Quaisquer das curvas de Jordan nos integrais de linha abaixo, são parametrizadas por caminhos de Jordan percorridos no sentido positivo.

I - [6.0 val.]

[4.5] **1**. Considere o polinómio de variável complexa $p(z) := z^4 - 16$ e a função meromorfa $f(z) := 1/p(iz)$.

i) Determine e classifique as singularidades de $f(z)$.

ii) Calcule os seguintes integrais de linha

$$\int_{|z-2i|=1/2} f(z)\, dz \quad , \quad \int_{|z|=1/3} f(z)\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z|=1/4} e^{1/z} p(z)\, dz.$$

iii) Defina $g(z) := \overline{z}p(z)$. Determine os complexos z, onde a derivada $g'(z)$ está definida e indique o seu valor.

iv) Calcule o seguinte integral de linha

$$\int_{|z|=1/4} g(z)\, dz.$$

[1.5] **2**. Considere a função $u(x,y) := \mathrm{Im}\,(\overline{z}^2 + z + i)$. Justifique que u é harmónica. Determine v, uma harmónica conjugada de u, tal que $v(0,0) = 0$.

II - [4.0 val.]

[4.0] **1**.

i) Determine o raio de convergência da seguinte série de potências

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4^n}{n-1} z^n .$$

ii) Considere as seguintes funções

$$f(z) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4^n}{n-1} z^n \quad \text{e} \quad g(z) := \frac{f(z)}{z^4}.$$

Justifique que f define uma função analítica num conjunto aberto que contém $\mathrm{cl}\, D(0,3)$, onde $\mathrm{cl}\, D(0,3)$ denota o disco fechado, centrado na origem e com raio 3. Classifique a singularidade $z = 0$ de $g(z)$.

iii) Calcule

$$\int_{|z|=3} \frac{f(\xi)}{\xi^3}\, d\xi \quad \text{e} \quad \int_{[0,1/4]} f(\xi)\, d\xi \ ,$$

onde $[0, 1/4]$ designa o segmento de reta orientado de 0 a 1/4.

OBS.: O enunciado do teste incluía **Gralha**. Assim, as ocorrências de 4^n nas alíneas **1.i)** e **ii)**, do grupo **II**, devem ser substituídas por 4^{-n}. Nas mencionadas alíneas do *Teste B*, as ocorrências de 3^n devem ser substituídas por 3^{-n}. O Prof. Responsável considera que, no decorrer do teste, não somente a referida **Gralha** foi corrigida atempadamente, como acresce que a bonificação de tempo excedeu os eventuais danos causados.

Resolução

I

1. i) É evidente que $f(z) = 1/(z^4 - 16)$. Segue que as singularidades de f são as soluções da equação $z^4 = 16$, i.e. as singularidades são $z = \pm 2$ ou $z = \pm 2i$. Como $z = \pm 2$ ou $z = \pm 2i$ são zeros simples de $p(z)$, então todas as singularidades de $f(z)$ são pólos simples.

1. ii) Nenhuma singularidade é elemento da curva de integração. Acresce que no interior da curva de *Jordan* $|z - 2i| = 1/2$, incluí-se uma única singularidade de $f(z)$, designadamente $z = 2i$. Deduz-se o seguinte

$$\int_{|z-2i|=1/2} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 2i) = 2\pi i \frac{1}{4z^3}_{|z=2i} = -\frac{\pi}{16}.$$

A função $f(z)$ é holomorfa em determinado aberto incluindo o fecho do interior da curva $|z| = 1/3$, e.g. é holomorfa em $D(0, 2)$. Do teorema de *Cauchy* segue que

$$\int_{|z|=1/3} f(z)\, dz = 0.$$

A função $h(z) := e^{1/z} p(z)$ é holomorfa num aberto que incluí o fecho do interior da curva $|z| = 1/3$, com exceção da singularidade $z = 0$. Considerando o desenvolvimento de Mac-Laurin da função exponencial, deduz-se

$$h(z) = (z^4 - 16) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-4}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-4}^{-1} \frac{1}{(n+4)!} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+4)!} - 16 \right) \frac{1}{z^n}$$

O teorema dos *Resíduos* permite terminar da seguinte forma

$$\int_{|z|=1/4} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h; 0) = \pi i \left(\frac{1}{60} - 32 \right).$$

1. iii) A função g é de classe C^∞ no seu domínio. Segue que g é $\mathbb{C}$-diferenciável em z sse $\partial_{\overline{z}} h(z) = 0$. Como $\partial_{\overline{z}} g(z) = p(z)$, então $g'(z)$ existe sse $z = \pm 2$ ou $z = \pm 2i$. Se $g'(z)$ existe então $g'(z) = \partial_z g(z) = 4\overline{z} z^3$. Logo

$$g'(\pm 2) = 64 \quad \text{e} \quad g'(\pm 2i) = -64.$$

1. iv) Se $|z| = 1/4$ então $\overline{z} = 1/(16z)$. Da fórmula integral de *Cauchy*, resulta o seguinte

$$\int_{|z|=1/4} g(z)\, dz = \frac{1}{16} \int_{|z|=1/4} \frac{p(z)}{z}\, dz = \frac{\pi i}{8} p(0) = -2\pi i.$$

II

2. i) Porque $n \to 1/(n-1)$ é uma função racional da variável natural n, então o requerido raio de convergência, coincide com o raio de convergência da série de potências $\sum (z/4)^n$. Acresce que a última série considerada, é uma série geométrica de razão $z/4$. Logo, o seu raio de convergência é $r = 4$.

2. ii) Porque o raio de convergência da série na alínea **2.i)** verifica $r = 4$, então $f(z)$ é uma função analítica no disco aberto $D(0, 4)$, o qual é um conjunto aberto que contém $\operatorname{cl} D(0, 3)$. Porque $z = 0$ anula $f(z)$ com ordem 2, e anula z^4 com ordem 4, então $z = 0$ é um pólo de segunda ordem de $g(z)$.

2. iii) Considerando as fórmulas integrais de *Cauchy*, o seguinte é evidente

$$\int_{|z|=3} \frac{f(\xi)}{\xi^3}\, d\xi = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = i\frac{\pi}{8}.$$

Como $f \in \mathcal{H}(D(0, 4))$, então f é primitivável em $D(0, 4)$. Uma primitiva é dada por a seguinte função

$$F(z) = 4 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} (z/4)^{n+1}.$$

É evidente que $F(0) = 0$. Segue que

$$\int\limits_{[0,1/4]} f(\xi)\, d\xi = F(1/4) = 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}\, w^{n+1} \qquad \text{aonde} \quad w := 1/16.$$

Considere as seguintes computações

$$\begin{aligned} 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}\, w^{n+1} &= 2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) w^{n+1} = 2w^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^{n-1}}{n-1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^{n+1}}{n+1} \\ &= 2(w^2-1)\ln(1-w) + w^2 + 2w\,, \;\; |w| < 1. \end{aligned}$$

Quaisquer das curvas de Jordan nos integrais de linha abaixo, são parametrizadas por caminhos de Jordan percorridos no sentido positivo.

I - [6.0 val.]

[4.5] **1**. Considere o polinómio de variável complexa $p(z) := z^4 - 16$ e a função meromorfa $f(z) := 1/p(-iz)$.

i) Determine e classifique as singularidades de $f(z)$.

ii) Calcule os seguintes integrais de linha

$$\int_{|z-2i|=1/4} f(z)\, dz \quad , \quad \int_{|z|=1/3} f(z)\, dz \quad \text{e} \quad \int_{|z|=1/2} e^{1/z} p(z)\, dz.$$

iii) Defina $g(z) := \overline{z}p(z)$. Determine os complexos z, onde a derivada $g'(z)$ está definida e indique o seu valor.

iv) Calcule o seguinte integral de linha

$$\int_{|z|=1/2} g(z)\, dz.$$

[1.5] **2**. Considere a função $u(x,y) := \operatorname{Im}(z^2 + \overline{z} - i)$. Justifique que u é harmónica. Determine v, uma harmónica conjugada de u, tal que $v(0,0) = 0$.

II - [4.0 val.]

[4.0] **1**.

i) Determine o raio de convergência da seguinte série de potências

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n-1} z^n .$$

ii) Considere as seguintes funções

$$f(z) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n-1} z^n \quad \text{e} \quad g(z) := \frac{f(z)}{z^4}.$$

Justifique que f define uma função analítica num conjunto aberto que contém $\operatorname{cl} D(0,2)$, onde $\operatorname{cl} D(0,2)$ denota o disco fechado, centrado na origem e com raio 2. Classifique a singularidade $z = 0$ de $g(z)$.

iii) Calcule

$$\int_{|z|=2} \frac{f(\xi)}{\xi^3}\, d\xi \quad \text{e} \quad \int_{[0,1/3]} f(\xi)\, d\xi \ ,$$

aonde $[0, 1/3]$ designa o segmento de reta orientado de 0 a $1/3$.