Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A)

10 de Novembro de 2012, 9 horas

LEE, LEGI, LEIC (Taguspark), LERC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \geq \frac{x+1}{2} \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : |x-1| = 2\,|x| \}, \qquad C = (A \cup B) \cap \left[-\pi, \frac{1}{3} \right].$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cup B = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup \left\{ \frac{1}{3} \right\} \cup [1, +\infty[\,.$$

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C e de $C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão de termos em C tem um sublimite.

(ii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C então $\lim \frac{(-1)^n}{n} u_n = 0$.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad , \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $1 \leq a_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o limite.

3. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{(n+1)! - n!}{n!\,(2n+1)}, \qquad \lim \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 4(-1)^n}{3 - 2n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{n+2}{1+\pi^n}}, \qquad \lim \frac{1 + \operatorname{sen}(n^n)}{\sqrt{n}}.$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1), & \text{se } x < 0, \\ x \operatorname{sen} x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ e^{\frac{\pi}{2} - x}, & \text{se } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x), \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$$

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto $x = \frac{\pi}{2}$? Justifique.

d) Indique o contradomínio de f.

5. Seja f uma função real, definida e contínua no intervalo $[0, 1]$. Seja (α_n) a sucessão de termo geral $\alpha_n = \frac{n-1}{n}$ e suponha que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(\alpha_n) f(\alpha_{n+1}) < 0.$$

Mostre que $f(1) = 0$.