Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2° Semestre 05/06

Exercícios Suplementares

(Eng^a Física Tecnológica, Matemática Aplicada e Computação)

Polinómio e série de Taylor

1. Demonstre as seguintes desigualdades

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

(**Sugestão :** aplique a fórmula de Taylor de primeira e segunda ordem.)

2. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que existe $n \in \mathbb{N}$, e constantes $M \geq 0$, $\alpha > 1$ verificando

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y) \right| \leq M \left| x - y \right|^{\alpha}, \forall_{x,y \in \mathbb{R}}.$$

Mostre sucessivamente que:

a) $f^{(n)}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f^{(n+1)}(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a n.

3. No decorrente exercício pretende-se fornecer uma prova do bem conhecido binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \ n, j \in \mathbb{N}, j \leq n, \ a, b \in \mathbb{R}.^{\dagger} \tag{1}$$

Dividimos a prova nas seguintes etapas:

a) usando indução matemática mostre que

$$\frac{d^j}{dx^j} (1+x)^n = \frac{n!}{(n-j)!} (1+x)^{n-j};$$

b) por intermédio da fórmula de Taylor, retire da alínea anterior que

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j, \ x \in \mathbb{R};$$

†No binómio convencionamos $0^0 = 1$.

c) da alínea anterior deduza a fórmula (1).

4. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$. Suponha que $f^{(n)}(x)$ existe para todo o $x \in \mathbb{R}$, e $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$.

a) Se n é impar ou respectivamente par, e a função f verifica

$$f^{(n)}(x)(x-a) > 0 \quad (< 0)\,, \qquad \text{se } x \neq a,$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f, respectivamente ponto de sela.

b) Se n é par ou respectivamente impar, e a função f verifica

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad (< 0)\,, \qquad \text{se } x \neq a.$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f, respectivamente ponto de sela.

5. Se possível, encontre os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin das seguintes funções:

a) $\frac{1}{\sinh x}$, b) $\cosh x$, c) $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$,

d) $\log(1+x)$, e) $\sin\left(x^2-1\right)$, f) $\int_0^x \sin\left(t^2-1\right)\cos\left(2t^2+1\right)\,dt$.

Determine o conjunto dos numeros reais tais que a soma das respectivas séries de Mac-Laurin que encontrou, coincidem com o valor das funções que representam.

6. Determine os desenvolvimentos em série de Taylor no ponto a, das seguintes funções:

a) $\sin^2(x)$, $a = 0$; b) $x\cos(2x)$, $a = \frac{\pi}{2}$; c) $\log(x+1)$, $a = 1$;

d) $\frac{1}{(1-x)(1+x^2)}$, $a = 0$; e) $(x+1)^2 \arctan x$, $a = 0$; f) $3^x + \frac{1}{x^3}$, $a = 1$.

Determine o conjunto dos numeros reais tais que a soma das respectivas séries de Taylor que encontrou, coincidem com o valor das funções que representam.

7. Considere a função

$$f : \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x\,(x-2)}{(x+2)\,(x^2+4)}.$$

a) Determine o desenvolvimento de Mac-Laurin de f.

b) Determine $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Usando os desenvolvimentos obtidas nos exercícios 5,6 e 7, indique justificadamente a existência de extremos das funções consideradas, respectivamente, nos pontos aos quais são relativos os desenvolvimentos de Taylor.

Resolução

5.

a) Dado que $f(x) = (\sinh x)^{-1}$ não é continua, ou prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$, tem-se que $f(x) = (\sinh x)^{-1}$ não tem desenvolvimento em série de Mac-Laurin.

b)

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

c) Tendo em conta a igualdade

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\right),$$

e a soma da série geométrica, obtém-se imediatamente que

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},\ |x| < 1.$$

Claramente a série anterior diverge para $x = \pm 1$.

d) A soma da série geométrica fornece

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x| < 1.$$

Como a série geométrica é uniformemente convergente no interior do seu intervalo de convergência, então pode ser integrada termo a termo, obtendo-se para $|x| < 1$

$$\log(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^n\, ds = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n s^n\, ds = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Como a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge, então do critério de Abel, sabemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ é uniformemente convergente no intervalo $[0,1]$. Em particular define uma função contínua. Consequentemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \lim_{x\to 1^-}\log(1+x) = \log 2.$$

Claramente a série de Mac-Laurin de $\log(x+1)$ não converge no ponto $x = -1$, (a série harmónica diverge) e em conclusão a série representa a função no intervalo $]-1,1\,]$ (Ademais $\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty$).

e) Das fórmulas trigonométricas

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\sin(x^2-1) &= \sin(x^2)\cos 1 - \cos x^2 \sin 1 \\ &= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

f) Defina-se $\varphi(x) = \int_0^x \sin\left(t^2-1\right)\cos\left(2t^2+1\right)\ dt$. Então

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \sin\left(x^2-1\right)\cos\left(2x^2+1\right) = \frac{1}{2}\left[\sin(3x^2) - \sin(x^2+2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(3x^2) - \sin(x^2)\cos 2 - \cos x^2 \sin 2\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}-\cos 2}{2}\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \frac{\sin 2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dado que a série anterior converge uniformemente nos intervalos limitados de $\mathbb{R}$ e $\varphi(0) = 0$, então

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1}-\cos 2}{2}\frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} + \frac{\sin 2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{4n}}{(2n)!}\ dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}-\cos 2}{2\,(4n+3)\,(2n+1)!}x^{4n+3} + \frac{\sin 2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\,(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

6.

a) Da fórmula

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right),$$

obtém-se

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Da fórmula para o coseno da soma, obtém-se

$$\cos(2x) = \cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right) = -\cos\left(2(x-\frac{\pi}{2})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$x\cos(2x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n)!} + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

c) Tendo em atenção a alínea **5d)** obtém-se

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \log\left(2\left(1+\frac{x-1}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{x-1}{2}\right)\\ &= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{2^n n},\ x\in\,]-1,3\,].\end{aligned}$$

d) A decomposição em fracções simples permite inferir

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1+x^2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + (-1)^n x^{2n} + (-1)^n x^{2n+1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]x^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]x^{2n+1},\ |x|<1.\end{aligned}$$

e) De forma análoga à alínea **5d)**, obtém-se

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.$$

Usando o critério de Leibnitz para séries alternadas, obtém-se que a série de Mac-Laurin anterior converge em ambos os extremos do intervalo de convergência. Do critério de Abel conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformemente no intervalo $[-1,1]$. Consequentemente define uma função contínua, e

$$\pm\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = \lim_{x\to\pm1^{\mp}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to\pm1^{\mp}}\arctan x = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Consequentemente a série de Mac-Laurin da função $f(x)=(x+1)^2\arctan x$ representa-a no intervalo $[-1,1]$, e obtém-se da forma

$$\begin{aligned}(x+1)^2\arctan x &= \left(x^2+2x+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\ &= x + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}\end{aligned}$$

f) O desenvolvimento em série de Mac-Laurin da exponencial fornece

$$3^x = 33^{x-1} = 3e^{(x-1)\log 3} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 3)^n}{n!}(x-1)^n,\ x\in\mathbb{R}.$$

A soma da série geométrica e a derivação termo a termo de séries de funções uniformemente convergentes, permite concluir

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)\,(x-1)^n\,,\ |x-1|<1.$$

As duas fórmulas anteriores permitem concluir

$$3^x + \frac{1}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2}(n+2)(n+1) + 3\frac{(\log 3)^n}{n!}\right](x-1)^n\,,\ |x-1|<1.$$

Observação (A soma duma série convergente com uma outra divergente é uma série divergente.)

7.

a)

$$\frac{2x\,(x-2)}{(x+2)\,(x^2+4)} = \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n}$$

b)

$$f^{2n}(0) = \frac{(2n)!}{4^n}\left(1+(-1)^{n+1}\right),\ n\in\mathbb{N},$$
$$f^{2n+1}(0) = -\frac{1}{2}\frac{(2n+1)!}{4^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

8. Exemplificamos resolvendo a questão relativa ao exercício **6**:

6a) Seja $f(x) = \sin^2(x)$. Então $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2 > 0$. Logo f tem um ponto de mínimo local em $x = 0$;

6b) Seja $g(x) = \cos(2x)$. Então $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $g''(\frac{\pi}{2}) = 4 > 0$. Logo g tem um ponto de mínimo local em $x = \frac{\pi}{2}$;

6c) Seja $h(x) = \log(1+x)$. Então $h'(1) = \frac{1}{2} \neq 0$ e logo h não tem um ponto de extremo local em $x = 1$;

6d) Seja $\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}$. Então $\varphi'(0) = 1 \neq 0$ e logo h não tem um ponto de extremo local em $x = 0$;

6e) Seja $\psi(x) = (x+1)^2\arctan x$. Então $\psi'(0) = 1 \neq 0$ e logo ψ não tem um ponto de extremo local em $x = 0$;

6f) Seja $\xi(x) = 3^x + \frac{1}{x^3}$. Então $\xi'(1) = 3(\log 3 - 1) \neq 0$ e logo ξ não tem um ponto de extremo local em $x = 1$.