Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste/2º Teste/Exame (v. B)
30 de Junho de 2014

LEIC-A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º Teste

(2,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 16}{|3 - x|} < 0 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{-x} \leq 2 \right\}, \qquad C = A \cap B.$$

(a) Mostre que $C = [-\log 2, 3[\cup]3, 4[$.

(b) Determine, caso existam, $\inf C$, $\min C$, $\sup C$, $\max C$.

(c) Decida quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

i. Existe uma sucessão (x_n) de termos em C que converge para 3.

ii. Toda a sucessão de termos em C tem pelo menos um sublimite.

iii. Se (y_n) é uma sucessão estritamente crescente de termos em C, então $\lim y_n = 4$.

(1,5) **II.** Considere uma sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = 3 + \frac{a_n}{5}, \quad \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que $a_n \leq 4$ para todo o $n \geq 1$.

(b) Mostre que (a_n) é uma sucessão crescente.

(c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(1,5) **III.** Determine , ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites de cada uma das sucessões seguintes:

(a) $\lim \dfrac{n(2 + 3n^2)}{1 - n^3}$, (b) $\lim \dfrac{3^n - n!}{1 + 2n! + n^3}$, (c) $\lim \dfrac{1 + \operatorname{sen}^4 n}{n^4}$.

(3,5) **IV.** Considere uma função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ verificando:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \log \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Decida se f é ou não prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

(c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

(d) Determine os intervalos de monotonia de f e pontos de extremo, caso existam.

(e) Determine o contradomínio de f.

(1,5) **V.** Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim \frac{n^2}{a_n} = 3$. Indique, justificando, o valor de $\lim \sqrt[n]{a_n}$.

2º Teste

(1,5) **I.** Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^3}-1)\,dt}{x^4}.$$

(1,5) **II.** Calcule:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{4+x^4}\,dx.$$

(2,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } 1-x^2 \le y \le 1+\log(x+1)\}.$$

(2,5) **IV.** 1. Classifique quanto a convergência absoluta, convergência simples e divergência as séries

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n e^{-2n}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n^2}{n^2+1}.$$

2. Considere a função h definida pela série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{arctg} n) x^{2n+1}$$

nos pontos onde a série converge.

a) Determine o domínio de h.

b) Calcule $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx$.

(2,5) **V.** 1. Seja f uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e considere

$$\phi(x) = \int_0^x e^{3x-3t} f(t)\,dt.$$

Mostre que, para todo o $x\in\mathbb{R}$, se tem

$$\phi'(x) = 3\phi(x) + f(x)$$

2. Seja $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $0 < g(x) \le 1$, para todo o $x \ge 0$. Considere a função ψ definida em $[0,+\infty[$ por

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{1+t^2}\,dt.$$

Justifique que o contradomínio de ψ é um intervalo da forma $[0,\alpha[$ em que $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$.