Quaisquer das curvas de *Jordan* nos integrais de linha referidos nos grupos **I** e **II** abaixo, são parametrizadas por caminhos de *Jordan* percorridos no sentido positivo

I - 7.0 Val.

[3.5] **1**. Considere as seguintes funções meromorfas

$$f(z) := \frac{e^{\pi z} - 1}{(z^2+4)^2 z} \quad \text{e} \quad g(z) := \frac{z}{e^{\pi z} - 1}.$$

i) Determine e classifique as singularidades da função $f(z)$.

ii) Determine o raio de convergência da série de *Taylor* de $f(z)$, centrada em $z = 1$.

iii) Calcule os seguintes integrais de linha na variável complexa

$$\int_{|z|=3/2} g(z)\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z-2i|=3/2} g(z)\, dz.$$

iv) Considere r tal que $r \neq 2n$, $n = 1, 2, \ldots$ e $r > 0$. Calcule

$$\int_{|z|=r} g(z)\, dz.$$

[2.0] **2**. Considere a seguinte função racional

$$r(z) := \frac{1}{9 - z^2}$$

i) Determine a série de *Mac-Laurin* da função $r(z)$ e a sua região de convergência.

ii) Determine o desenvolvimento de $r(z)$ em série de potências inteiras de $(z-3)$, convergente na região $|z-3| > 6$.

[1.5] **3**. Considere a seguinte função meromorfa

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z^2 + 9}.$$

i) Calcule o seguinte integral em ordem à variável real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

ii) Classifique a singularidade $z = 0$ da função $g(z) := f(1/z)$ e calcule $\operatorname{Res}(g; 0)$.

II - 3.0 Val.

[3.0] **1**. Considere a função $u(z) := x + \operatorname{Re}\left(z\overline{z}^2 - \overline{z}z^2 + z^2\right)$, aonde $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Justifique que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$ e determine a sua harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

ii) Determine os complexos z, onde a derivada complexa $u'(z)$ está definida e indique o seu valor.

iii) Calcule o valor dos seguintes integrais de linha na variável complexa

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z|=1} u(z)\, dz,$$

aonde $f(z)$ designa a função de variável complexa $u(z) + iv(z)$.

III - 3.0 Val.

[3.0] **1**. Considere os seguintes problemas de valores iniciais

$$e^{2t} - 1 - x^3 e^{-2t}\,\dot{x} = 0 \quad , \quad x(0) = x_0.$$

i) Suponha $x_0 = 1$. Determine a solução do **PVI** acima, e indique o seu intervalo máximo de definição.

ii) Suponha $x_0 = 0$. Justifique cuidadosamente que o referido **PVI** não admite soluções.

IV - 5.0 Val.

[2.0] **1**.

i) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y'' - y' - 6y = e^{-2t} + 1. \tag{1}$$

ii) Se $y(t)$ é solução de (1), indique uma equação diferencial de ordem 2, da qual $x(t) := y(\ln t)$ é solução.

[3.0] **2**. Considere $v := [x, y, z]^T$, tanto a seguinte matriz de *Toeplitz* e sistema de equações diferenciais lineares

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{v} = Av. \tag{2}$$

i) Verifique que $[-2\,,\,0\,,\,1]^T$ é solução constante da equação diferencial em (2), e que se v é solução então

$$y'' = 4y. \tag{3}$$

ii) Mostre que qualquer solução v da equação diferencial em (2), escreve-se na seguinte forma

$$v = \left[\frac{y'}{2}\,,\, y\,,\, \frac{y'}{4}\right]^T + c[-2\,,\,0\,,\,1]^T,$$

aonde c é constante e y é uma solução de (3).

iii) Determine explicitamente as entradas da matriz exponencial e^{At}.

Observação: Para resolver a alínea *iii*), pode assumir as asserções enunciadas nas alíneas *i*) e *ii*). Ser-lhe-á evidente que a resolução também pode decorrer sem dependência das mencionadas asserções.

V - 2.0 Val.

[2.0] **1**. Aplique o método de separação de variáveis e determine uma solução da seguinte equação às derivadas parciais

$$\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & ; \quad t > 0\,,\, x \in \mathbb{R} \\ (2) & u(t,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t,\pi) = 0 & ; \quad t \geq 0 \\ (3) & u(0,x) = \sin x + 2\sin(2x) & ; \quad x \in \mathbb{R} \end{array}.$$

Resolução

I

1. i) A função $f_1(z) := e^{\pi z} - 1$ anula-se com ordem 1, nos complexos $2ki$, $k \in \mathbb{Z}$. A função $f_2(z) := (z^2+4)^2 z$ anula-se em $z=0$ e em $z=\pm 2i$, respectivamente com multiplicidades 1 e 2. Assim, a função $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ tem singularidades em $z=0$ e $z=\pm 2i$, as quais são removíveis e pólos simples, respectivamente.

ii) A singularidade $z=0$ é removível. Se r denota o raio de convergência da série de *Taylor* referida, então

$$r := \min\{|1-2i|\,,\,|1+2i|\} = \sqrt{5}.$$

iii) A função $g(z)$ é o cociente de funções com zeros de ordem 1, em $z=0$ e em $z=2ki$ ($k \in \mathbb{Z}$), respectivamente. Assim, $z=0$ é singularidade removível da função $g(z)$, a qual identifica-se com uma função holomorfa num conjunto aberto que contém o fecho do interior da curva de integração. Do teorema de *Cauchy*, deduz-se a igualdade

$$\int_{|z|=3/2} g(z)\, dz = 0.$$

Para terminar, considere-se o seguinte

$$\int_{|z-2i|=3/2} g(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g; 2i) = 2\pi i \frac{z}{(e^{\pi z}-1)'}\,\Big|_{z=2i} = -4.$$

iv) As singularidades de $g(z)$, com excepção da singularidade removível, incluem-se aos pares no interior da curva de integração, i.e. $2ki$ é interior à curva sse $-2ki$ é interior, $0 \neq k \in \mathbb{Z}$. Se $k \neq 0$ então

$$\operatorname{Res}(g; 2ki) = \frac{z}{(e^{\pi z}-1)'}\,\Big|_{z=2ki} = \frac{2ki}{\pi} \quad \text{e logo} \quad \operatorname{Res}(g; 2ki) + \operatorname{Res}(g; -2ki) = 0.$$

Conclui-se

$$\int_{|z|=r} g(z)\, dz = 0\,,\ \ r \neq 2n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

■

2. i) Considerando a soma da série geométrica, obtém-se

$$f(z) := \frac{1}{9-z^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-z^2/9}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{9^{n+1}}\,,\ \ |z| < 3.$$

ii) Os mesmos argumentos servem para, da seguinte forma terminar a resolução

$$f(z) := \frac{1}{(z-3)(z+3)} = \frac{1}{z-3}\left(\frac{1}{6+(z-3)}\right) = \frac{1}{(z-3)^2}\left(\frac{1}{1+6/(z-3)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{6^n}{(z-3)^{n+2}}\,,\ \ |z-3| > 6.$$

■

3. i) Sem dificuldades, o aluno interessado justifica que o Lemma de *Jordan*, o Teorema dos resíduos e técnicas de cálculo de integrais de funções racionais sem zeros no eixo real, estabelecem o seguinte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := 2\pi i \operatorname{Res}(f; 3i) = 2\pi i \frac{e^{iz}-1}{(z^2+9)'}\,\Big|_{z=3i} = \pi \frac{1-e^3}{3e^3}.$$

ii) A função g é meromorfa. Sem dificuldades, conclui-se

$$g(z) = \frac{z^2(e^{i/z}-1)}{1+9z^2} =: r(z)(e^{i/z}-1).$$

O aluno interessado, pode sem dificuldades deduzir que a função $h(z) := e^{i/z} - 1$ tem singularidade essencial em $z = 0$. A função $r(z)$ é analítica em $z = 0$ e $r(0) \neq 0$. Logo, a função $g(z) = r(z)h(z)$ tem singularidade essencial na origem. Pode, sem dificuldades, justificar a asserção anterior, e.g. considerando que

$$z = 0 \quad \text{é singularidade essencial de } f \text{ sse} \quad \lim_{z\to 0} f(z) \quad \text{não existe em } \dot{\mathbb{C}}.$$

Para determinar o resíduo, pode e.g. considerar $0 < \epsilon < 1/3$ e as seguintes computações

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g;0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} f(1/z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{z^2(e^{iz}-1)}{1+9z^2}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{e^{iz}-1}{z^2(z^2+9)}\,dz \\
&= \frac{1}{18\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{e^{iz}-1}{z^2+9}\,dz - \frac{1}{18\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{e^{iz}-1}{z^2}\,dz = -\frac{(e^{iz}-1)'}{9}\Big|_{|z=0} = \frac{1}{9i}.
\end{aligned}$$

■

II

1. i) Porque $z\overline{z}^2 - \overline{z}z^2 = 2i\mathrm{Im}\,(\overline{z}^2)$ então $u = \mathrm{Re}\,(z + z^2)$. Considerando que $z + z^2$ é inteira então u é harmónica e $v = \mathrm{Im}\,(z + z^2) = y + 2xy$, aonde $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) A função u verifica $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Segue que u é $\mathbb{C}$-diferenciável sse verifica a equação de *Cauchy-Riemann*. Considerando o seguinte

$$\partial_{\overline{z}} u(z) = \frac{1}{2}\partial_{\overline{z}}\big(z + z^2 + \overline{z} + \overline{z}^2\big) = 1 + 2\overline{z},$$

segue que $u'(z)$ existe sse $z = -1/2$. Como u é função com valores reais então necessariamente $u'(1/2) = 0$.

iii) Considerem-se as formulas integrais de *Cauchy* para inferir que

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i(z + z^2)'_{|z=0} = 2\pi i,$$

tanto que

$$\int_{|z|=1} u(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \big(z + z^2 + \overline{z} + \overline{z}^2\big)\,dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \left(z + z^2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)dz = \pi i.$$

■

III

1. A equação diferencial é separável. De facto, o **PVI** a resolver, equivale ao seguinte

$$e^{2t}(e^{2t} - 1) = x^3 x' \quad , \quad x(0) = x_0.$$

Deduz-se

$$\int_0^t e^{2t}(e^{2t} - 1)\,ds = \int_{x_0}^x s^3\,ds \quad \text{i.e.} \quad \frac{(e^{2s}-1)^2}{4}\Big|_0^t = \frac{s^4}{4}\Big|_{x_0}^x$$

Considerando a alínea i), obtém-se

$$x(t) = \big((e^{2t} - 1)^2 + 1\big)^{1/4}$$

Para a alínea ii), observe que admitindo a existência de solução, o seguinte ter-se-á necessariamente

$$x(t) = \sqrt{e^{2t} - 1}.$$

Sem dificuldades, verifica-se que $x(t)$ não é diferenciável em qualquer vizinhança da origem. ■

IV

1. i) Considere-se o polinómio de derivação $P(D) = (D-3)(D+2)$. A solução geral da equação homogénea é

$$y_{gh}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}.$$

Um polinómio aniquilador de $e^{-2t}+1$, é dado por

$$A(D) = (D+2)D.$$

Para algumas constantes c_1 e c_2, tem-se que a seguinte função

$$y_p(t) := c_1 + c_2 t e^{-2t}$$

é uma solução particular. Compute

$$P(D)y_p = (D-3)(D+2)y_p = -6c_1 + e^{-2t}(D-5)Dt = -6c_1 - 5c_2 e^{-2t},$$

para obter que a solução geral é dada por

$$y_g(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{6} - \frac{te^{-2t}}{5}.$$

ii) A função $x(t)$ é solução da seguinte equação de *Euler,*

$$t^2 x'' - 6x = e^{-2\ln t} + 1 \quad \text{i.e} \quad t^2 x'' - 6x = \frac{1}{t^2} + 1.$$

■

2. i) O vector coluna $[-2\,,\,0\,,\,1]^T$ incluí-se no núcleo da matriz A. Logo, define uma solução constante da equação diferencial. Para a segunda parte, considere

$$y'' = (x+2z)' = 2x' + z' = 2y + 2y = 4y.$$

ii) Se y é função tal que $y'' = 4y$, defina $x := y'/4$ e $z := y'/2$. Então

$$x' = y''/4 = y \quad , \quad z' = y''/2 = 2y \quad \text{e} \quad y' = 2y'/4 + y'/2 = 2x + y,$$

i.e. $v := [x\,,\,y\,,\,z]^T$ é solução do sistema. O conjunto das funções

$$\left[\frac{y'}{2}\,,\,y\,,\,\frac{y'}{4}\right]^T \qquad \text{tais que} \quad y'' = 4y$$

é um espaço vectorial de dimensão 2 e não inclui funções constantes. Assim, o conjunto das funções definidas na alínea ii) é um espaço vectorial de dimensão 3, cujos elementos são soluções do sistema. Deduz-se que coincide com o conjunto das soluções do sistema.

iii) A solução geral da equação $y'' = 4y$ é dada por $y_g(t) = c_1\cosh(2t) + c_2\sinh(2t)$. Então

$$v_g(t) = \begin{bmatrix} c_1\sinh(2t) + c_2\cosh(2t) - 2c_3 \\ c_1\cosh(2t) + c_2\sinh(2t) \\ \frac{c_1}{2}\sinh(2t) + \frac{c_2}{2}\cosh(2t) + c_3 \end{bmatrix}, \quad \text{logo} \quad v_g(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

aonde $v_g(t)$ denota a solução geral de $v' = Av$. Invertendo a matriz S

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e logo} \quad e^{At} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\cosh(2t)+2 & 4\sinh(2t) & 4\cosh(2t)-4 \\ 2\sinh(2t) & 4\cosh(2t) & 4\sinh(2t) \\ \cosh(2t)-1 & 4\sinh(2t) & 2\cosh(2t)+2 \end{bmatrix}.$$

■

V

1. Se u é solução com as variáveis separadas $u(t,x) = T(t)X(x)$, então existe uma constante real σ tal que

$$X''(x) = \sigma X(x) \quad \text{e} \quad T'(t) = \sigma t T(t).$$

Porque $X(0) = X(\pi) = 0$, então as soluções não nulas, com variáveis separadas, obtêm-se com $\sigma = -n^2$ e

$$X(x) = \sin(nx) \quad , \quad T(t) = e^{-n^2t^2/2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Considerando a linearidade da *EDP* é linear, resulta que

$$u(t,x) = e^{-t^2/2}\sin(x) + 2e^{-2t^2}\sin(2x)$$

é solução do problema. ■

Quaisquer das curvas de *Jordan* nos integrais de linha referidos nos grupos **I** e **II** abaixo, são parametrizadas por caminhos de *Jordan* percorridos no sentido positivo

I - 7.0 Val.

[3.5] **1**. Considere as seguintes funções meromorfas

$$f(z) := \frac{e^{2\pi z} - 1}{(z^2+1)^2 z} \quad \text{e} \quad g(z) := \frac{z}{e^{2\pi z} - 1}.$$

i) Determine e classifique as singularidades da função $f(z)$.

ii) Determine o raio de convergência da série de *Taylor* de $f(z)$, centrada em $z = 1$.

iii) Calcule os seguintes integrais de linha na variável complexa

$$\int_{|z|=1/2} g(z)\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z-i|=1/2} g(z)\, dz.$$

iv) Considere r tal que $r \neq n$, $n = 1, 2, \ldots$ e $r > 0$. Calcule

$$\int_{|z|=r} g(z)\, dz.$$

[2.0] **2**. Considere a seguinte função racional

$$r(z) := \frac{1}{4 - z^2}.$$

i) Determine a série de *Mac-Laurin* da função $r(z)$ e a sua região de convergência.

ii) Determine o desenvolvimento de $r(z)$ em série de potências inteiras de $(z-2)$, convergente na região $|z-2| > 4$.

[1.5] **3**. Considere a seguinte função meromorfa

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z^2 + 4}.$$

i) Calcule o seguinte integral em ordem à variável real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

ii) Classifique a singularidade $z = 0$ da função $g(z) := f(1/z)$ e calcule $\operatorname{Res}(g; 0)$.

II - 3.0 Val.

[3.0] **1**. Considere a função $u(z) := x + \operatorname{Re}\left(z\overline{z}^2 - \overline{z}z^2 + z^2\right)$, aonde $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Justifique que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$ e determine a sua harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

ii) Determine os complexos z, onde a derivada complexa $u'(z)$ está definida e indique o seu valor.

iii) Calcule o valor dos seguintes integrais de linha na variável complexa

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z|=1} u(z)\, dz,$$

aonde $f(z)$ designa a função de variável complexa $u(z) + iv(z)$.

III - 3.0 Val.

[3.0] **1**. Considere os seguintes problemas de valores iniciais

$$e^{3t} - 1 - x^5 e^{-3t}\,\dot{x} = 0 \quad , \quad x(0) = x_0.$$

i) Suponha $x_0 = 1$. Determine a solução do **PVI** acima, e indique o seu intervalo máximo de definição.

ii) Suponha $x_0 = 0$. Justifique cuidadosamente que o referido **PVI** não admite soluções.

IV - 5.0 Val.

[2.0] **1**.

i) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = e^{-t} + 1. \tag{1}$$

ii) Se $y(t)$ é solução de (1), indique uma equação diferencial de ordem 2, da qual $x(t) := y(\ln t)$ é solução.

[3.0] **2**. Considere $v := [x, y, z]^T$, tanto a seguinte matriz de *Toeplitz* e sistema de equações diferenciais lineares

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{v} = Av. \tag{2}$$

i) Verifique que $[1\,,\,0\,,\,-2]^T$ é solução constante da equação diferencial em (2), e que se v é solução então

$$y'' = 4y. \tag{3}$$

ii) Mostre que qualquer solução v da equação diferencial em (2), escreve-se na seguinte forma

$$v = \left[\frac{y'}{4}\,,\,y\,,\,\frac{y'}{2}\right]^T + c[1\,,\,0\,,\,-2]^T,$$

aonde c é constante e y é uma solução de (3).

iii) Determine explicitamente as entradas da matriz exponencial e^{At}.

Observação: Para resolver a alínea *iii*), pode assumir as asserções enunciadas nas alíneas *i*) e *ii*). Ser-lhe-á evidente que a resolução também pode decorrer sem dependência das mencionadas asserções.

V - 2.0 Val.

[2.0] **1**. Aplique o método de separação de variáveis e determine uma solução da seguinte equação às derivadas parciais

$$\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & ; \quad t > 0\,,\, x \in \mathbb{R} \\ (2) & u(t,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t,\pi) = 0 & ; \quad t \geq 0 \\ (3) & u(0,x) = \sin x + 3\sin(3x) & ; \quad x \in \mathbb{R} \end{array}.$$