o Teorema Fundamental do Cálculo para integral de Lebesgue.

(B.6) Teorema Fundamental do Cálculo:

- 1. Se $f \in L^1([a,b])$, então $F(t) = \int_a^t f$ é absolutamente contínua em [a,b] e F' = f q.t.p. em [a,b].
- 2. Se F é absolutamente contínua em [a,b], então $F(t) = \int_a^t F' + F(a)$. Em particular, uma função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é um integral indefinido se e só se é absolutamente contínua em [a,b].

Dem.~1.~ Pode-se escrever $f=f^+-f^-,$ em que $f^+=\max(f,0)$ e $f^-=\max(-f,0)$ pertencem a $L^1([a,b])$. Logo, F é a diferença dos integrais indefinidos das funções não-negativas f^+ e $f^-.$ Como estes integrais indefinidos são funções crescentes, do Teorema (B.1), F é uma função de variação limitada em [a,b] e $F'\in L^1([a,b])$. Como $f=f^+-f^-$ e integral e derivada são transformações lineares, para provar o resto da 1^a afirmação pode-se supor sem perda de generalidade que $f\geq 0$. Do Teorema de Diferenciação de Lebesgue (B.2), $\int_a^b F' \leq F(b) - F(a) = F(b)$.

Define-se $f_k = \min(f,k)$ para $k \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Convergência Monótona de Levi, qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^b (f-f_N) < \frac{\epsilon}{2}$, pelo que se $\{\]t_j,t_j^*[\ \}$ é uma família finita de subintervalos abertos disjuntos de [a,b] com soma de comprimentos $<\delta$,

$$\sum_{j} \left| F(t_{j}^{*}) - F(t_{j}) \right| = \sum_{j} \left| \int_{t_{j}}^{t_{j}^{*}} \left| = \sum_{j} \left| \int_{t_{j}}^{t_{j}^{*}} (f - f_{N}) + \int_{t_{j}}^{t_{j}^{*}} \left| < \frac{\epsilon}{2} + N \sum_{j} \left| t_{j}^{*} - t_{j} \right| \le \frac{\epsilon}{2} + N \delta. \right| \right| \right|$$

Portanto, F satisfaz a definição anterior de função absolutamente contínua com $\delta = \frac{\epsilon}{2N}$. Como f_k , $f - f_k \ge 0$, as funções definidas por $G_k(t) = \int_a^t f_k$ e $H_k(t) = \int_a^t (f - f_k)$ são crescentes.

Do Teorema de Diferenciação de Lebesgue (B.2), estas funções são diferenciáveis q.t.p. em [a,b], e $G_k', H_k' \geq 0$ q.t.p. em [a,b]. A função $G_{k,j}(t) = \frac{1}{j}[G_k(t+1/j) - G_k(t)]$ satisfaz $G_{k,j}(t) = \int_t^{t+1/j} f_k$ e, portanto, $|G_{k,j}| \leq k$. Como $G_{k,j} \rightarrow G_k'$ q.t.p. em [a,b], do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{a}^{t} G'_{k} = \lim_{j \to +\infty} \left(\frac{1}{1/j} \int_{t}^{t+1/j} G_{k} - \frac{1}{1/j} \int_{a}^{a+1/j} G_{k} \right).$$

Como G_k é contínua, $\int_a^t G_k' = G_k(t) - G_k(a) = \int_a^t f_k$; logo, $\int_a^t (G_k' - f_k) = 0$ para $t \in [a,b]$. Do Lema que se segue a esta prova, $G_k' = f_k$ q.t.p. em [a,b]. Como $F = H_k + G_k$, é $F' = H_k' + f_k \ge f_k$ q.t.p. em [a,b]. Como $F' \ge f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, é $F' \ge f$ q.t.p. em [a,b] e $\int_a^b F' \ge \int_a^b f = F(b)$.

Portanto, $F(b) \leq \int_a^b F' \leq F(b)$, pelo que $\int_a^b F' = F(b) = \int_a^b f$. Logo, $\int_a^b (F'-f) = 0$. Como $F'-f \geq 0$ q.t.p. em [a,b], é F'=f q.t.p. em [a,b].

2. Supõe-se agora que F é absolutamente contínua. Como é uma função de variação limitada, existem funções crescentes F_1, F_2 tais que $F = F_1 - F_2$ e, portanto, $|F'| \leq F_1' + F_2'$. Do Teorema de Diferenciação de Lebesgue (B.2), tem-se $\int_a^b |F'| \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a)$ e $F' \in L^1([a,b])$. De 1, $G(t) = \int_a^t F'$ é absolutamente contínua, pelo que também f = F - G é. Também de 1, f' = F' - G' = 0 q.t.p. em [a,b]. Do Teorema (B.5), f é constante em [a,b] e, portanto, F(t) = G(t) + F(a).

(B.7) Lema: Se
$$f \in L^1([a,b])$$
 e $\int_a^t f = 0$ para $t \in [a,b]$, então $f = 0$ q.t.p..

Dem. Se existe um conjunto com medida neQ em que f>0, então também existe um conjunto S com medida neQ em que $f>\frac{1}{j}$ para algum $j\in\mathbb{N}$, pois a união dos conjuntos em que esta desigualdade é satisfeita com $j\in\mathbb{N}$ é o conjunto em que f>0. Logo, $m^*(S)>0$ e $m^*([a,b]\setminus S)< b-a$. Portanto, existe uma família numerável de intervalos abertos $\{I_k\}$ que cobre $[a,b]\setminus S$, com $\sum |I_k| < b-a$, em que $|I_k|$ designa o comprimento do intervalo I_k . Como $F=[a,b]\setminus I_k$ é um subconjunto fechado de S e $m^*[a,b]\leq m^*(F)+m*(\cup_k I_k)$,

$$m^*(F) \ge (b-a)-m^*(\cup_k I_k) \ge (b-a)-\sum_{k} |I_k| > 0.$$

Logo, existe um conjunto mensurável fechado F de medida não nula em que $f>\frac{1}{j}$. Portanto, $\int_F f=\int_a^b \chi_F f\geq \int_a^b \frac{\chi_F}{j}>0$ e $\int_{]a,b[\setminus F} f<0$. O conjunto $]a,b[\setminus F$ é aberto. Logo, é uma união numerável de intervalos abertos disjuntos $]a_k,b_k[$. Devido à σ -aditividade do integral de Lebesgue, a soma dos integrais de f em cada um destes intervalos é igual ao integral de f em $]a,b[\setminus F$. Portanto, para algum $k,\int_{a_k}^{b_k} f\neq 0$, o que contradiz a hipótese, pois $\int_{a_k}^{b_k} f=\int_a^{b_k} f-\int_a^{a_k} f=0$. Conclui-se que $f\leq 0$ q.t.p. em [a,b]. Analogamente, conclui-se que $f\geq 0$ q.t.p.

! em [a, b] e, em consequência, f = 0 q.t.p. em [a, b]. Q.E.D.

Notas históricas

As derivadas superior e inferior direita e esquerda de uma função num ponto foram introduzidas por U. Dini em 1878 para estudar em detalhe o Teorema Fundamental do Cálculo com o integral de Riemann.

As funções de variação limitada foram introduzidas em 1881 por C. Jordan que as caracterizou como diferenças de funções crescentes. Na mesma

Notas históricas 361

altura observou que o integral indefinido de uma função integrável à Riemann é uma função de variação limitada.

A igualdade quase em toda a parte de uma função à derivada do seu integral indefinido, a existência de derivada de uma função de variação limitada quase em toda a parte e a integrabilidade dessa derivada foram estabelecidas por H. Lebesgue em 1904.

Também em 1904 H. Lebesgue observou, embora por outras palavras, a equivalência entre continuidade absoluta de uma função e esta ser um integral indefinido de uma função integrável, mas a 1^a prova deste resultado foi por G. Vitali em 1905, altura em que criou a designação "função absolutamente contínua". Contudo, a propriedade já tinha sido identificada por A. Harnack¹⁸⁸ em 1882 para integrais indefinidos no contexto de integrais impróprios de Riemann para funções ilimitadas. Em 1905 H. Lebesgue publicou uma prova do resultado muito mais simples do que a de G. Vitali.

Em 1932 F. Riesz simplificou a prova do Teorema de diferenciação de Lebesgue¹⁸⁹ evitando a utilização do Lema de Vitali, o que se tornou possível com a descoberta de um resultado que é presentemente conhecido por **Lema do Sol Nascente**.

¹⁸⁸Harnack, Alexei (1851-1888).

¹⁸⁹Ver F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Frederik Ungar Publishing Co., New York, 1955, e A. Kolmogorov, S. Fomine, *Élements de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionelle*, Éditions MIR, Moscou, 1974.

Apêndice C

Complementos sobre séries de Fourier

Neste apêndice aprofundam-se algumas questões de convergência de séries trigonométricas de Fourier tendo como base o capítulo 7. A convergência de séries de Fourier foi considerada nesse capítulo em vários sentidos. Em particular, considerou-se na secção 7.2 convergência em média quadrática, ou seja na norma de $L^2(I)$, na secção 7.4 convergência uniforme e na secção 7.7 convergência pontual. Muitas vezes é necessário considerar convergência noutros sentidos. Neste apêndice considera-se a convergência no sentido de Cesàro¹⁹⁰ e estende-se a convergência pontual introduzindo o Critério de Jordan para funções de variação limitada.

Convergência no sentido de Cesàro

Seja $f \in L^1([0,2\pi])$. Diz-se que a série de Fourier de f converge no sentido de Cesàro para uma função g se a média aritmética das somas parciais da série converge para g, i.e. considerando as somas parciais da série de Fourier $S_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^n \widehat{f}(j) e^{ijt}$ e as suas médias aritméticas $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \left[S_0(f) + \dots + S_n(f) \right]$ verifica-se $\sigma_n(f) \to g$ quando $n \to +\infty$, em que a convergência pode ser tomada em vários sentidos, e.g. em média, ou seja em $L^1([0,2\pi])$, uniformemente ou pontualmente em $[0,2\pi]$. Uma série de Fourier pode convergir no sentido de Cesàro sem convergir no sentido usual, mas o não vice-versa.

Com o núcleo de Féjer K_n definido em (7.13), da da propriedade (7.10.6),

(C.1)
$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{ijt} = (K_n * f)(t).$$

O resultado seguinte estabelece o facto notável da série de Fourier de uma função integrável convergir sempre no sentido de Cesàro para a função, e se esta é contínua e tem valores iguais nos extremos de $[0,2\pi]$, a convergência é uniforme, e, portanto, também pontual para a essa função.

Uma consequência imediata é que se a série de Fourier de uma função de $L^1([0,2\pi])$ converge em $L^1([0,2\pi])$, então converge (em $L^1([0,2\pi])$) para f,

¹⁹⁰Cesàro, Ernesto (1859-1906).

e analogamente para uma função contínua 191 em $[0,2\pi]$ com valores iguais nos extremos deste intervalo com a convergência uniforme em $[0,2\pi]$.

Designa-se $C^p([0,2\pi])$ o espaço das funções contínuas com valores iguais em 0 e 2π com a norma uniforme $||f||_{C^p} = \max_{t \in [0,2\pi]} |f(t)|$.

(C.2) **Teorema:** Se B é um dos espaços $L^1([0,2\pi])$ ou $C^p([0,2\pi])$, então a série de Fourier de f converge no sentido de Cesàro para f em B, i.e. $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)-f\|_B = 0$. Se a série de Fourier de $f\in B$ converge na $norma d\tilde{e} B$, a soma da série é f.

Dem. Na prova do Teorema (7.15) obteve-se que $(K_n * f) \to f$ uniformemente em $[0,2\pi]$, o que prova o resultado se $B=C^p([0,2\pi])$.

No caso de $B = L^1([0, 2\pi])$, com o Teorema de Fubini,

$$\begin{split} \|f - (K_n * f)\|_{L^1} &= \int_0^{2\pi} |f(t) - (K_n * f)(t)| \, dt \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} K_n(\tau) \, |f(t) - f(t - \tau)| \, d\tau \, dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} K_n(\tau) \, |f(t) - f(t - \tau)| \, d\tau \, dt + \int_0^{2\pi} \int_{2\pi - \delta}^{2\pi} K_n(\tau) \, |f(t) - f(t - \tau)| \, d\tau \, dt \\ &= \int_0^{\delta} K_n(\tau) \int_0^{2\pi} |f(t) - f(t - \tau)| \, dt \, d\tau + \int_{\delta}^{2\pi - \delta} K_n(\tau) \int_0^{2\pi} |f(t) - f(t - \tau)| \, dt \, d\tau \\ &+ \int_{2\pi - \delta}^{2\pi} (\tau) \int_0^{2\pi} |f(t) - f(t + 2\pi - \tau)| \, dt \, d\tau \leq \max_{\tau \in [0, \delta]} \|f - f_{\tau}\|_{L^1} + 2 \, \|f\|_B \int_{\delta}^{2\pi - \delta} K_n + \max_{\tau \in [-\delta, 0]} \|f - f_{\tau}\|_{L^1}. \end{split}$$
 Como as funções contínuas são densas em $L^1([0, 2\pi])$, para qualquer $\epsilon > 0$

existe uma função g contínua em $[0,2\pi]$ tal que $\|f-g\|_{L^1}\!<\epsilon\,.$ Como g é uniformemente contínua em $[0,2\pi]$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|g(t)-g(t-\tau)| < \epsilon$ para $\tau \in [-\delta, \delta]$, $t \in [0, 2\pi]$. Portanto, para $\tau \in [-\delta, \delta]$,

$$||f - f_{\tau}||_{L^{1}} \le ||f - g_{\tau}||_{L^{1}} + ||g - g_{\tau}||_{L^{1}} + ||g_{\tau} - f_{\tau}||_{L^{1}} \le \epsilon + \int_{0}^{2\pi} |g(t) - g(t - \tau)| dt + \epsilon \le \epsilon + 2\pi\epsilon + \epsilon.$$

Escolhendo $\delta > 0$, para n suficientemente grande, $||f - (K_n * f)||_{L^1} \le 2(1+\pi) \epsilon$. Portanto, $||f - \sigma_n(f)||_{L^1} = ||f - K_n * f||_{L^1} \to 0$ quando $n \to +\infty$.

A última afirmação resulta de notar que se a série de Fourier de f converge na norma de B, então o limite de $\sigma_n(f)$ na norma de B é a soma da série (na norma de B). Q.E.D.

O resultado seguinte esclarece qual é o limite pontual de $\sigma_n(f)$ quando falha a igualdade de valores de f nos extremos do intervalo e em certas condições em que falha a continuidade no intervalo.

- (C.3) Teorema de Fejér: $Seja \ f \in L^1([0, 2\pi])$.
 - 1. Se $\lim_{h\to 0} [f(t+h)+f(t-h)]$ em $t\in \mathbb{R}$, podendo ser $\pm \infty$, então $\sigma_n(f,t)\to \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[f(t+h)+f(t-h)]$ quando $n\to +\infty$. 2. Se t é um ponto de continuidade de f, então $\sigma_n(f)(t)\to f(t)$.

 - 3. Se f é contínua num intervalo fechado $I \subset [0, 2\pi]$, então $\sigma_n(f) \rightarrow f$ uniformemente em I.

¹⁹¹Esta conclusão é uma repetição do Teorema (7.16).

- 4. Se $m \le f$ em $[0, 2\pi]$, então $m \le \sigma_n(f)$ em $[0, 2\pi]$. Se $f \leq M$ em $[0, 2\pi]$, então $\sigma_n(f) \leq M$ em $[0, 2\pi]$.
- 5. Se a série de Fourier de f converge num ponto de continuidade t, então a sua soma nesse ponto é f(t).

Dem. 1. Supõe-se que $\check{f}(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} [f(t+h) + f(t-h)]$ é finito (as alterações para limite $\pm \infty$ são simples). Como o núcleo de Fejér é uma função par e $f \in L^1([0,2\pi])$ é identificada com a sua extensão periódica de período 2π ,

Para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta \in]0, \pi[$ tal que

$$\begin{array}{ll} (\text{C.4}) & \left| \frac{f(t-\tau)+f(t+\tau)}{2} - \check{f}(t) \right| < \epsilon \,, \quad \text{para } |\tau| < \delta \,\,, \\ \text{e existe } p \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{t \in \mathbb{N}} K_n(\tau) < \epsilon \text{ para } n > p \,, \text{ pelo que} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &|\sigma_n(f)\,t) - \check{f}(t)| = \left|2\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) K_n(\tau) \left[\frac{f(t-\tau) + f(t+\tau)}{2} - \check{f}(t)\right] d\tau \right| < 2\left(\epsilon + \left\|f - \check{f}(t)\right\|_{L^1}\right), \\ &\text{para } n > p \text{ , o que termina a prova de 1.} \end{aligned}$$

- 2. Se f é contínua em t, então $\dot{f} = f(t)$ e 2. segue-se de 1.
- 3. Se f é contínua num intervalo compacto $I \subset [0, 2\pi]$, então f é uniformemente contínua em I, pelo que existe $\delta \in]0,\pi[$ tal que (C.4) é válida para $t \in I$ e, portanto, $\check{f} = f$ em I e

$$\left|\sigma_n(f)\left(t\right) - \check{f}(t)\right| < 2\epsilon \left(1 + \sup_{t \in I} \|f - f(t)\|_{L^1}\right) \le 2\epsilon \left(1 + 2\|f\|_{C^p}\right).$$

Segue-se que $\sigma_n(f) \to f$ uniformemente em I, o que prova 3.

- 4. Se $m \leq f$ em $[0, 2\pi]$, é $\sigma_n(f)(t) m = \int_0^{2\pi} K_n(\tau) [f(t-\tau) m] d\tau \geq 0$. Se $f \leq M$ é $M \sigma_n(f)(t) = \int_0^{2\pi} K_n(\tau) [M f(t-\tau)] d\tau \geq 0$.
- 5. Designa-se $S_n = S_n(f)(t)$ e S = S(f)(t), e supõe-se que $S_n \to S$ quando $n \to +\infty$. Seja $\epsilon > 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|S_n(f) - S(f)| < \epsilon$ para n > N. Logo, para n > N é

$$\begin{split} n > N. \ \operatorname{Logo}, \ \operatorname{para} \ n > N \ & \epsilon \\ |\sigma_n - S| \leq \frac{|S_0 - S| + \dots + |S_N - S|}{n+1} + \frac{|S_{N+1} - S| + \dots + |S_n - S|}{n+1} \leq \frac{|S_0 - S| + \dots + |S_N - S|}{n+1} + \frac{n-N}{n+1} \ \epsilon \ . \end{split}$$
 Para n sufficientemente grande, $\frac{1}{n+1}(|S_0 - S| + \dots + |S_N - S|) < \epsilon$, e $|\sigma_n - S| < 2\epsilon$. $\operatorname{Logo}, \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f) \ (t) = S(f) \ (t) = \lim_{n \to +\infty} S_n(f) \ (t)$. De 2, obtém-se $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) \ (t) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f) \ (t) = f(t)$. $Q.E.D.$

Convergência uniforme

Como o Teorema (B.6) do apêndice anterior assegura a validade de $f(t) = \int_0^t f' + f(0)$ para funções absolutamente contínuas, o resultado (7.21) de convergência uniforme de séries de Fourier pode ser generalizado.

(C.5) **Teorema:** Se f é absolutamente contínua e $f' \in L^2([0, 2\pi])$, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $[0, 2\pi]$.

Dem. Fica como exercício verificar que a demonstração é praticamente a mesma do Teorema (7.21).

Convergência pontual

Referiu-se na secção 7.7 que a convergência pontual de funções contínuas envolve questões difíceis. A seguir dá-se um exemplo de uma função contínua com série de Fourier divergente num ponto. Pode-se mostrar que esta função só converge num **conjunto magro** de pontos, *i.e.* numa união 192 numerável de conjuntos densos em parte alguma do intervalo $[0, 2\pi]$, *i.e.* conjuntos cujos fechos têm complementares densos neste intervalo.

(C.6) Exemplo de função contínua com série de Fourier divergente num ponto: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Designa-se por D_n o núcleo de Dirichlet definido pela fórmula (7.23) e por sgn a função definida em \mathbb{R} que atribui a cada número o valor +1, 0 ou -1 conforme o número $\epsilon > 0$, 0 ou < 0. Considera-se uma sucessão de funções $\psi_n \in C^p([0, 2\pi])$ com $\|\psi_n\|_{C^p} \leq 1$ e $\psi_n(t) = \operatorname{sgn}(D_n(t))$ excepto em pequenos intervalos centrados nos zeros de D_n com soma de comprimentos $< \epsilon$ em que, contudo, também se verifica $\operatorname{sgn}(\psi_n) = \operatorname{sgn}(D_n)$. Designa-se a união destes intervalos U. Verifica-se

Pode-se escolher $\psi_n \in C^p([0, 2\pi])$ com $\|\psi_n\|_{C^p} \le 1$ e $|S_n(\psi_n)(0)| > \frac{1}{2} \|D_n\|_{L^1}$.

Considera-se agora $\varphi_n(t) = \sigma_{n^2}(\psi_n)(t)$ e observa-se que φ_n é um polinómio trigonométrico de grau n^2 . Mais precisamente, de (C.1),

$$\varphi_{n}(t) = \sigma_{n^{2}}(\psi_{n})(t) = \sum_{j=-n^{2}}^{n^{2}} \left(1 - \frac{|j|}{n^{2}+1}\right) \widehat{\psi_{n}}(j) e^{ijt} = S_{n^{2}}(\psi_{n})(t) - \sum_{j=-n^{2}}^{n^{2}} \frac{|j|}{n^{2}+1} \widehat{\psi_{n}}(j) e^{ijt}.$$

Portanto, $\widehat{\varphi_n}(j) = \left(1 - \frac{|j|}{n^2 + 1}\right)\widehat{\psi_n}(j)$ se $|j| \le n^2$, $\widehat{\varphi_n}(j) = 0$ se $|j| > n^2$, e, como $\|\psi_n\|_{C^p} \le 1$,

$$\left|\widehat{\psi_n}(j)\right| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_n(t) e^{-ijt} dt\right| \le 1.$$

Então

$$\left| S_n(\psi_n)(0) - S_n(\varphi_n)(0) \right| = \left| \sum_{j=-n}^n \widehat{\psi_n}(j) - \sum_{j=-n}^n \widehat{\varphi_n}(j) \right| \le \sum_{j=-n}^n \frac{|j|}{n^2 + 1} |\widehat{\psi_n}(j)| \le \frac{n(n+1)}{n^2 + 1},$$

$$\left(\text{C.7}\right) \quad \left|S_{n}(\varphi_{n})\left(0\right)\right| \geq \left|S_{n}(\psi_{n})\left(0\right)\right| - \left|S_{n}(\psi_{n})\left(0\right) - S_{n}(\varphi_{n})\left(0\right)\right| > \frac{\|D_{n}\|_{L^{1}}}{2} - \frac{n(n+1)}{n^{2}+1} \; .$$

 $^{^{192}}$ Um conjunto com esta propriedade diz-se **magro** ou **de 1**^a **categoria** no sentido de R.-L. Baire. O **Teorema de Categoria de Baire** é que um espaço métrico completo não é magro, o que, em particular, se aplica a $C^p([0, 2\pi])$ com a norma uniforme. Baire, René-Louis (1874-1932).

De (C.3.4), $|\varphi_n(t)| = |\sigma_{n^2}(\psi_n)(t)| \le 1$ para $t \in [0, 2\pi]$, pelo que $||\varphi_n)||_{C^p} \le 1$. Com $\lambda_n = 2^{3^n}$ define-se $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t)$. Como a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente para um valor $\zeta(2) \in \mathbb{R}$, a série que define f é uniformemente convergente em $[0, 2\pi]$ e, portanto, $f \in C^p([0, 2\pi])$.

Prova-se agora que a série de Fourier de f é divergente no ponto t=0. Verifica-se $\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) = \sum_m \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(m) \, e^{i\lambda_j m t}$ e, como $\widehat{\varphi_{\lambda_j}}(m) = 0$ para $m > (\lambda_j)^2$, a função $t \mapsto \varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t)$ é um polinómio trigonométrico de grau $(\lambda_j)^3$. Como para $j \le n-1$ é $(\lambda_j)^3 = 2^{3(3^j)} \le 2^{3^n} = \lambda_n \le (\lambda_n)^2$, e para $j \ge n+1$ é $\lambda_j = 2^{3^j} \ge 2^{3^{n+1}} = 2^{3(3^n)} > 2^{2(3^n)} = (\lambda_n)^2$,

$$\lambda_{j} = 2^{3} \ge 2^{3} = 2^{3(3-j)} > 2^{2(3-j)} = (\lambda_{n})^{2},$$

$$S_{(\lambda_{n})^{2}} (\varphi_{\lambda_{j}}(\lambda_{j}t))(0) = \begin{cases} \sum_{m} \widehat{\varphi_{\lambda_{j}}}(m) = \varphi_{\lambda_{j}}(0) &, \text{ se } j \le n-1\\ \sum_{|m| \le \lambda_{n}} \widehat{\varphi_{\lambda_{j}}}(m) = S_{\lambda_{n}}(\varphi_{\lambda_{n}})(0) &, \text{ se } j = n\\ \widehat{\varphi_{\lambda_{j}}}(0) &, \text{ se } j \ge n+1. \end{cases}$$

Portanto.

$$\left| S_{(\lambda_n)^2}(f)(0) \right| = \left| S_{(\lambda_n)^2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) \right) (0) \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} S_{(\lambda_n)^2} \left(\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) \right) (0) \right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^2} \varphi_{\lambda_j}(0) + S_{\lambda_n} \left(\varphi_{\lambda_n} \right) (0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(0) \right|.$$

De $\|\varphi_n\|_{C^p} \le 1$, $|\varphi_n(0)| \le 1$ e $|\widehat{\varphi_n}(0)| \le 1$; logo, com $\zeta(2) = \sum \frac{1}{j^2}$ e (C.7), (C.8) $\left|S_{(\lambda_n)^2}(f)(0)\right| > \frac{\|D_n\|_{L^1}}{2} - \frac{n(n+1)}{n^2+1} - \zeta(2)$.

Como para
$$t > 0$$
 é $\left| \sin \frac{t}{2} \right| < \frac{t}{2}$,

$$||D_n||_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt > \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{j\pi/(n+1/2)}^{(j+1)\pi/(n+1/2)} ||f| dt > \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n+1/2}{(j+1)\pi} \frac{2}{n+1/2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}.$$

Como a série harmónica $\sum \frac{1}{j}$ é divergente, fazendo $n \to +\infty$ em (C.8) obtémse $|S_{(\lambda_n)^2}(f)(0)| \to +\infty$. Portanto, a série de Fourier da função contínua f é divergente no ponto t=0.

O Teorema (C.2) garante convergência uniforme, logo também pontual, de séries de Fourier de funções $f \in C^p([0,2\pi])$ quando a ordem de decrescimento dos coeficientes de Fourier $\widehat{f}(n)$ quando $n \to +\infty$ é pelo menos a de $\frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ por mais pequeno que seja $\epsilon > 0$, pois nesse caso a série de Fourier é dominada por um múltiplo da série convergente $\sum \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ e, portanto, converge uniformemente em $[0,2\pi]$ para f. O critério de convergência que se segue, obtido por G.H. Hardy¹⁹³, considera a convergência no caso em que a ordem de convergência para 0 dos coeficientes de Fourier é a de $\frac{1}{n}$.

(C.9) **Teorema:** Se $f \in L^1([0,2\pi])$ e $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ quando $|n| \to +\infty$, então a série de Fourier de f converge pontualmente no sentido usual e no de Cesàro nos mesmos pontos de $[0,2\pi]$ e para o mesmo valor. Se a série converge no sentido de Cesàro uniformemente num conjunto $U \subset [0,2\pi]$, também converge no sentido usual uniformemente em U.

¹⁹³ Hardy, Godfrey Harold (1877-1947).

Dem. Qualquer que seja $\lambda > 1$, designando a parte inteira de λn por $|\lambda n|$ e atendendo a (C.1),

$$\begin{split} \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \, \sigma_n(f) \, (t) &= \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{|j| \le n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) \widehat{f}(j) \, e^{ijt} \\ &= \frac{-1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{|j| \le n} |j| \, \widehat{f}(j) \, e^{ijt} + \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{|j| \le n} \widehat{f}(j) \, e^{ijt} \\ &= \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{|j| \le n} \left(1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1} \right) \widehat{f}(j) \, e^{ijt} + \frac{n - \lfloor \lambda n \rfloor}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{|j| \le n} \widehat{f}(j) \, e^{ijt} \,, \end{split}$$

pelo que

$$\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f)(t) = \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{\substack{n < |j| \le \lfloor \lambda n \rfloor}} \left(1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1} \right) \widehat{f}(j) \ e^{ijt} + S_n(f)(t) \ .$$

Como $\widehat{f}(n) = O(\frac{1}{n})$ quando $|n| \to +\infty$, existe M > 0 tal que $|\widehat{f}(n)| \le \frac{M}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$, e

$$\sum_{n < |j| < \lambda n} |\widehat{f}(n)| \le (\lambda - 1) n \frac{M}{n} = (\lambda - 1) M.$$

Para qualquer $\epsilon > 0$, com $\lambda = 1 + \frac{\epsilon}{M}$,

(C.10)
$$\left| S_n(f)(t) - \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f)(t) + \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f)(t) \right| \leq \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \epsilon.$$

$$\begin{array}{l} \text{Como } \lambda n - 1 < [\lambda n] \leq n \text{ , } \circ \frac{\lambda - 1}{n} < \frac{[\lambda n]}{n} \leq \lambda \text{ e quando } n \to +\infty \\ & \frac{[\lambda n]}{n} \to \lambda \text{ , } & \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} = \frac{[\lambda n]/n + 1/n}{[\lambda n]/n - 1} \to \frac{\lambda}{\lambda - 1} \text{ , } & \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} = \frac{1 + 1/n}{[\lambda n]/n - 1} \to \frac{1}{\lambda - 1} \end{array}$$

Se a série de Fourier de f é convergente no sentido de Cesàro num ponto t, então a sucessão $\{\sigma_n(f)(t)\}$ converge para um valor que se designa por $\sigma(f)(t)$. No limite quando $n \to +\infty$ em (C.10) obtém-se

$$\left| \lim_{n \to +\infty} S_n(f)(t) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \sigma(f)(t) + \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(f)(t) \right| \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(t) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \, \sigma(f)(t) + \frac{1}{\lambda - 1} \, \sigma(f)(t) = \sigma(f)(t) \,,$$

e, portanto, a série de Fourier de f converge no sentido usual no ponto t para o mesmo valor para que converge no sentido de Cesàro. Da desigualdade (C.10), se $\sigma_n(f)(t) \to \sigma(f)(t)$ uniformemente para t num conjunto $U \subset$ $[0,2\pi]$, então $S_n(f)(t) \rightarrow \sigma(f)(t)$ uniformemente em U.

Se a série de Fourier de f converge no sentido usual num ponto t, a sucessão $\{S_n(f)(t)\}$ converge para um valor designado S(f)(t). Logo,

$$\sigma_n(f)\left(t\right) = \frac{S_0(f)\left(t\right) + S_1(f)\left(t\right) + \dots + S_n(f)\left(t\right)}{n+1} \to S(f)\left(t\right),$$

pelo que se a série converge no sentido usual num ponto t, então converge no sentido de Cesàro para o mesmo valor em t. Q.E.D.

Este critério de convergência aplica-se directamente a funções de variação limitada num intervalo compacto [a, b], definidas no apêndice precedente.

(C.11) Teorema (Critério de Jordan): Se $f \in L^1([0, 2\pi])$ é uma função de variação limitada num intervalo $[t-\delta,t+\delta]$, com $\delta > 0$, então a série de Fourier de f converge em t para $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[f(t+h)+f(t-h)]$; pelo que converge para f(t) em cada ponto t em que f é contínua. A convergência é uniforme em intervalos fechados de continuidade.

Dem. A função $g = f\chi_{[t-\delta,t+\delta]}$ é de variação limitada no intervalo $[0,2\pi]$. Se M > 0 é tal que qualquer que seja a partição finita $0 = t_0 < \cdots < t_m = 2\pi$ de $\begin{array}{l} [0,2\pi] \ \acute{\text{e}} \sum_{k=1}^{m} |g(t_{k}) - g(t_{k-1})| \leq M, \ \text{ent\~ao} \\ |g(t_{k}) \ e^{-int_{k}} - g(t_{k-1}) \ e^{-int_{k-1}}| = \left| e^{-int_{k}} [g(t_{k}) - g(t_{k-1}) \ e^{in(t_{k} - t_{k-1})}] \right| \end{aligned}$

$$\begin{aligned} & \left| g(t_k) e^{-int_k} - g(t_{k-1}) e^{-int_{k-1}} \right| = \left| e^{-int_k} \left[g(t_k) - g(t_{k-1}) e^{in(t_k - t_{k-1})} \right] \right| \\ & \leq \left| g(t_k) - g(t_{k-1}) \right| + \left| g(t_{k-1}) \right| \left| 1 - e^{in(t_k - t_{k-1})} \right| \leq \left| g(t_k) - g(t_{k-1}) \right| + 2\left| g(t_{k-1}) \right| \end{aligned}$$

$$\leq |g(t_k) - g(t_{k-1})| + |g(t_{k-1})| + |g(t_{k-$$

pelo que $\sum_{k=1}^{m} |g(t_k)e^{-int_k} - g(t_{k-1})e^{-int_{k-1}}| \le 2M + 2|g(0)|$ e, portanto, a função $h(t) = g(t)e^{-int}$ também é de variação limitada com variação total $T_0^{2\pi} \le 2T_0^{2\pi}(g) + 2|g(0)|$. Do Teorema (B.1),

$$\left| \int_{0}^{2\pi} h' \right| \le T_{0}^{2\pi}(h) \le 2T_{0}^{2\pi}(g) + 2|g(0)|.$$

$$\left| \int_{0}^{2\pi} h' \right| \le T_{0}^{2\pi}(h) \le 2T_{0}^{2\pi}(g) + 2|g(0)|.$$

$$\text{Como } h'(t) = g'(t) e^{-int} - in g(t) e^{-int} \text{ q.t.p. em } [0, 2\pi],$$

$$\left| |\widehat{g}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} g(t) e^{-int} dt \right| \le \left| \frac{1}{2\pi in} \int_{0}^{2\pi} h'(t) dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi in} \int_{0}^{2\pi} g'(t) e^{-int} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi n} \left(2 T_0^{2\pi}(g) + 2 |g(0)| \right) + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} |g'(t)| dt \leq \frac{1}{\pi n} \left(2 T_0^{2\pi}(g) + |g(0)| \right).$$

Assim, $|\widehat{g}(n)| = O(\frac{1}{n})$ quando $|n| \to +\infty$. Do teorema precedente, a série de Fourier de g converge no sentido usual no ponto t para o mesmo valor que converge no sentido de Cesàro, que, do Teorema de Fejér em (C.3.1), é $\lim_{h\to 0}\frac{g(t\!+\!h)\!+\!g(t\!-\!h)}{2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t\!+\!h)\!+\!f(t\!-\!h)}{2}\,.$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(t+h)+g(t-h)}{2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}.$$

Do Princípio de Localização de Riemann em (7.31), a série de Fourier de f converge para o mesmo valor no ponto t, pois f = g numa vizinhança de t.

A convergência da série de Fourier de f num ponto t em que esta função é contínua para f(t) resulta de (C.3.2) e a convergência uniforme em intervalos fechados de continuidade de f de (C.3.3).

Como se observou no capítulo sobre séries de Fourier, a verificação do Critério de Dini é, em geral, incómoda. Nesse capítulo foi dada a condição mais simples de continuidade à Lipshitz à esquerda e à direita de um ponto $t\,.$ Esta condição pode ser estendida a continuidade à Hölder 194 em $t\,.$ Dizse que uma função real de variável real é **contínua à Hölder** num ponto tem que está definida se existem M, a > 0 tais que $|f(\tau) - f(t)| \le M |\tau - t|^a$ para τ na intersecção de uma vizinhança de t com o domínio de f. As funções lipschitzianas são o caso particular de funções contínuas à Hölder com expoente a=1.

¹⁹⁴Hölder, Otto Ludwig (1859-1937).

(C.12) **Teorema:** Se $f \in L^1([0,2\pi])$ é contínua à Hölder em $t \in [0,2\pi]$, então a série de Fourier de f converge em t para f(t).

Dem. Como f é contínua à Hölder em t, então é contínua no sentido usual em t. Como se viu no parágrafo precedente, $k(\tau) = \frac{1}{2\tau}[f(t+\tau) - f(t) + f(t-\tau) - f(t)]$. Logo, para $\tau \in [0,\delta]$ com $\delta > 0$ suficientemente pequeno,

$$|k(\tau)| \leq \tfrac{|f(t+\tau)-f(t)|+|f(t-\tau)-f(t)|}{2\tau} \leq M\tau^{a-1}.$$

Como k é mensurável e $\int_0^\delta M \tau^{a-1} = \frac{1}{a} M \delta$, obtém-se que k é integrável em $[0,\delta]$. O Critério de Dini dá resultado. Q.E.D.

Notas históricas

O Critério de Jordan deve-se a C. Jordan em 1893.

A descoberta de que a convergência no sentido de Cesàro é particularmente adequada para séries de Fourier deve-se a L. Féjer em 1904, altura em que introduziu o núcleo que veio a receber o seu nome e estabeleceu o Teorema de Féjer.

A convergência no sentido de Cesàro de séries de Fourier com coeficientes que tendem para 0 com ordem $\frac{1}{n}$ quando $n \to +\infty$ foi estabelecida por G.H. Hardy em 1920.

Apêndice D

Complementos sobre transformação de Fourier

No capítulo 11 considerou-se a Transformação de Fourier de funções integráveis em \mathbb{R} e estabeleceu-se a inversão da transformação com o valor principal de Cauchy na fórmula de inversão a convergir uniformemente se é verificada uma das condições seguintes:

- (i) a transformada da função é integrável;
- (ii) a função é C^2 e tem 1^a e 2^a derivadas integráveis, ou mais simplesmente é C^2 e tem suporte compacto;
- (iii) a função é diferenciável com derivada integrável e transformada de Fourier da derivada de quadrado integrável, ou mais simplesmente é C^1 , e tem suporte compacto.

Nesse capítulo também se estabeleceu a convergência da fórmula de inversão da Transformação de Fourier com o Critério de Dini. Estas condições são análogas para convergência de séries de Fourier. No apêndice precedente estabeleceu-se o Critério de Jordan para convergência pontual de séries de Fourier de funções de variação limitada, pelo que também se considera aqui o critério análogo para a inversão da transformação de Fourier.

A analogia de séries de Fourier com Transformação de Fourier leva a esperar que a teoria da Transformação de Fourier seja natural e simples no quadro das funções de quadrado integrável. Esta expectativa é confirmada neste apêndice considerando a Transformação de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$, chamada transformação de Fourier-Plancherel¹⁹⁵.

Critério de Jordan para inversão da transformação de Fourier

O resultado seguinte de inversão da Transformação de Fourier de funções de variação limitada é análogo ao Critério de Jordan para séries de Fourier.

(D.1) Teorema (Critério de Jordan para inversão da Transformação de Fourier): $Se\ f\in L^1(\mathbb{R})$, $t\in\mathbb{R}\ e\ f\ \acute{e}\ de\ variação\ limitada\ em$ $[t-\delta,t+\delta]\ para\ algum\ \delta>0$, $então\ \mathfrak{F}^{-1}[\ \widehat{f}\]\ (t)=\frac{1}{2}\lim_{h\to +\infty}[f(t+h)+f(t-h)]\ ;$ $em\ particular,\ \mathfrak{F}^{-1}[\ \widehat{f}\]\ (t)=f(t)\ nos\ pontos\ t\ de\ continuidade\ de\ f\ .$

¹⁹⁵Plancherel, Michel (1885-1967).

Dem. Do Princípio de Localização de Riemann (11.20), basta verificar que a função $g(h)=\frac{1}{2}[f(t+h)+f(t-h)]$ satisfaz $\lim_{T\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta\frac{g(\tau)}{\tau}\,\sin(T\tau)\,d\tau=g(0+)$, em que $g(0+)=\lim_{h\to 0}g(h)$.

Como a g é de variação limitada em $[t-\delta, t+\delta]$, do Teorema (B.1), é a diferença de funções crescentes. Da linearidade do limite e do integral, basta verificar a fórmula para g crescente em $[t-\delta, t+\delta]$, o que se passa a supor.

Para $0 < a < \delta$.

$$\int_0^{\delta}\!\!\frac{g(\tau)}{\tau}\sin(T\tau)d\tau = \!\int_0^a\!\!\left[g(\tau)-g(0+)\right] \frac{\sin(T\tau)}{\tau}d\tau + g(0+)\!\!\int_0^a\!\!\frac{\sin(T\tau)}{\tau}d\tau + \int_0^\delta\!\!\frac{g(\tau)}{\tau}\sin(T\tau)d\tau.$$

Para $\tau \in [a,\delta]$ é $\left|\frac{g(\tau)}{\tau}\right| \leq \frac{|g(\tau)|}{a}$, pelo que a integrabilidade de g implica que a função $\tau \mapsto \frac{g(\tau)}{\tau}$ pertence a $L^1([a,\delta])$. Do Lema de Riemann-Lebesgue, o último integral converge para zero quando $T \to +\infty$. Por outro lado, com uma mudança de variável de integração e do Lema (11.22),

$$\int_0^a \frac{\sin(T\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^T \frac{\sin s}{s} ds \to \frac{\pi}{2}, \quad \text{quando } T \to +\infty.$$

Portanto.

$$\lim_{T\to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{g(\tau)}{\tau} \sin(T\tau) d\tau = \lim_{T\to +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^a [g(\tau)-g(0+)] \frac{\sin(T\tau)}{\tau} d\tau + g(0+).$$

Para terminar a prova resta mostrar que o integral no lado direito pode ser tornado arbitrariamente pequeno, independentemente de T, à custa de tomar a>0 suficientemente pequeno. É claro que dado $\epsilon>0$ arbitrário pode-se escolher a>0 tal que $g(a)-\lim_{h\to 0}g(h)<\epsilon$. Designando $k(t)=\int_0^t \frac{\sin(Ts)}{s} ds$ e integrando por partes,

$$\int_0^a [g(\tau) - g(0+)] \frac{\sin(T\tau)}{\tau} d\tau = \left[[g(\tau) - g(0+)] k(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=a} - \int_0^a g'(\tau) k(\tau) d\tau.$$

Como g é crescente, $g' \ge 0$ q.t.p. em $[t-\delta, t+\delta]$, e com $m = \inf_{[0,a]} k$ e $M = \sup_{[0,a]} k$,

$$m \int_0^a g'(\tau) d\tau \le \int_0^a g'(\tau) k(\tau) d\tau \le M \int_0^a g'(\tau) d\tau.$$

Como k é uma função contínua em [0,a], assume todos valores entre m e M, pelo que existe $b \in [0,a]$ tal que

$$\int_0^a g'(\tau) k(\tau) d\tau = k(b) \int_0^a g'(\tau) d\tau = k(b) [g(a) - g(0+)].$$

Portanto.

$$\left| \int_0^a [g(\tau) - g(0+)] \frac{\sin(T\tau)}{\tau} d\tau \right| = |g(a) - g(0+)| |k(a) - k(b)|$$

$$\leq \epsilon \left| \int_b^a \frac{\sin(Ts)}{s} ds \right| = \epsilon \left| \int_{Tb}^{Ta} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right| \leq \epsilon \left| \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right|.$$

Logo, $\left| \int_0^a \left[g(\tau) - g(0+) \right] \frac{\sin(T\tau)}{\tau} d\tau \right|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando a > 0 suficientemente pequeno. Q.E.D.

Transformação de Fourier de funções de quadrado integrável

A definição anterior de Transformação de Fourier não se pode aplicar directamente a todas funções em $L^2(\mathbb{R})$, pois este espaço não está incluído em $L^1(\mathbb{R})$, mas pode ser aplicada a funções $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(D.2) Teorema (Fórmula de Plancherel):
$$Se \ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$
, $ent\~ao \ \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \ e \ ||\widehat{f}||_{L^2} = 2\pi \ ||f||_{L^2}$.

Dem. Designa-se $\widetilde{f}(t) = \overline{f}(-t)$, em que \overline{f} é a conjugada de f, e define-se g = f * f. Como $f, f \in L^1(\mathbb{R})$, também $g \in L^1(\mathbb{R})$. Além disso,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \, \overline{f}(-\tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) \, \overline{f}(\tau) \, d\tau = \langle f_{-t}, f \rangle \,,$$

com o produto interno em $L^2(\mathbb{R})$. A função g é contínua porque tanto a função $t\mapsto f_{-t}$ de $\mathbb R$ em $L^2(\mathbb R)$ como o produto interno de $L^2(\mathbb R)\times L^2(\mathbb R)$ em C são contínuas; da Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|g(t)| = |\langle f_{-t}, f \rangle| \le ||f_{-t}||_{L^2} ||f||_{L^2} = ||f||_{L^2}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

pelo que g é limitada.

Considera-se a função $H_{\lambda}(t) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + t^2)}$, para $\lambda > 0$. Do exemplo (11.7.2), H_{λ} é a transformada de Fourier de $h_{\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda|t|}$, pelo que $\widehat{H_{\lambda}}(\omega) = e^{-\lambda|\omega|}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{\lambda} = \widehat{H_{\lambda}}(0) = 1$. Logo, com mudança de variáveis de integração,

$$(H_{\lambda} * g) (0) - g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(-\tau) - g(0)] H_{\lambda}(\tau) d\tau$$

=
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [g(-\tau) - g(0)] \frac{H_{1}(\tau/\lambda)}{\lambda} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(-\lambda s) - g(0)] H_{1}(s) ds.$$

A última função integranda satisfaz $|[g(-\lambda s)-g(0)]H_1(s)| \leq 2||f||_{L^2(\mathbb{R})}^2H_1(s)$ para $s \in \mathbb{R}$, pelo que o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue pode ser aplicado para obter $\lim_{\lambda \to 0} (H_{\lambda} * g)(0) = g(0) = ||f||_{L^{2}}^{2}$.

Como $\widehat{g} = (f * \widetilde{f})^{\hat{}} = \widehat{f} \hat{f} = \widehat{f} = |\widehat{f}|^2 e \widehat{H_{\lambda}} \ge 0$ cresce para 1 em todos pontos quando $\lambda \rightarrow 0$, do Teorema da Convergência Monótona de Levi,

$$||f||_{L^{2}}^{2} = \lim_{\lambda \to +\infty} (H_{\lambda} * g) (0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}|^{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}|^{2} = \frac{1}{2\pi} ||\widehat{f}||_{L^{2}}^{2}.$$

$$Q.E.D.$$

Este teorema estabelece que a Transformação de Fourier define, a menos de multiplicação por $\frac{1}{2\pi}$, uma isometria de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, na norma deste espaço. Esta isometria pode ser estendida a uma isometria de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, como se mostra a seguir.

(D.3) **Teorema de Plancherel:** Existe uma extensão da transformação de Fourier definida em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ para uma transformação linear $\mathfrak{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, chamada **Transformação de Fourier-Plancherel**, que satisfaz $\|\mathfrak{F}[f]\|_{L^2} = 2\pi \|f\|_{L^2}$ e as fórmulas

com os limites na norma de $L^2(\mathbb{R})$, ou seja em média quadrática.

Dem. Seja F o espaço de todas as transformadas de Fourier \widehat{f} de funções $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Da Fórmula de Plancherel do teorema precedente, $F \subset L^2(\mathbb{R})$. Com as funções H_{λ} e h_{λ} da prova desse teorema, obtém-se que as funções definidas por $f_{\lambda,\sigma}(t) = h_{\lambda}(t) \, e^{i\sigma t}$ pertencem a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ para todo $\lambda > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$. As suas transformadas de Fourier são elementos de F dados por $\widehat{f_{\lambda,\sigma}}(\omega) = \widehat{h_{\lambda}}(\sigma - \omega)$. Se F^{\perp} designa o complemento ortogonal de F em $L^2(\mathbb{R})$ e $v \in F^{\perp}$,

$$(\widehat{h_{\lambda}} * \overline{v}) (\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h_{\lambda}} (\sigma - \omega) \, \overline{v}(\omega) \, d\omega = \langle \widehat{f_{\lambda,\sigma}}, v \rangle = 0 \, .$$

Da definição de convolução, de $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{\lambda} = 1$ obtida na prova do teorema precedente, e do Teorema de Fubini,

Fazendo $\lambda \to 0$, obtém-se do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue $||(H_{\lambda}*\overline{v})-\overline{v}\,||_{L^1}\to 0$, pelo que, como $H_{\lambda}*\overline{v}=0$, é $\overline{v}=0$ q.t.p. em $\mathbb R$. Logo, $F^{\perp}=\{0\}$ e, portanto, F é denso em $L^2(\mathbb R)$.

Como as funções contínuas de suporte compacto são densas em $L^1(\mathbb{R})$ e em $L^2(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$.

Considera-se uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ arbitrária. Existe uma sucessão $\{f_k\}$ em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_k \to f$ na norma de $L^2(\mathbb{R})$ quando $k \to +\infty$. Como a sucessão $\{f_k\}$ é de Cauchy, da Fórmula de Plancherel no Teorema (D.2), $\{\widehat{f}_k\}$ também é sucessão de Cauchy em $L^2(\mathbb{R})$. Como $L^2(\mathbb{R})$ é completo, a sucessão $\{\widehat{f}_k\}$ é convergente para uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ na norma deste espaço. Define-se a extensão da Transformação de Fourier a f por $\mathfrak{F}[f] = g$. Esta definição não é ambígua, pois se $\{f_k\}$, $\{\widetilde{f}_k\}$ são duas sucessões em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que convergem na norma de $L^2(\mathbb{R})$ para uma mesma função f, então $\{f_k - \widetilde{f}_k\}$ converge para 0 e, devido à Fórmula de Plancherel no Teorema (D.2), também a sucessão $\{(f_k - \widetilde{f}_k)^{\hat{}}\}$ converge para 0 na norma de $L^2(\mathbb{R})$ e $\lim_{k \to +\infty} \widehat{f}_k = \lim_{k \to +\infty} (\widetilde{f}_k)^{\hat{}}$ na norma de $L^2(\mathbb{R})$. A transformação \mathfrak{F} assim definida em $L^2(\mathbb{R})$ é uma extensão da Transformação \mathfrak{F} assim definida em $L^2(\mathbb{R})$ é uma extensão da Transformação

A transformação \mathfrak{F} assim definida em $L^2(\mathbb{R})$ é uma extensão da Transformação de Fourier definida em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. A validade da fórmula

 $\|\mathfrak{F}[f]\|_{L^2}=2\pi\,\|f\|_{L^2} \text{ para } f\in L^2(\mathbb{R}) \text{ resulta de } f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R}) \text{ e da continuidade da norma como função de } L^2(\mathbb{R}) \text{ em } \mathbb{R} \text{ . A linearidade de } \mathfrak{F} \text{ em } L^2(\mathbb{R}) \text{ também resulta da linearidade da transformação em } L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R}) \text{ e da continuidade da adição e da multiplicação por escalares em } L^2(\mathbb{R}) \text{ .}$

Resta provar as fórmulas no enunciado que envolvem limites em $L^2(\mathbb{R})$ para cálculo da Transformação de Fourier-Plancherel e da sua inversa. Designa-se $\varphi_T(\omega) = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^T f(t) \, e^{-i\omega t} \, dt$. Tem-se $f\chi_{[-T,T]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e $\varphi_T = (f\chi_{[-T,T]})$, em que $\chi_{[-T,T]}$ é a função característica do intervalo [-T,T] que vale 1 nos pontos do intervalo e 0 nos outros pontos de \mathbb{R} . Como $\|f-f\chi_{[-T,T]}\|_{L^2} \to 0$ quando $T \to +\infty$,

$$\left\|(\widehat{f}-f\chi_{[-T,T]})^{\smallfrown}\right\|_{L^{2}} = 2\pi \left\|f-f\chi_{[-T,T]}\right\|_{L^{2}} \to 0\,, \quad \text{quando } T \to +\infty\,.$$

Fica assim provada a fórmula para a transformada de Fourier-Plancherel. A fórmula para a inversa prova-se analogamente. Q.E.D.

Uma consequência é a inversão da Transformação de Fourier para funções de quadrado integrável com transformadas de Fourier integráveis.

(D.4) Teorema de inversão de transformadas de Fourier integráveis de funções de quadrado integrável:

$$Se\ f\in L^2(\mathbb{R})\ e\ \widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})\ ,\ ent \widetilde{ao}\ f=\mathfrak{F}^{-1}[\ \widehat{f}\]\ \mathrm{q.t.p.}\ em\ \mathbb{R}\ .$$

Para a Transformação de Fourier-Plancherel verifica-se uma fórmula análoga à Fórmula de Parseval para séries de Fourier de funções periódicas de quadrado integrável.

(D.5) Teorema (Fórmula de Parseval para a transformação de Fourier-Plancherel): Se $f,g\!\in\!L^2(\mathbb{R})\,,\ ent\~ao$

Dem. Basta observar que, do Teorema de Plancherel (D.3),

$$\langle \mathfrak{F}[f+g], \mathfrak{F}[f+g] \rangle = \langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[f] \rangle + \langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g] \rangle + \langle \mathfrak{F}[g], \mathfrak{F}[f] \rangle + \langle \mathfrak{F}[g], \mathfrak{F}[g] \rangle$$
é igual a

$$2\pi\langle f+q, f+q\rangle = 2\pi\langle f, f\rangle + 2\pi\langle f, q\rangle + 2\pi\langle q, f\rangle + 2\pi\langle q, q\rangle$$

e aplicando outra vez o mesmo teorema,

$$\langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g] \rangle + \langle \mathfrak{F}[g], \mathfrak{F}[f] \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle + 2\pi \langle g, f \rangle,$$

e, portanto, $\operatorname{Re}\langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g] \rangle = 2\pi \operatorname{Re}\langle f, g \rangle$. Como

$$\operatorname{Im}\langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g] \rangle = -\operatorname{Re} i\langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g] \rangle = \operatorname{Re} \langle \mathfrak{F}[if], \mathfrak{F}[g] \rangle$$
$$= 2\pi \operatorname{Re} \langle if, g \rangle = 2\pi \operatorname{Re} i\langle f, g \rangle = 2\pi \operatorname{Im} \langle f, g \rangle,$$

obtém-se
$$\langle \mathfrak{F}[f], \mathfrak{F}[g] \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$$
. Q.E.D.

376 Apêndice D: Complementos sobre transformação de Fourier

O Teorema de Plancherel e as suas consequências imediatas estabelecem que a Transformação de Fourier-Plancherel e a sua inversa estão bem definidas em $L^2(\mathbb{R})$, obtendo-se as fórmulas integrais naturais sem necessidade de verificação de hipóteses adicionais, desde que a convergência considerada para os integrais seja na norma de $L^2(\mathbb{R})$, ou seja no sentido de convergência quadrática. Assim, verifica-se que a formulação da Transformação de Fourier é mais simples no quadro das funções de quadrado integrável, tal como se tinha observado para as séries de Fourier.

Notas históricas

O Teorema de Plancherel foi provado por M. Plancherel em 1910.

Bibliografia

A bibliografia sobre os assuntos deste texto é imensa. Optou-se por indicar uma lista reduzida, com alguns livros alternativos sobre os temas considerados e incluindo, também, livros sobre assuntos aflorados mas não aprofundados neste texto. Pretende-se, assim, facultar referências possíveis para a continuação do estudo destes assuntos. Os livros citados têm referências bibliográficas adicionais que podem ser úteis.

- 1. ARNOLD, V.I., Lectures on Partial Differential Equantions, Springer Verlag, Berlin, 2004.
- 2. ARNOLD, V.I., Ordinary Differential Equantions, 10th edition, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1998.
- 3. BOYCE, W.E., DiPRIMA, R.C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2009.
- 4. de FIGUEIREDO, D.G., Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, 2nd edition, IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1987.
- 5. HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Pub. Co., New York, 1980.
- HIRSCH, M.W., SMALE, S., Devaney, R.L. Differential Equations, Dynamical Systems, and and Introduction to Chaos, Academic Press, New York, 2004.
- 7. JOHN, F., Partial Differential Equations, Springer Verlag, 3rd edition, New York, 1978.
- 8. JORDAN, D.W., SMITH, P., Nonlinear Ordinary Differential Equations An Introduction for Scientists and Engineers, 4th edition, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- 9. KATZNELSON, Y., An Introduction to Harmonic Analysis, $3^{\rm rd}$ edition, Cambridge University Press, 2004.
- MAGALHÃES, L.T., Álgebra Linear Concisa com Múltiplas Aplicações – Sobreposição, Invariância, Métricas, Tensores, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2021.
- 11. MAGALHAES, L.T., Análise e Dinâmica Complexa em Uma Variável e Aplicações, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2021.

- 12. MAGALHÃES, L.T., Aplicações de Álgebra Linear Harmónicas, Referenciais, Ondaletas, Aquisição Compressiva, Códigos, Cifras, Espectro, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2021.
- 13. MAGALHÃES, L.T., Aplicações de Álgebra Linear Positividade, Convexidade, Dinâmica, Controlo, Matrizes polinomiais, Matrizes racionais, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2021.
- 14. MAGALHÃES, L.T., Integrais Múltiplos, Texto Editora, Lisboa 1993.
- 15. OLVER, P.J., Introduction to Partial Differential Equations, $3^{\rm rd}$ edition, Springer Verlag, New York, 2020.
- 16. WEINBERGER, H.F., A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1965.