Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (v. A)
12 de Abril de 2014

LEIC-A

Solução da prova

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1}{e^x - 1} \right| > \frac{1}{2} \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq \frac{1}{2} \right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A, B e C, mostrando em particular que

$$A =]-\infty, 0[\cup]0, \log 3[\qquad \text{e} \qquad C \subset \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

Relativamente a A:

$$\left| \frac{1}{e^x - 1} \right| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (e^x - 1 \neq 0 \ \wedge \ |e^x - 1| < 2) \Leftrightarrow (x \neq 0 \ \wedge \ -1 < e^x < 3)$$
$$\Leftrightarrow (x \neq 0 \ \wedge \ x < \log 3) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]0, \log 3[\,.$$

Relativamente a B e a C

$$x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

donde

$$B = \mathbb{Q} \cap \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$
$$C = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], x \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[, x \neq 0 \right\}$$

em que na última igualdade se usou o facto de $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\inf B$ e $\max C$.

Como A não é minorado não existe em $\mathbb{R}$ o $\inf A$ (em $\overline{R}$ seria $-\infty$). Temos $\sup A = \log 3$. Como $\log 3 \notin A$ não existe $\max A$. $\inf B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sup C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $\sup C \notin C$ não existe $\max C$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão estritamente decrescente de termos em A tem limite negativo.

Falsa. A sucessão de termo geral $-n$ é estritamente decrescente e de termos em A mas o seu limite é $-\infty$ e não um número real negativo.

(ii) Qualquer sucessão (a_n) convergente e de termos em A que verifica $a_n a_{n+1} < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ tem necessariamente limite 0.

Verdadeira. Se uma tal sucessão tivesse um limite $c \neq 0$, da definição de limite estabeleceríamos que existiria uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão estariam em $V_{|c|}(c)$ e portanto, a partir dessa mesma ordem, $a_n a_{n+1} > 0$.

(iii) Toda a função definida e contínua em C tem máximo.

Falsa. Considere-se, por exemplo, $f(x) = x$ que restrita a C é obviamente contínua com $\sup f = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mas que não assume este valor e portanto não possui máximo. Outro tipo de exemplo, que permite chegar à conclusão, seria $g(x) = \frac{1}{x}$ que é contínua em C mas verifica $\sup g = +\infty = \lim_{x\to 0^+} g(x)$.

(4,0) **II.** Considere uma sucessão (a_n) dada por

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_n^{3/2}}{2}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $a_n \in [0,1]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

Usamos o método de indução. A afirmação é trivialmente verdadeira para $n = 1$. Suponha-se que $a_n \in [0,1]$. Então $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^{3/2}}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1$ e $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^{3/2}}{2} \geq \frac{0+0}{2} = 0$ o que permite concluir a demonstração por indução.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

Como para $x \in [0,1]$ temos $x^{3/2} \leq x$, obtemos $a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^{3/2}}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$ para todo o n.

c) Justifique que (a_n) é uma sucessão convergente e calcule o valor de $\lim a_n$.

Como (a_n) é uma sucessão monótona limitada, podemos concluir que é convergente. Mas então, passando ao limite em ambos lados da igualdade que define a sucessão por recorrência, obtemos

$$\lim a_n = \frac{\lim a_n + \lim a_n^{3/2}}{2} \Leftrightarrow \lim a_n = \lim a_n^{3/2} \Leftrightarrow (\lim a_n = 0 \ \vee \ \lim a_n = 1).$$

Como a sucessão é decrescente e $a_1 = \frac{1}{2}$ podemos concluir que $\lim a_n = 0$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\text{a)} \lim \sqrt[n]{n^n + 1} \qquad \text{b)} \lim \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right)^n \qquad \text{c)} \lim (-1)^{3n} \frac{1+n^2}{3n^3 - 1}$$

a) $\sqrt[n]{n^n + 1} \geq \sqrt[n]{n^n} = n \to +\infty$ pelo que o limite é $+\infty$.

b) $|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donde $\lim \left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right)\right)^n = 0$.

c) $\lim (-1)^{3n} \frac{1+n^2}{3n^3-1} = \lim (-1)^{3n} \frac{\frac{1}{n^2}+1}{3n - \frac{1}{n^2}} = 0$.

(5) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x, & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule ou mostre que não existe, cada um dos limites,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Para $n \in \mathbb{N}$ temos $f(-n\pi) = 0 \to 0$ e $f(-2n\pi - \pi/2) = 2n\pi + \pi/2 \to +\infty$ pelo que não existe $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

em que se usou a regra de Cauchy.

b) Calcule $f'(x)$ em cada um dos pontos em que f for diferenciável. Em particular estude cuidadosamente se a derivada $f'(0)$ existe e é finita.

[Note-se que as expressões definindo f para $x \leq 0$ e para $x \geq 0$ são coerentes para $x = 0$, com $f(0) = 0$.]
Notamos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x) &= x\cos x + x \operatorname{sen} x,\\ \frac{d}{dx}(x^2e^{-x}) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}.\end{aligned}$$

Isto permite afirmar que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} x\cos x + \operatorname{sen} x, & \text{se } x < 0,\\ 2xe^{-x} - x^2e^{-x}, & \text{se } x > 0,\end{cases}\\ f'_d(0) &= (2xe^{-x} - x^2e^{-x})|_{x=0} = 0,\\ f'_e(0) &= (x\cos x + \operatorname{sen} x)|_{x=0} = 0.\end{aligned}$$

pelo que também podemos dizer que f é diferenciável em 0 com $f'(0) = 0$.

c) Determine e classifique todos os pontos de extremo local ou absoluto da restrição de f ao intervalo $[0, +\infty[$.

Como $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$, imediatamente concluídos que f restringida a $[0, +\infty[$ tem um mínimo absoluto em $x = 0$. Dado f ser diferenciável em $]0, +\infty[$ outros pontos de extremo local terão que ser pontos de estacionaridade de f, isto é deverão verificar $f'(x) = 0$. Ora

$$f'(x) = 0, x > 0 \;\Leftrightarrow\; 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0, x > 0.$$

Como $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$ o único ponto nestas condições é $x = 2$. A expressão que obtivemos para f' mostra também que $f'(x) > 0$ se $x \in]0, 2[$ e $f'(x) < 0$ se $x > 2$ pelo que se trata de um ponto de máximo absoluto da restrição de f a $[0, +\infty[$.

d) Justifique que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o intervalo $]-(n + 1)\pi, -n\pi[$ contém um ponto de extremo local de f.

Para n par (resp. ímpar) f é positiva (resp. negativa) em $]-(n+1)\pi, -n\pi[$ e $f(-(n + 1)\pi) = f(-n\pi) = 0$. Pelo teorema de Weierstrass aplicado à restrição de f a $[-(n+1)\pi, -n\pi]$ a função terá neste intervalo pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo. Um tal ponto de máximo (resp. mínimo) terá que ocorrer no intervalo $]-(n+1)\pi, -n\pi[$ e portanto também será um ponto de máximo (resp. mínimo) local de f.

(2) **V.** Seja $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = x\}$ é ilimitado. Mostre que, se existir $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$, então $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 1$.

Como $\{x \in \mathbb{R} : g(x) = x\}$ é ilimitado existe uma sucessão estritamente crescente (x_n) de pontos verificando $g(x_n) = x_n$ com $\lim x_n = +\infty$. Aplicando o teorema de Lagrange a g em cada intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ obtemos que existe $y_n \in \,]x_n, x_{n+1}[$ tal que $g'(y_n) = \frac{g(x_{n+1})-g(x_n)}{x_{n+1}-x_n} = 1$. Podemos concluir, pois a hipótese de existência de $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ obriga a $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim g'(y_n) = 1$.