Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B)

7 de Janeiro de 2013, 9 horas

LEE, LEGI, LEIC (Taguspark), LERC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(3) **1.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x(x-1)}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^3-12x+16}{\operatorname{arctg}(x-2)^2}$$

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x(x-1)} = -\infty.$$

Aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-12x+16}{\operatorname{arctg}(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-12}{\frac{2(x-2)}{1+(x-2)^4}} = \lim_{x\to 2} \frac{3}{2}(x+2)\left(1+(x-2)^4\right) = 6$$

(3) **2.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{2e^x}{1+e^{2x}}, \qquad \text{b) } x^2\log x$$

Resolução:

$$P\frac{2e^x}{1+e^{2x}} = 2\operatorname{arctg} e^x.$$

Primitivando por partes,

$$Px^2\log x = \frac{x^3}{3}\log x - P\frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}$$

(3) **3.** Calcule a área da região plana delimitada pelos gráficos das funções $y=-x^2$ e $y=-2|x|$.

Resolução: Uma vez que $-x^2=-2x \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$, a área vem dada por

$$\int_{-2}^{2}(-x^2+2|x|)\,dx = 2\int_0^2(-x^2+2x)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

(2,5) **4.** Calcule o integral

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx$$

Resolução:

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx = \left[2(x^2+3x+5)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2(3-\sqrt{5}).$$

(3) **5.** Seja uma função $g \in C^1(\mathbb{R})$ e considere a função ψ definida em $\mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = x \int_2^{e^{-x}} \frac{g(t)}{t}\, dt$$

Determine as funções ψ' e ψ''.

Resolução: Pelo Teorema Fundamental da Análise,

$$\psi'(x) = \int_2^{e^{-x}} \frac{g(t)}{t}\, dt + x\frac{g(e^{-x})}{e^{-x}}(-e^{-x}) = \int_2^{e^{-x}} \frac{g(t)}{t}\, dt - xg(e^{-x})$$

e

$$\psi''(x) = \frac{g(e^{-x})}{e^{-x}}(-e^{-x}) - g(e^{-x}) + xg'(e^{-x})e^{-x} = -2g(e^{-x}) + xe^{-x}g'(e^{-x}).$$

6. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, converge simplesmente
(3) ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{2^n + n}.$$

Resolução: Designando por $a_n = \frac{3^n}{2^n+n}$, o raio de convergência da série vem dado por

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{2^{n+1} + n + 1}{3(2^n + n)} = \frac{2}{3}.$$

Fazendo $x = \frac{2}{3}$, obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+n}$, cujo termo geral não converge para 0 e portanto é divergente; o mesmo se passa para $x = -\frac{2}{3}$. Assim,
se $x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$, a série é absolutamente convergente; se $x \in]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[$, a série é divergente.

7. Seja $g \in C(\mathbb{R})$ uma função periódica de período $T > 0$ (i.e., $g(x + T) = g(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$).
(2,5) Mostre que a função

$$\varphi(x) = \int_0^x g(t)dt$$

é periódica de período T se e só se $\int_0^T g(t)dt = 0$.
Resolução: Se g é função periódica de período T, então

$$g(0) = g(T) \Leftrightarrow 0 = \int_0^T g(t)dt.$$

Reciprocamente, supondo que $\int_0^T g(t)dt = 0$, tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x+T) = \int_0^{x+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt + \int_T^{x+T} g(t)dt = \int_T^{x+T} g(t)dt = \int_0^x g(s+T)ds = \int_0^x g(s)ds = \varphi(x),$$

o que mostra que a função φ é periódica de período T.