I - 7.5 Val.

[2.0] **1**. Considere a seguinte equação diferencial escalar

$$(x + x^3 + 3xt^2) + (2t + 4x^2 t + 2t^3)\,\dot{x} = 0.$$

Determine um factor integrante $\mu(x)$ e a solução implícita do problema de valores iniciais $x(1) = 0$.

[2.0] **2**. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x' &= Ax + b(t) \\ x(0) &= [1\,,0\,,1]^T \end{cases} \quad , \quad \text{aonde} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

[2.0] **3**. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial, sabendo que $\varphi(t) := te^t$ é solução,

$$y'' + by' + cy = te^t \qquad (b, c \in \mathbb{R}).$$

[1.5] **4**. Determine a única função diferenciável $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$t^2 f'(t) - 3tf(t) + 4\int_1^t f(s)\,ds = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 3.$$

II - 2.5 Val.

[1.5] **1**. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com período 2π e integrável em $]-\pi, \pi]$. Se τ é uma constante, considere a transladada

$$f_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_\tau(x) = f(x - \tau),\ x \in \mathbb{R}.$$

Suponha que f é par e, no intervalo $]-\pi, \pi]$, a série de *Fourier* de f é dada por

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx).$$

Justifique o seguinte

$$a_n(f_\tau) = \cos(n\tau)a_n(f) \quad , \quad n = 0, 1, \ldots.$$

[1.0] **2**. Mostre que a função nula $y(t) = 0$, $0 \le t \le 1$ é a única solução do seguinte problema de valores na fronteira

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 y') + 2y' - t^3 y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Sugestão: Poder-lhe-á ser útil multiplicar por y e, em seguida integre no intervalo $[0, 1]$.

Resolução

I

1. Definem-se as seguintes funções

$$\begin{aligned} M(t,x) &:= x + x^3 + 3xt^2, \\ N(t,x) &:= 2t + 4x^2t + 2t^3. \end{aligned}$$

A função $\mu(x)$ é factor integrante sse a seguinte função não depende da variável independente t, i.e.

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)/M \quad \text{é função de } x.$$

São imediatas as seguintes computações

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)/M = \frac{(2 + 4x^2 + 6t^2) - (1 + 3x^2 + 3t^2)}{x(1 + x^2 + 3t^2)} = \frac{1}{x},$$

de onde segue

$$\mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x).$$

A função $\mu(x) = x$ é factor integrante. Do teorema de *Picard-Lindelöf* segue que o **PVI** indicado admite solução local única. É imediato verificar que a função nula $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ é a solução requerida.

Alternativamente, poder-se-ia determinar um potencial $\varphi(t,x)$, de acordo com o seguinte

$$\begin{aligned} \varphi(t,x) &= \int x^2 + x^4 + 3x^2t^2 \, dt = (x^2 + x^4)t + x^2t^3 + \psi(x), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) &= (2x + 4x^3)t + 2xt^3 + \psi'(x) = 2tx + 4x^3t + 2t^3x. \end{aligned}$$

Concluí-se $\psi(x) = C^{te}$ tanto que um potencial é dado por

$$\varphi(t,x) = \int x^2 + x^4 + 3x^2t^2 \, dt = (x^2 + x^4)t + x^2t^3.$$

A solução implícita do **PVI** indicado, pode ser indicado como de seguida

$$(x^2 + x^4)t + x^2t^3 = 0.$$

■

2. A função $\varphi(t) = [0, -1, 0]^T$ é solução de $x' = Ax + b(t)$. Segue que a solução geral é dada por

$$x_g(t) = e^{At}[c_1, c_2, c_3]^T + [0, -1, 0]^T \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Conclui-se que a solução do **PVI** é

$$x(t) = e^{At}[1, 1, 1]^T + [0, -1, 0]^T.$$

■

3. Considerando as seguintes evidências

$$D^2te^t = e^t(D+1)^2t = e^t(t+2) \quad \text{e} \quad Dte^t = e^t(D+1)t = e^t(t+1),$$

obtém-se

$$(1 + b + c)te^t + (2 + b)e^t = te^t.$$

Deduz-se $b = -2$ e $c = 2$. Segue que a equação escreve-se na forma $\big((D-1)^2 + 1\big)y = te^t$ e a solução geral é

$$y(t) = c_1e^t \cos t + c_2e^t \sin t + te^t.$$

■

4. Considere a mudança de variável

$$y(t) = \int_1^t f(s)\, ds$$

Então $y(t)$ verifica o seguinte **PVI**, respetivo a uma equação de *Euler*

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0 \quad ; \quad y(1) = 0 \quad \text{e} \quad y'(1) = 3.$$

É bem conhecido, que a mudança de variável $x(t) := y(e^t)$ conduz à equação com coeficientes constantes

$$x'' - 4x' + 4x = 0 \quad ; \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 3.$$

O polinómio característico da equação anterior, é dado por $(D-2)^2$. Então

$$x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Os valores iniciais são verificados sse $c_1 = 0$ e $c_2 = 3/2$. Concluí-se o seguinte

$$y(t) = x(\ln t) = \frac{3}{2}t^2 \ln t \quad \text{e logo} \quad f(t) = y'(t) = \frac{3}{2}(1 + 2\ln t)t.$$

■

II

5. Considere a periodicidade das funções $f(t)$ e $\cos(nt)$, tanto a simetria dos seus gráficos (relativa ao eixo vertical), para, da definição de coeficientes de *Fourier* e da mudança de variável na integração, concluir que

$$\begin{aligned} a_n(f_\tau) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\tau(t)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\tau}^{\pi-\tau} f(y)\cos(ny+n\tau)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ny+n\tau)\, dt = \cos(n\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ny)\, dt - \sin(n\tau)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ny)\, dt \\ &= \cos(n\tau)a_n(f);\ n = 1, \ldots. \end{aligned}$$

O caso $n = 0$ é trivial e os argumentos necessários incluem-se nos acima expostos. ■

6. Considerando a sugestão e integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 y(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(s^2y'(s)\big) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}y^2(s)\, ds - \int_0^1 s^3y^2(s)\, ds \\ &= s^2y(s)y'(s)\big]_0^1 - \int_0^1 s^2(y'(s))^2\, ds + y^2(s)\big]_0^1 - \int_0^1 s^3y^2(s)\, ds \\ &= -\int_0^1 s^2(y'(s))^2 + s^3y^2(s)\, ds. \end{aligned}$$

Porque a função $s \to s^2(y'(s))^2 + s^3y^2(s)$ é positiva, contínua no intervalo $[0,1]$ e com integral nulo, então é necessariamente a função nula. Deduz-se que $y(s) = 0$, $0 \le s \le 1$. ■

I - 7.5 Val.

[2.0] **1**. Considere a seguinte equação diferencial escalar

$$(2x + 4t^2x + 2x^3) + (t + t^3 + 3tx^2)\,\dot{x} = 0.$$

Determine um factor integrante $\mu(t)$ e a solução implícita do problema de valores iniciais $x(1) = 0$.

[2.0] **2**. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x' &= Ax + b(t) \\ x(0) &= [1\,,0\,,1]^T \end{cases} \quad , \quad \text{aonde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[2.0] **3**. Determine a solução geral da seguinte equação diferencial, sabendo que $\varphi(t) := te^t$ é solução,

$$y'' + by' + cy = 3e^t \qquad (b, c \in \mathbb{R}).$$

[1.5] **4**. Determine a única função diferenciável $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$t^2 f'(t) - 5tf(t) + 9\int_1^t f(s)\,ds = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 2.$$

II - 2.5 Val.

[1.5] **1**. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com período 2π e integrável em $]-\pi, \pi]$. Se τ é uma constante, considere a transladada

$$f_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_\tau(x) = f(x - \tau),\ x \in \mathbb{R}.$$

Suponha que f é impar e, no intervalo $]-\pi, \pi]$, a série de *Fourier* de f é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin(nx).$$

Justifique o seguinte

$$b_n(f_\tau) = \cos(n\tau) b_n(f) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots.$$

[1.0] **2**. Mostre que a função nula $y(t) = 0$, $0 \le t \le 1$ é a única solução do seguinte problema de valores na fronteira

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 y') + 2y' - t^5 y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Sugestão: Poder-lhe-á ser útil multiplicar por y e, em seguida integre no intervalo $[0, 1]$.