Os apontamentos *Luís V. Pessoa, Problemas em Cáculo Diferencial e Integral I (CDI I), DMIST, 2006* serviram de apoio pedagógico, aos alunos inscritos em algum dos cursos de *Cálculo Diferencial e Integral I,* por o autor professados no *Instituto Superior Técnico.* O autor considera natural a ocorrência de imprecisões, as quais o leitor poderá indicar por meio de comunicações endereçadas a lpessoa@math.tecnico.ulisboa.pt.

Problemas em Cálculo Diferencial e Integral I

Luís V. Pessoa

Dezembro de 2006

Conteúdo

1 Prefácio

A lista de problemas que o leitor encontrará nas páginas abaixo, resulta da agregação de um conjunto de problemas, que o autor preparou e forneceu aos seus alunos do turno de problemas, do curso de ≪Cálculo Diferencial e Integral I≫, no primeiro semestre de 06/07 e leccionado às licenciaturas e respectivos mestrados pós-Bolonha, em Bio-Médica, Física e Matemática. À data de então, os problemas eram disponibilizados semanalmente com a nomeação de ≪Fichas de Problemas≫ e pretendiam preencher algumas das lacunas dos problemas integrantes das referências bibliográficas comuns no Instituto Superior Técnico, tão bem quanto contrariar a maioritária tendência do aluno em procurar receituário com intuitos em resolver os diversos problemas que lhe são colocados. Como causa natural do objectivo declarado, alguns dos problemas poderão apresentar dificuldades, ajuizadas por o aluno iniciado em análise matemática, com características de eventual exagero. Cumpre acrescentar, que nas páginas abaixo o autor não considera qualquer sinalética de hierarquização do grau de dificuldades dos respectivos problemas. Justifica-se por intermédio de confessa inabilidade em obter classificações relevantes, e por julgar de interesse avaliar as capacidade do aluno em reconhecer as distintas dificuldades dos problemas que intenta solucionar.

2 Os números reais

2.1 Lógica. Operações informais com conjuntos.

1. Considere a, b números reais fixos. Determine o conjunto das soluções reais das seguintes inequações:

a) $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)+1} \geq 1 \ , x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{\cos^2(x)+1}{\sin x} > 1$; c) $1 + \cos x + \cos(2x) > 0$;

d) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 \leq 0$; e) $\big(x^2 - |x| - 2\big)\tan\frac{\pi}{x} < 0$; f) $|x| < \left|x^2 - 1\right|$;

g) $\left|\left(x^2-1\right)^2 - 1\right| \leq 1$; h) $|x-a| + |x-b| \geq 1$; i) $||x|-a| + ||x|-b| \geq 1$;

j) $|x-a| - |x-b| \geq 1$; k) $n^6 - 9n^3 + 8 \leq 0,\ n \in \mathbb{N}$; l) $\frac{4-|x-1|}{4-(x-1)^2} > 0$.

2. Escreva cada um dos seguintes conjuntos na forma de reunião de intervalos:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \sin\frac{1}{x} > 0\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \sin(\frac{1}{x} - x) + \sin(\frac{1}{x} + x) \geq 2\sin(\frac{1}{x})\right\}$;

c) $A \cap B$; d) $A \cup B$;

e) $C_a = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \geq a\}$; f) $D_a = \{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x} \geq a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Decida qual o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\emptyset \in \emptyset$; b) $\emptyset \subset \emptyset$;

c) $\forall_{x\in\emptyset}\ x \notin \emptyset$; d) $\forall_{x\in\emptyset}\ x \in \emptyset$;

e) $\forall_{x\in\mathbb{Q}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\exists_{m\in\mathbb{N}_1}\ \frac{\cos(nx)}{m} \in \mathbb{Z}$; f) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{Q}}\exists_{m\in\mathbb{N}_1}\ \frac{\cos(nx)}{m} \in \mathbb{Z}$;

g) $\exists_{m\in\mathbb{N}_1}\forall_{x\in\mathbb{Q}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\frac{\cos(nx)}{m} \in \mathbb{Z}$; h) $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Q}$;

i) $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$; j) $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Q}$;

k) $\forall_{x\in\mathbb{R}^+}\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{y\in\mathbb{R}^+}\ x \leq n + y$; l) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{R}^+}\forall_{y\in\mathbb{R}^+}\ x \leq n + y$;

m) $\forall_{y\in\mathbb{R}^+}\forall_{x\in\mathbb{R}^+}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ x \leq n + y$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

4. Define-se o factorial dum número natural usando a recorrência

$$0! = 1, \quad (n+1)! = (n+1)n! \ , n \in \mathbb{N}.$$

Se $0 \leq k \leq n$ o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é dado por $n!/k!(n-k)!$. Usando manipulações algébricas prove que:

i) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, $k = 1, \cdots, n$;

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k = 0, \cdots, n$.

Defina a soma

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{n}{k}, \ j = 0, \cdots, n.$$

Mostre sucessivamente que

iii) $P_n(j) = (-1)^j \binom{n-1}{j}$, $j = 0, \cdots, n-1$;

iv) $P_n(n) = 0$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.2 Indução Matemática

1. Mostre por indução matemática as seguintes igualdades:

a) $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)n}{2}$, $n \in \mathbb{N}_1$;

b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}_1$;

c) $(1-r)\sum_{j=0}^{n-1} r^j = 1 - r^n$, $n \in \mathbb{N}_1, r \in \mathbb{R}$;

d) $(1-r)^2 \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)r^j = 1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_1, r \in \mathbb{R}$;

e) $4^n - 1 \in \{3k : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$;

f) $3^{2n} - 1 \in \{8k : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$;

g) $\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $n \in \mathbb{N}_1$.

2. Defina $t_n(x) = \cos(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Prove que existe T_n um polinómio de grau n, com coeficiente de grau n dado por 2^{n-1}, usualmente designado por polinómio de Tchebichef, tal que $t_n(x) = T_n(\cos x)$.

Sugestão: Considere as fórmulas trigonométricas para o coseno da soma e retire a equação $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2t_n(x)\cos x$.

ii) Mostre que os números $\cos\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{3}{n}\frac{\pi}{2}\right), \cdots, \cos\left(\frac{2n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$ são zeros de T_n e conclua que

$$T_n(x) = 2^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdots\left(x - \cos\left(\frac{2n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\right), n \geq 2.$$

3. Considere a soma finita

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \ n \in \mathbb{N}.$$

i) Usando as propriedades dos coeficientes binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \ n, k \in \mathbb{N}_1, \ k < n,$$

mostre que $Q_n = 2Q_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_1$;

ii) Prove por indução que $Q_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Considere a sucessão definida por recorrência $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2\sqrt{x_n}}$.

i) Usando indução matemática prove sucessivamente que:

a) $0 < x_n < 2$;

b) x_n é monótona estritamente crescente.

ii) Mostre que $(x_n - x_{n-1} < 0) \Rightarrow (x_{n+1} - x_n < 0)$, $\forall_{n \in \mathbb{N}_2}$. Explique porque é que o principio de indução matemática não permite obter resultados contraditórios com a alínea ib), i.e, concluir que x_n também é estritamente decrescente.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.3 Axioma do supremo

1. Sejam A e B subconjunto não vazios de $\mathbb{R}$. Definindo os conjuntos $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ e $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$, mostre sucessivamente que

i) $\sup A = -\inf -A$ e $\inf A = -\sup -A$;

ii) $\sup \lambda A = \lambda \sup A$, e $\inf \lambda A = \lambda \inf A$, se $\lambda > 0$;

iii) $\sup A + B = \sup A + \sup B$.

2. Considere subconjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que $\forall_{a\in A,\, b\in B}\ a \leq b$. Mostre que $\exists_{s\in\mathbb{R}}\forall_{a\in A,\, b\in B}\ a \leq s \leq b$. Em que condições existe um único $s \in \mathbb{R}$ verificando $\forall_{a\in A,\, b\in B}\ a \leq s \leq b$?

3. Considere um conjunto de índices I e uma família de conjuntos não vazios $A_j \subset \mathbb{R}$, $j \in I$.

i) Se os conjuntos A_j, $j \in I$ são majorados por um número real fixo então

$$\sup \bigcup_{j\in I} A_j = \sup \{\sup A_j \, : \, j \in I\} .$$

Justifique que se I é finito então o supremo na fórmula anterior é máximo.

ii) Se os conjuntos $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ são majorados e $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ então

$$\sup A_1 \cap A_2 \leq \min \{\sup A_1, \sup A_2\} .$$

Suponha que $\sup A_1 = \sup A_2 = 0$. Mostre através de exemplos que nas condições do enunciado é possível que $\sup A_1 \cap A_2$ seja um qualquer número no intervalo $]-\infty, 0\,]$.

Da alínea i) no exercício 1, retire formulas para o ínfimo da união e intersecção de conjuntos.

4. Dados subconjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}$ defina $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

i) Através de exemplos, mostre que é possível os conjuntos A e B serem majorados e AB não ser majorado.

ii) Suponha A e B majorados e $A \subset \mathbb{R}_0^+$. Prove que AB é majorado e $\sup AB = \max \{\inf A \sup B, \sup A \sup B\}$. Mostre igualmente que é possível A e B não terem máximo e AB ter máximo.

5. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ com domínio não vazio diz-se limitada superiormente se existe $C \in \mathbb{R}$ verificando $f(x) \leq C$, $x \in X$, e diz-se limitada inferiormente se $-f$ é limitada superiormente. Se $A \subset X$ é um subconjunto não vazio e f é respectivamente limitada superiormente e inferiormente, define-se $\sup_{x\in A} f = \sup f(A)$ e $\inf_{x\in A} f = \inf f(A)$, com $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

i) Utilizando o resultado na alínea ii) do exercício 4, mostre que dadas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas superiormente e tais que $f(x) \geq 0$, $x \in X$, então

$$\sup_{x\in A} fg \leq \max \left\{ \sup_{x\in A} f \sup_{x\in A} g \, , \, \inf_{x\in A} f \sup_{x\in A} g \right\} .$$

Forneça exemplos mostrando que é possível a desigualdade anterior ser estrita;

ii) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada superiormente e não negativa então $\sup_{x\in A} f^2 = (\sup_{x\in A} |f|)^2$.

6. Um número real não nulo T diz-se um período da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $f(x + T) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. A função f diz-se periódica se têm um período.

lpessoa@math.ist.utl.pt

i) Mostre que T é período de f sse $-T$ é período de f. Mostre igualmente que se T_1, T_2 são períodos de f e $T_1 + T_2 \neq 0$ então $T_1 + T_2$ é período de f.

ii) Usando indução matemática prove que se T é período de f então nT, $n \in \mathbb{N}_1$ é um período de f.

iii) Defina $T_0 = \inf\{T > 0 : T \text{ é período de } f\}$ e suponha que $T_0 > 0$. Conclua que T_0 é mínimo e o conjunto dos períodos é dado por $T_0\mathbb{Z}$.

iv) Considere a função de Dirichelet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Mostre que $D(x)$ tem qualquer número racional não nulo como período. Em particular $T_0 = 0$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.4 Sucessões de termos reais e limite

1. Considere polinómios $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $q_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ respectivamente de graus n e m, $n, m \in \mathbb{N}$. Suponha q_m não identicamente nulo e determine

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_n(k)}{q_m(k)}.$$

2. Mostre que todas as sucessões monótonas têm máximo ou mínimo. Forneça exemplo duma sucessão limitada sem máximo nem mínimo e finalmente demonstre que se uma sucessão converge a $+\infty$ ou $-\infty$ então têm respectivamente mínimo ou máximo.

3. Seja x_n, $n \in \mathbb{N}$ a sucessão definida por recorrência $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2\sqrt{x_n}}$. Tendo em conta o exercício n° 4 da Ficha 2, justifique que x_n é convergente e calcule o seu limite.

4. Seja x_n a sucessão de Fibonnaci, i.e. a sucessão definida por recorrência da seguinte forma

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 1 \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n. \end{aligned}$$

Considere a sucessão $v_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

i) Mostre que v_n satisfaz $v_1 = 1$ e $v_{n+1} = 1 + 1/v_n$.

ii) Usando indução matemática mostre que

$$(v_{2n} - v_{2n-1} > 0) \wedge (v_{2n+1} - v_{2n} < 0)\,, \forall_{n\in\mathbb{N}_1}. \tag{1}$$

iii) Mostre que v_{2n} é estritamente decrescente, v_{2n+1} é estritamente crescente e v_n não é monótona.

Sugestão: Mostre que $v_{2n+2}/v_{2n} < 1$ sse $v_{2n+1} - v_{2n} < 0$.

iv) Razoado nas alíneas anteriores justifique que v_{2n} e v_{2n+1} são convergentes e calcule $\lim v_{2n}$ e $\lim v_{2n+1}$. A sucessão v_n, $n \in \mathbb{N}$ é convergente?

5.

Seja x_n, $n \in \mathbb{N}_1$ um infinitésimo não identicamente nulo e considere as sucessões

$$\begin{array}{rcl} y_n &=& \min\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \\ z_n &=& \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \end{array}\;, n \in \mathbb{N}_1.$$

Mostre que:

i) y_n é infinitésimo;

ii) z_n é constante a partir de certa ordem e o seu limite é positivo.

6. Considere uma sucessão $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}_1$.

i) Suponha que existem a, b números reais não negativos verificando $a < b$ e $a \le x_{j+1}/x_j \le b$, $j \in \mathbb{N}_1$. Usando indução matemática mostre que $x_n \in \left[x_1 a^{n-1}, x_1 b^{n-1}\right]$, $n \in \mathbb{N}_1$.

ii) Da alínea i) conclua que se $\lim x_{n+1}/x_n$ existe então $\lim \sqrt[n]{x_n}$ existe e $\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim x_{n+1}/x_n$.

7. Considere uma sucessão $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}_1$ convergente em $\mathbb{R}$. Defina a média geométrica dos primeiros n termos de x_n, i.e. defina $u_n = \sqrt[n]{x_1.\cdots.x_n}$. Usando o resultado no exercício 6 mostre que a sucessão u_n é convergente e $\lim u_n = \lim x_n$. Se $x_n = 2 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_1$ justifique que $\lim u_n = \sqrt{3}$ mas x_n é divergente.

lpessoa@math.ist.utl.pt

8. Considere uma sucessão de termos positivos x_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha := \lim \sqrt[n]{x_n}$ existe. Demonstre que $\lim x_n = +\infty$, se $\alpha > 1$, e $\lim x_n = 0$, se $\alpha < 1$. Verifique sucessivamente que:

i) se $x_n = x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$ e $\lim x_n = x \in \mathbb{R}^+$;

ii) se $x_n = 2^{-\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}_1$ então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$ e $\lim x_n = 0$;

iii) se $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$ e $\lim x_n = +\infty$;

iv) se $x_n = 2 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ então $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$ e $\lim x_n$ não existe.

9. Considere polinómios p, q tais que o coeficiente do maior grau de $q(x)$ é positivo e p não é constante. Definindo $p_a(x) = p(x) - p(a)$, mostre que $\lim \sqrt[p(n)]{q(n)}$ existe em $\mathbb{R}$ sse $\lim \sqrt[p_a(n)]{q(n)}$, $a \in \mathbb{R}$ existe.

i) Mostre que se p é polinómio de grau 1 então $\lim \sqrt[p(n)]{q(n)} = 1$.

ii) Considerando a igualdade $\sqrt[p_0(n)]{q(n)} = \sqrt[n]{\sqrt[r(n)]{q(n)}}$, sendo r um polinómio de grau inferior ao grau de p, prove por indução matemática que para quaisquer polinómios nas condições do enunciado tem-se $\lim \sqrt[p(n)]{q(n)} = 1$.

10. Sabe-se que se x_n, y_n, $n \in \mathbb{N}$ são sucessões tais que x_n, $n \in \mathbb{N}$ é convergente em $\mathbb{R}$ e $\lim |y_n| = \infty$, então

$$\lim \left(1 + \frac{x_n}{y_n}\right)^{y_n} = e^{\lim x_n}. \tag{2}$$

i) Suponha $\lim y_n = +\infty$ e indique justificando como reescrever (2) nos casos $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$.

ii) Baseado em (2) forneça exemplos de sucessões u_n, v_n, $n \in \mathbb{N}$ com as propriedades $\lim u_n = 1, \lim v_n = +\infty$ e tais que:

a) $\lim u_n^{v_n} = +\infty$;

b) $\lim u_n^{v_n} = x$, $x \in \mathbb{R}_0^+$;

c) $\lim u_n^{v_n}$ não existe.

11. Calcule os limites das sucessões com os seguintes termos gerais ou justifique que não existem:

a) $\frac{1+n}{1+(-1)^n n^2}$; b) $\frac{1+n^2}{1+(-1)^n n^2}$; c) $\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$; d) $\left(1 - \frac{1}{2n^2+2}\right)^{n^2}$;

e) $\frac{n^p}{n!}$, $p \in \mathbb{N}$; f) $\frac{a^n}{n^p}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$; g) $\frac{n^n}{n!}$; h) $\frac{n^n}{a^n n!}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

i) $\frac{a^n b^n}{a^n + b^n}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$; j) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$; l) $\left(1 + \frac{1}{n^{100}}\right)^{n!}$; m) $\left(1 - \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$;

n) $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{n!}$; o) $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3}}{n^n}$; p) $\frac{e^{\sqrt{n}}}{n}$; q) $e^{-n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

12. Prove que as sucessões monótonas são convergentes em $\mathbb{R}$ sse possuem uma subsucessão convergente em $\mathbb{R}$.

13.

i) Mostre que o conjunto dos sublimites em $\overline{\mathbb{R}}$ de x_n, $n \in \mathbb{N}$ é subconjunto de $\{-\infty, +\infty\}$ sse x_n, $n \in \mathbb{N}$ não tem subsucessões limitadas.

ii) Forneça um exemplo duma sucessão sem subsucessões limitadas.

lpessoa@math.ist.utl.pt

Justifique que o conjuntos das sucessões sem subsucessões limitadas coincide com o conjunto das sucessões sem subsucessões convergentes em $\mathbb{R}$.

14. Mostre que o conjunto dos sublimites duma sucessão de termos num conjunto finito, coincide com o conjunto não vazio dos termos infinitamente repetidos.

15. Fixe uma sucessão x_n, $n \in \mathbb{N}$ e forneça exemplo duma outra sucessão y_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que o conjunto dos termos $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto dos termos infinitamente repetidos da sucessão y_n, $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1 Algumas resoluções

4 i)

Claramente $v_1 = 1$. Para terminar observe que

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} + x_n}{x_{n+1}} = 1 + \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{v_n},\ n \in \mathbb{N}_1. \tag{3}$$

4 ii)

De (3) concluiu-se

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}_2. \tag{4}$$

Para $n \in \mathbb{N}_1$ fixo suponha-se $(v_{2n} - v_{2n-1} > 0) \wedge (v_{2n+1} - v_{2n} < 0)$. Claramente $v_n > 0, \forall_{n \in \mathbb{N}_1}$. Da hipótese de indução e de (4) obtém-se

$$v_{2(n+1)} - v_{2(n+1)-1} = \frac{1}{v_{2n+1}} - \frac{1}{v_{2n}} > 0.$$

A inequação anterior e (4) têm como consequência

$$v_{2(n+1)+1} - v_{2(n+1)} = \frac{1}{v_{2n+2}} - \frac{1}{v_{2n+1}} < 0.$$

Finalmente $v_2 - v_1 = 2 - 1 > 0$ e $v_3 - v_2 = 3/2 - 2 < 0$.

4 iii)

Da definição de v_n, $n \in \mathbb{N}_1$

$$\frac{v_{2(n+1)}}{v_{2n}} = \frac{x_{2n+3} x_{2n}}{x_{2n+2} x_{2n+1}} = \frac{(x_{2n+2} + x_{2n+1})\, x_{2n}}{(x_{2n+1} + x_{2n})\, x_{2n+1}}.$$

Logo

$$\frac{v_{2(n+1)}}{v_{2n}} < 1 \Leftrightarrow x_{2n+2} x_{2n} < x_{2n+1}^2 \Leftrightarrow v_{2n+1} < v_{2n}.$$

Usando o resultado na alínea anterior mostra-se $v_{2n+2}/v_{2n} < 1, \forall_{n \in \mathbb{N}_1}$, i.e. v_{2n}, $n \in \mathbb{N}_1$ é decrescente. De forma análoga conclui-se que v_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}_1$ é crescente.

4 iv)

É óbvio que $v_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}_1$. Logo v_{2n} é decrescente e minorada $(v_n > 0)$ e em consequência convergente. De (3) conclui-se facilmente $v_n \leq 2, n \in \mathbb{N}_1$. Logo v_{2n+1} é majorada e crescente e portanto convergente. De (3) infere-se

$$v_{2(n+1)} = \frac{2v_{2n} + 1}{v_{2n} + 1} \text{ e } v_{2(n+1)+1} = \frac{2v_{2n+1} + 1}{v_{2n+1} + 1}. \tag{5}$$

Definam-se $\alpha_j = \lim v_{2n+j}$, $j = 0, 1$. Do teorema das sucessões enquadradas conclui-se $\alpha_j \geq 1$ e como v_{2n+2} e v_{2n+3} convergem respectivamente a α_0 e α_1, de (5) obtém-se $\alpha_j = (2\alpha_j + 1)/(\alpha_j + 1)$. Portanto $\alpha_j = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$, $j = 0, 1$. Como as sucessões dos termos pares e dos termos ímpares convergem para o mesmo limite conclui-se que v_n converge a $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2$.

6 ii)

Suponha $\alpha = \lim x_{n+1}/x_n$. Dado $\epsilon > 0$ definam-se

$$\alpha_+(\epsilon) = \alpha + \epsilon \text{ e } \alpha_-(\epsilon) = \max(0, \alpha - \epsilon).$$

lpessoa@math.ist.utl.pt

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq k$ tem-se $\alpha_-(\epsilon) \leq x_{n+1}/x_n \leq \alpha_+(\epsilon)$. Da alínea i) obtém-se $x_k\, \alpha_-^{n-1}(\epsilon) \leq x_n \leq x_k\, \alpha_+^{n-1}(\epsilon)$, $n \geq k$. Portanto, para $n \geq k$

$$\sqrt[n]{x_k}\, \alpha_-^{(n-1)/n}(\epsilon) \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{x_k}\, \alpha_+^{(n-1)/n}(\epsilon).$$

Conclui-se que a sucessão $\sqrt[n]{x_n}$ é limitada e do teorema das sucessões enquadradas, que todos os sublimites de $\sqrt[n]{x_n}$ pertencem ao intervalo $[\alpha_-(\epsilon), \alpha_+(\epsilon)]$. Como $\lim_{\epsilon \to 0^+} \alpha_-(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \alpha_+(\epsilon) = \alpha$, da arbitrariedade de $\epsilon > 0$ retira-se que α é o único sublimite.

11 q)

Observe que a sucessão a_n, $n \in \mathbb{N}_1$ é crescente. De facto $\sqrt[n]{a_n} = e^{-1}\left(1 + n^{-1}\right)^n$ e a sucessão $\left(1 + n^{-1}\right)^n$ é crescente e convergente ao número e [1, pag. 107]. Logo $\sqrt[n]{a_n} < 1, \forall_{n \in \mathbb{N}_1}$ e $\sqrt[n]{a_n}$ é monótona crescente. Então $0 < a_n < 1, \forall_{n \in \mathbb{N}_1}$ e a_n é monótona crescente. De facto

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \Rightarrow a_n \geq (a_{n+1})^{\frac{n}{n+1}} \geq a_{n+1}.$$

Observe que

$$a_{2n} = e^{-2n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n^2} = a_n^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n^2}} = a_n^2\left(1 + \frac{1}{4n(n+1)}\right)^{2n^2}. \qquad (6)$$

Em conta de sucessões monótonas e limitadas serem convergentes, está bem definido $a = \lim a_n$. Como $\lim\left(1 + \frac{1}{4n(n+1)}\right)^{2n^2} = \sqrt{e}$, retira-se de (6) a equação $a = a^2\sqrt{e}$, i.e. $a = e^{-1/2}$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.5 Continuidade. Diferenciabilidade.

1. Uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ diz-se limitada no ponto $x \in \mathbb{R}$ se

$$\exists_{M>0} \forall_{y \in V_\epsilon(x)} |f(y)| < M.$$

Suponha dada uma sucessão r_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que qualquer número racional é termo da sucessão r_n, $n \in \mathbb{N}$ e considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = r_n, \\ 0, & x \neq r_n, \forall_{n \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Mostre que a função f é ilimitada (não é limitada) em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$. Conclua que f é descontínua em todos os pontos.

2. Seja $D(x), x \in \mathbb{R}$ a função de Dirichelet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$f \in C(\mathbb{R})$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Define-se $\psi(x) = f(x)D(g(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre sucessivamente que:

i) Se $f(x_0) = 0$ então ψ é contínua em x_0;

ii) Se $f(x_0) \neq 0$, g é contínua em $\mathbb{R}$ e não constante em nenhuma vizinhança $V_\epsilon(x_0), \epsilon > 0$, então ψ não é contínua em x_0.

3. Assumindo $\lim_{x\to 0} \sin x/x$, da fórmula trigonométrica para o coseno do dobro conclua que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Determine o domínio e o domínio de continuidade das seguintes funções de variável real:

a) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; b) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; c) $\frac{x^4-3x^2+2}{x^2-3x+2}$; d) $\frac{\cos^4 x - 3\cos^2 x + 2}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}$;

e) $\frac{x}{\sin 2x}$; f) $x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)$; g) $\frac{1}{x}\sin(\sin x)$; h) $e^{\frac{1}{\sin x \cos^2 x}}$;

i) $\frac{e^{\sin x}-1}{x}$; j) $\frac{e^x-1}{\sin x}$; l) $\frac{\tan x}{e^x - e^{-x}}$; m) $\frac{\sin(\cos x - 1)}{(e^x-1)^2}$.

Para cada uma das alíneas anteriores determine o conjunto dos pontos aos quais as funções mencionadas são prolongáveis por continuidade.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x & , x \leq -1, \\ \frac{1}{x} f(\frac{1}{x}) & , -1 < x < 1 \wedge x \neq 0, \\ \sin \frac{\pi}{x} & , x \geq 1. \end{cases}$$

i) Em que pontos do seu domínio a função f é contínua?

ii) É possível prolongar f por continuidade ao ponto 0?

iii) Caso existam, calcule os limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

iv) Justificando determine o contradomínio da restrição de f aos conjuntos $]-\infty, -1]$, $[1, +\infty[$, $[-1, 0[$, $]0, 1]$ e o contradomínio de f.

lpessoa@math.ist.utl.pt

6. Dada uma função limitada em todos os pontos de $\mathbb{R}$, mostre que o limite

$$\mathrm{osc\,f\,(x)} := \lim_{\epsilon\to 0^+} \sup\left\{|\mathrm{f(x)} - \mathrm{f(y)}| : \mathrm{y} \in \mathrm{V}_\epsilon(\mathrm{x})\right\}, \ \mathrm{x} \in \mathbb{R},$$

existe. Demonstre adicionalmente que:

i) f é contínua em x sse $\mathrm{osc\,f\,(x)} = 0$;

ii) Supondo que $f(x^+)$ e $f(x^-)$ existem, determine $\mathrm{osc\,f\,(x)}$.

Diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se para qualquer $x \in \mathbb{R}$ existem os limites laterais $f(x^+)$ e $f(x^-)$. Supondo que f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ define-se

$$O_\epsilon = \{x : \mathrm{osc\,f\,(x)} \geq \epsilon\}, \ \epsilon > 0.$$

iii) Se $x \in O_\epsilon$ então existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in V_\delta(x)\setminus\{x\}$ tem-se $y \notin O_\epsilon$.

iv) O conjunto dos pontos de descontínuidade da função f é dado por $\cup_{n\in\mathbb{N}_1} O_{\frac{1}{n}}$.

v) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona então f é seccionalmente contínua.

7. Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e calcule $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{h}$.

8. Verifique se cada uma das seguintes funções de variável real é prolongável por continuidade ao ponto 0 e se o prolongamento por continuidade é uma função diferenciável na origem:

a) $\frac{(x+|x|)^2}{x}$; b) $(x+|x|)^2$; c) $\sin\frac{1}{\sin x}$; d) $\frac{\sin x}{x}$;

e) $x\sin\frac{1}{x}$; f) $x^2\sin\frac{1}{x}$; g) $e^{-\frac{1}{x^3}}$; h) $e^{-\frac{1}{x^2}}$;

i) $e^{-\cot^2 x}$; j) $x\log(|\sin x|+1)$; l) $\log(|\sin x|+1)$; m) $x^n D(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Caso verifique que o prolongamento por continuidade é uma função diferenciável na origem, decida adicionalmente se a sua função derivada é contínua em 0.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.6 Teorema de Lagrange e algumas consequências.

1. Considere uma função $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ localmente constante, i.e.

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\,\exists_{\epsilon>0}\,\forall_{t,y\in V_\epsilon(x)}\, f(t)=f(y).$$

Mostre que f é constante em $\mathbb{R}$.

Observação: Sugere-se ao leitor que estabeleça provas com e sem auxilio do cálculo diferenciável.

2. Considere a função $f(x)=x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

i) Se $\alpha>1$ então f é prolongável por continuidade ao ponto 0 e o seu prolongamento por continuidade é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$.

ii) Se $1<\alpha<2$ então a função f' não é limitada superiormente nem inferiormente em qualquer vizinhança da origem. Mostre que f' verifica o teorema do valor intermédio.

De seguida $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ designa uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que f' não é limitada superiormente nem inferiormente em qualquer vizinhança da origem. Suponha que f' verifica o teorema do valor intermédio e mostre que:

iii) Dado $\xi\in\widetilde{\mathbb{R}}$ existem sucessões x_n, y_n tais que $\lim x_n=\lim y_n=0$ e

$$\lim_n \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=\xi.$$

3. Suponha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável no ponto $a\in\mathbb{R}$. Mostre que se x_n, y_n, $n\in\mathbb{N}$ são sucessões convergentes a a verificando $y_n<a<x_n$, então

$$\lim_n \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(a).$$

Sugestão: Inicie mostrando que se w_n, z_n, $n\in\mathbb{N}$ são sucessões convergentes para $a\in\mathbb{R}$ e t_n é uma sucessão limitada, então $\lim\,[t_n w_n+(1-t_n)z_n]=a$. De seguida considere a igualdade

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=t_n\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}+(1-t_n)\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}\,,\; t_n=\frac{x_n-a}{x_n-y_n}\,.$$

4. Dado $0<\mu<1$ e $x,y\geq 0$, mostre as seguintes desigualdades:

$$\begin{array}{l} |x+y|^\mu \leq |x^\mu+y^\mu|\leq 2^{1-\mu}|x+y|^\mu \\ |x^\mu-y^\mu|\leq |x-y|^\mu \end{array}.$$

Se $\mu\geq 1$ e $x,y\geq 0$, então

$$\begin{array}{l} 2^{1-\mu}\,|x+y|^\mu \leq |x^\mu+y^\mu|\leq |x+y|^\mu \\ |x^\mu-y^\mu|\geq |x-y|^\mu \end{array}.$$

Sugestão: Encontre os extremos locais das funções $[0,1]\ni t\to(1+t^\mu)\,/\,(1+t)^\mu$ e $[\,0,1\,[\,\ni t\to(1-t^\mu)\,/\,(1-t)^\mu$.

5. Uma função $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$, $a<b\in\mathbb{R}$ diz-se α-Hölder, se

$$\exists_{M>0}\,\forall_{x,y\in[a,b]}\;|f(x)-f(y)|\leq M\,|x-y|^\alpha\,,\;\alpha>0.$$

Mostre sucessivamente que:

i) Se f é α-Hölder então é contínua;

lpessoa@math.ist.utl.pt

ii) Se f é α-Hölder, $\alpha > 1$ então f é diferenciável em todos os pontos e $f'(x) = 0$. Conclua que f é constante.

iii) Se $f \in C^1([a,b])$ então f é 1-Hölder.

6. Considere a classe de funções

$$C_b^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f^{(n)} \text{é limitada} \right\}.$$

Mostre sucessivamente que:

i) Se $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(\infty) := \lim_{|x|\to\infty} f^{(n)}(x)$ existe então $f^{(n)}(\infty) = 0,\ n \in \mathbb{N}_1$.

ii) Considere $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que f' tem dois sublimites distintos em $+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Mostre que f'' não é limitada.

iii) Se $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x|\to\infty} f'(x) = 0$, então $\lim_{|x|\to\infty} f^{(n)}(x) = 0,\ n \in \mathbb{N}_1$.

7. Calcule os seguintes limites de funções reais de variável real:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+c)^\beta - x^\beta}{cx^{\beta-1}}$, $\beta \in \mathbb{R}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^{2\alpha}}}}{x^\beta}$, $\alpha, \beta > 0$;

c) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^\beta}$, $\beta > 0$; d) $\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^\beta}$, $\beta, \alpha > 0$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.6.1 Algumas resoluções

6)

i) Suponha $f^{(n)}(\infty) \neq 0$. Sem perder generalidade assuma-se $f^{(n)}(\infty) > 0$. Então, dado $r > 0$, o teorema de Lagrange permite concluir a existência de $\xi_r \in \,]\,r, 2r\,[$, verificando

$$f^{(n-1)}(2r) - f^{(n-1)}(r) = r f^{(n)}(\xi_r) \overset{r \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \,.$$

Como por hipótese $f^{(n-1)}$ é uma função limitada, a conclusão anterior é absurda.

ii) Sem perder generalidade, suponha-se a existência dum sublimite positivo de f' em $+\infty$. A continuidade da função f' e o teorema do valor intermédio, permitem supor que f' tem dois sublimites positivos c_1, c_2 tais que $0 < c_1 < c_2$. Considere-se $\epsilon > 0$ verificando

$$0 < c_1 - \epsilon < c_1 + \epsilon < c_2 - \epsilon.$$

Porque c_2 é sublimite de f', existe $a_k \geq k$ verificando $c_2 - \epsilon < f'(a_k) < c_2 + \epsilon$. Defina-se

$$b_k = \inf \{x : x > a_k,\ c_1 - \epsilon < f'(x) < c_1 + \epsilon\} \,.$$

De novo, o teorema de Lagrange permite concluir que existe $\xi_k \in \,]\,a_k, b_k\,[$ verificando

$$f(b_k) - f(a_k) = f'(\xi_k)\,(b_k - a_k)$$

Note-se a desigualdade $f'(\xi_k) \geq c_1 + \epsilon$. De facto, se $f'(\xi_k) < c_1 + \epsilon$, então o teorema do valor intermédio garantiria a existência de c_k nas condições $a_k < c_k < \xi_k < b_k$, e verificando $c_1 - \epsilon < f'(c_k) < c_1 + \epsilon$, o que contradiz a definição de b_k. Obtêm-se

$$0 < (c_1 + \epsilon)\,(b_k - a_k) \leq f'(\xi_k)\,(b_k - a_k) = f(b_k) - f(a_k) \overset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e em consequência $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0$. Finalmente existe $\theta_k \in \,]\,a_k, b_k\,[$ verificando

$$|f''(\theta_k)| = \left| \frac{f'(b_k) - f'(a_k)}{b_k - a_k} \right| \geq \frac{(c_2 - \epsilon) - (c_1 + \epsilon)}{b_k - a_k} \overset{r \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

o que termina a demonstração.

iii) Usaremos indução matemática para provar $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$. O caso $n = 1$ é verdadeiro por hipótese. Por hipótese de indução, suponha-se $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$. Se $f^{(n+1)}$ tem limite em $+\infty$ então da alínea i) e de $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ retira-se $\lim_{x\to+\infty} f^{(n+1)}(x) = 0$. Consequentemente é suficiente considerar o caso em que $\lim_{x\to+\infty} f^{(n+1)}(x)$ não existe. Dado $f^{(n+1)}$ ser uma função limitada, retira-se do teorema de Bolzano-Weierstrass que $f^{(n+1)}$ tem pelo menos dois sublimites no ponto $+\infty$. Por hipótese de indução $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ existe. Logo, da alínea ii), conclui-se que a função $f^{(n+2)}$ não é limitada, contradizendo as condições das hipóteses. Portanto, tem-se necessáriamente que $\lim_{x\to+\infty} f^{(n+1)}(x)$ existe e é nulo. A demonstração termina considerando nos argumentos acima a função $g(x) = f(-x)$.

2.7 Fórmula de Taylor.

1. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_1$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$.

a) Se n é impar ou respectivamente par, e a função f verifica

$$f^{(n)}(x)(x-a) > 0\,(<0), \qquad \text{se } x \neq a,$$

então a é um ponto de mínimo de f (máximo), respectivamente ponto de sela.

b) Se n é par ou respectivamente impar, e a função f verifica

$$f^{(n)}(x) > 0\,(<0), \qquad \text{se } x \neq a.$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f respectivamente ponto de sela.

2. Considere $n \in \mathbb{N}_1$, $x \in \mathbb{R}$ e mostre sucessivamente:

i) usando indução matemática que

$$\frac{d^j}{dx^j}(1+x)^n = \frac{n!}{(n-j)!}(1+x)^{n-j} \quad , j = 1, \cdots, n\,;$$

ii) Usando a formula de Taylor, deduza que

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

iii) Finalmente, demonstre o bem conhecido binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

3. Demonstre a seguinte desigualdade

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

4. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que existe $n \in \mathbb{N}$, e constantes $M \geq 0$, $\alpha > 1$ verificando

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y) \right| \leq M\,|x-y|^{\alpha}, \forall_{x,y \in \mathbb{R}}.$$

Mostre sucessivamente que:

a) a função $f^{(n)}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f^{(n+1)}(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$;

a) $f(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a n.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.8 Primitivação.

1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, b) $3\sin x+2x^2$, c) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$,

d) xe^{-x^2}, e) $\dfrac{3\sin x}{(1+\cos x)^2}$, f) $x\sqrt{1+x^2}$,

g) $e^{2\sin x}\cos x$, h) $\dfrac{1}{1+e^x}$, i) $\tan x$,

j) $\dfrac{1}{2+x^2}$, l) $\tan^2 x$, m) $\cos^3 x\sin^3 x$,

n) $\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$, o) $\dfrac{x}{1+x^4}$, p) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$,

q) $\dfrac{1}{1+3x^2}$, r) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$, s) $\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}$,

t) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, u) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, v) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$,

x) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$, b) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$, c) $\dfrac{x^5}{x^2-1}$,

d) $\dfrac{x}{x^2+2x+3}$, e) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$, f) $\dfrac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$,

g) $\dfrac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}$, h) $\dfrac{1}{x(x^5+1)^2}$.

Em seguida, determine *todas* as primitivas de cada uma das funções anteriores (nos respectivos domínios).

3. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $e^x(e^x+x)$, b) $e^x\sin x$, c) $x^3e^{-x^2}$,

d) $\arctan x$, e) $\arcsin x$, f) $x(1+x^2)\arctan x$,

g) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$, h) $\log\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$, i) $x^2\log^2 x$,

j) $\log^2 x$, k) $\dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x}$, l) $\cos 2x\log(\tan x)$,

m) $3x\sqrt{1-x^2}\arcsin x$, n) $\dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$, o) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

4. Utilizando substituições apropriadas, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$, c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$, e) $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, f) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

g) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$, h) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, i) $\sqrt{1-x^2}$,

j) $\dfrac{\log x}{x(\log x-1)^2}$, k) $\dfrac{1}{1+\sin x+\cos x}$.

5. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sec x,\ t=\sin x$, b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x=\sec t$,

c) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, $x=\cos t$, d) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}}$, $t=\sqrt{1-e^x}$,

e) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, $x=t^6-1$, f) $\dfrac{\sin x}{1-\sin x}$, $\tan\dfrac{x}{2}=t$,

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x=\sin^2 t$, h) $\sqrt{1-2x-x^2}$, $x=t-1,\ t=\sqrt{2}\sin s$,

i) $\dfrac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x+1=\tan t$, j) $\dfrac{\sin x}{1+3\cos^2 x}$, $t=\cos x$.

6. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $|x|$, b) $x\arcsin\dfrac{1}{x}$, c) $\sqrt{1+\sqrt{x}}$,

d) $\sin(\log x+1)$, e) $\cos^3 x\sqrt{\sin x}$, f) $\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}$,

g) $\dfrac{1+\log^2 x}{x\,(1+\log x)}$, h) $\dfrac{3\sin x+3}{\cos x+\sin 2x}$, i) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}-2e^x+2}$,

j) $\cos x\log\left(1+\sin^2 x\right)$, l) $\dfrac{x\log x}{\sqrt{1-x^2}}$, m) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$,

n) $\cos^3 x$, o) $\cos^4 x$, p) $\dfrac{1}{x^8+x^6}$,

q) $x(\arctan x)^2$, r) $x\log\dfrac{1-x}{1+x}$, s) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

7. Mostre que, para $n\in\mathbb{N}_1$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$P(\log^n|x|)=x\log^n|x|-nP(\log^{n-1}|x|),\ \ x\neq 0.$$

Aproveite o resultado anterior para calcular todas as funções $F(x)$ tais que $F'(x)=\log^2|x|$, e que verificam a condição $F(1)+F(-1)=0$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

8. Utilizando o método de primitivação por partes, determine primitivas das funções $\sec^3 x$ e $\sec^4 x$.
   Mostre que, para inteiros $n \geq 2$, é válida a expressão

$$P(\sec^n x) = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} P(\sec^{n-2} x).$$

9. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

10. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\psi''(x) = \frac{1}{1+x}\,, \forall_{x>-1}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

11. Prove que a função de Heaviside *não é* primitivável em $\mathbb{R}$. **Sugestão:** Argumente por redução ao absurdo.

2.8.1 Soluções

1.

a) $\sqrt{2x^3}$, b) $3\cos x + \frac{2}{3}x^3$, c) $\frac{1}{3}\log\left|1+x^3\right|$,

d) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, e) $\frac{3}{1+\cos x}$, f) $\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$,

g) $\frac{1}{2}e^{2\sin x}$, h) $-\log(1+e^{-x})$, i) $\log|\cos x|$,

j) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$, l) $\tan x - x$, m) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x$,

n) $\log|\arctan x|$, o) $\frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right)$, p) $2\arctan(\sqrt{x})$,

q) $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{3}x\right)$, r) $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}e^x\right)$, s) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$,

t) $\frac{1}{2}\arcsin(2x)$, u) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}x^2\right)$, v) $\log\sqrt[3]{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}$,

x) $-\frac{1}{x+1}$.

2.

a) $2\log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x}$, b) $x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x$,

c) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|x^2-1|$, d) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)\right]$,

e) $\log\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{2}{x+2}$, f) $\frac{x^2}{2} + \log|x+1| + \frac{1}{x+1}$,

g) $\frac{1}{21}\left(8\log|x^3+8| - \log|x^3+1|\right)$, h) $\log|x| - \frac{1}{5}\log|x^5+1| + \frac{1}{5(x^5+1)}$.

Exemplo de solução da segunda parte de 2.:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2\log(x-1) - \log x + 1/x + K_1, & \text{se } x > 1; \\ 2\log(1-x) - \log x + 1/x + K_2, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 2\log(1-x) - \log(-x) + 1/x + K_3, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

em que K_1, K_2, K_3 são constantes reais arbitrárias.

lpessoa@math.ist.utl.pt

3.

a) $e^x(e^x+x-1)-e^{2x}/2$, b) $e^x(\sin x-\cos x)/2$,

c) $e^{-x^2}(x^2+1)/2$, d) $x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$,

e) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, f) $\frac{1}{4}(1+x^2)^2\arctan x-x/4-x^3/12$,

g) $\frac{2}{3}x^3\sqrt{1+x^3}-\frac{4}{9}(1+x^3)^{2/3}$, h) $x\log(1/x+1)+\log|x+1|$,

i) $\frac{x^3}{3}\log^2 x-\frac{2}{9}x^2\log x+\frac{2}{27}x^3$, j) $x\log^2 x-2x\log x+2x$,

k) $-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, l) $\frac{1}{2}\sin(2x)\log(\tan x)-x$,

m) $-(1-x^2)^{3/2}\arcsin x+x-x^3/3$, n) $-\frac{x}{\sin x}+\log|\tan\frac{x}{2}|$,

o) $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x$.

4.

a) $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+1\right)$, b) $\frac{3}{2}\arctan\sqrt[3]{x^2}$, c) $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}$,

d) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\log|1+\sqrt[3]{x}|+6\arctan\sqrt[6]{x}$,

e) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$, f) $-2\arctan\sqrt{1-x}$,

g) $\log|\cos x|+\log|\tan x+1|$, h) $\log\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$,

i) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$, j) $\log|\log -1|-\frac{1}{\log x-1}$,

k) $\log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|$.

5.

a) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$, b) $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$, c) $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{3/2}$, d) $-2\arcsin\sqrt{1-e^x}$,

e) $\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}+2(x+1)^{1/2}-6(x+1)^{1/6}+6\arctan(x+1)^{1/6}$,

f) $-x+\tan x+\sec x$, g) $2\arcsin\sqrt{x}$, h) $\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$,

i) $-\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+2x+2}$, j) $-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\sqrt{3}\cos x\right)$.

6.

a) $\frac{1}{2}x|x|$,

b) $\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(x^2-1)^{3/2}$,

c) $\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2}-\frac{8}{15}(1+\sqrt{x})^{5/2}$,

d) $\frac{x}{2}\sin(\log x+1)-\frac{x}{2}\cos(\log x+1)$,

e) $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2}-\frac{2}{7}(\sin x)^{7/2}$,

f) $\frac{2}{3}x^{3/2}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\log(1+x)$,

g) $\log x-2\log|1+\log x|-\frac{2}{1+\log x}$,

h) $\log\left|\frac{1+2\sin x}{1-\sin x}\right|$,

i) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}\log(e^{2x}-2e^{x}+2)$,

j) $\sin x\log(1+\sin^2 x)-2\sin x+2\arctan(\sin x)$,

l) $-\sqrt{1-x^2}\log x+\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right|$,

m) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{4}-4\log(\sqrt{x}+1)$,

n) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$, ,

o) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x$,

p) $-\frac{1}{5x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x$,

q) $\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)$,

r) $\frac{1}{2}(x^2-1)\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$,

s) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$.

7. $\begin{array}{ll} x\log^2|x|-2x\log|x|+2x+C, & \text{se } x>0 \\ x\log^2|x|-2x\log|x|+2x-C, & \text{se } x<0 \end{array}$ onde $C\in\mathbb{R}$.

9. $\log(1+e^{-x})+\frac{\pi}{2}$.

10. $(1+x)\log(1+x)+1$.

lpessoa@math.ist.utl.pt

2.9 Integral de Riemann. Teorema fundamental

5. Considere uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mostre que se existe $c \in [a, b]$ e $\delta_0 > 0$ tal que para todo $0 < \delta < \delta_0$ verifica-se $f \in \mathcal{R}\,[a, c - \delta]$ e $f \in \mathcal{R}\,[c + \delta, b]$, então $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.

6. Considere funções $f, g \in \mathcal{R}\,[a, b]$. Mostre sucessivamente que:

i) $f^2 \in \mathcal{R}\,[a, b]$.

ii) Em conta da igualdade $2fg = (f + g)^2 - f^2 - g^2$, conclua $fg \in \mathcal{R}\,[a, b]$.

Sugestão: Para i) note que $\sup_{[x_j, x_{j+1}]} f^2 = (\sup_{[x_j, x_{j+1}]} |f|)^2$, $a < x_j < x_{j+1} < b$.

7. Considere uma função $f \in C(\mathbb{R})$ e no seu domínio defina

$$\psi_\delta(x) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(t)}{t}\, dt.$$

i) Mostre que se $f'_d(x)$ e $f'_e(x)$ existem, então $\psi_\delta(x)$ está bem definido;

ii) Se $f(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ então $\psi_\delta(0)$ não está definido.

8. Calcule

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$, b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$, c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x\, dx$,

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\, dx$, e) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 u\, du$, f) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{8\tan x}{1 + \sin^2 x}\, dx$,

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x}\, dx$, h) $\displaystyle\int_0^1 \log(1 + \sqrt{x})\, dx$, i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \arctan x\, dx$,

j) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x \sin x\, dx$, l) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{x^2} \sin x\, dx$, m) $\displaystyle\int_0^\pi \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 dx$.

9. Calcule as áreas dos seguintes conjuntos:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le |x|\}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge x,\ y \ge x^3,\ y \le 4x\}$,

c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\right\}$,

d) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \le 1\right\}$,

e) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge |x| + |y| \ge 1\right\}$,

f) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \log x \wedge x \le a\right\}$, $a > 1$.

Para as três ultimas regiões acima, determine o comprimento da linha que serve de fronteira à região em causa.

10. Determine a área da região plana delimitada pelo gráfico da função $\arccos x$, pela recta tangente ao gráfico da função $\arccos x$ no ponto $(0, \pi/2)$ e pela recta de equação cartesiana $y = 0$.

[2° Exame AMII 05/07/06]

lpessoa@math.ist.utl.pt

11. Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\text{a)} \int_1^x \sin(t^2)\,dt\,, \quad \text{b)} \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\,dt\,, \quad \text{c)} \int_x^{2x} e^{t^2}\,dt\,,$$
$$\text{d)} \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt\,, \quad \text{e)} \int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t})\,dt\,.$$

12. Sejam $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt\,,$$

$$\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0.$$

i) Mostre que f é uma função par e g é uma função ímpar.

ii) Forneça exemplos de funções $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, integráveis em todos os intervalos limitados de $\mathbb{R}$, que verificam as igualdades anteriores e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

13. Calcule os seguintes limites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2)\,dt\,,$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\,dt}\,.$

14. Considere uma função $f \in C(\mathbb{R})$ e mostre que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t)\,dt\right)^x = e^{f(0)}.$$

15. Considere uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{\arctan x} g(t)\,dt}{x^2}\,.$$

[2° Exame AMII 05/07/06]

16. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função periódica com um periodo $T > 0$. Suponha f integrável em intervalos limitados e fechados de $\mathbb{R}$, e considere as funções

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt \text{ e } \quad G(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Mostre sucessivamente que:

i) Se $f \in C(\mathbb{R})$ então F é uma função constante em $\mathbb{R}$.

ii) F é identicamente nula *sse* G é periódica de período T.

17. Mostre que

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\,, x > 0.$$

Sugestão: Use uma substituição de variável adequada.

lpessoa@math.ist.utl.pt

18. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$, b) $g(x) = \displaystyle\int_2^{e^x} \frac{1}{\log t}\, dt$.

19. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases} .$$

a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$,

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\, ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

20. Considere a função de variável real definida por $\psi(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{|t| e^{-t^4}}{1+t^2}\, dt$.

a) Calcule os zeros e o sinal de ψ;

b) Mostre que $\psi(x) \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0,1]} \log\left(\frac{1+t^2}{1+t^4}\right)$, $\forall_{x \in \mathbb{R}}$.

Referências

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à análise matemática.* Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 3ª Edição.

lpessoa@math.ist.utl.pt