Uma aplicação do teorema do valor intermédio.

1 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{y-2x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad (x,y) = 0, \end{cases}$$

e o conjunto

$$D_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \alpha x^2\right\}, \ \alpha > 0.$$

Mostre sucessivamente que:

a) $f_{|\,D_\alpha}$ *é continua;*

b) $f\left(D_\alpha\right) \supset \left]-\infty, \frac{\alpha-2}{\alpha}\right[$;

c) o contradomínio de f *é* $\left]-\infty, 1\right]$.

Resolução:

a) Considere a desigualdade

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \left|\frac{y-2x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right| \leq (\alpha+2)\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} < (\alpha+2)\,\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &\leq \quad (\alpha+2)\left(x^2+y^2\right)^{1/2} \to 0 = \ f(0,0), \ \text{se } (x,y) \to (0,0). \end{aligned}$$

b) Observe que $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset D_\alpha$, e considere o limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = -\infty. \tag{1}$$

Adicionalmente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,\alpha x^2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-2)\,x^2}{\left(x^2+\alpha^2x^4\right)^{1/2}} = \frac{\alpha-2}{\alpha}. \tag{2}$$

De (1) e (2), a continuidade de $f_{|\,D_\alpha}$ e o teorema do valor intermédio permitem concluir a resolução.

c) Dado que $\frac{\alpha-2}{\alpha} < 1$ e $\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha-2}{\alpha} = 1$, retira-se da alínea anterior que

$$\bigcup_{\alpha>0} \left]-\infty, \frac{\alpha-2}{\alpha}\right[= \left]-\infty, 1\right[\subset f(\mathbb{R}^2). \tag{3}$$

Tendo em atenção a desigualdade,

$$\frac{y-2x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{y}{|y|} \leq 1, y \neq 0,$$

e $f(x,0) \leq 0$, retira-se

$$f(\mathbb{R}^2) \subset \left]-\infty, 1\right]. \tag{4}$$

Como $f(0,y) = 1, \ y > 0$ então de (3) e (4) terminamos a resolução.

■