
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule:

a) $\int_{-1}^1 t \cos t \, dt$, b) $\int_1^2 \frac{2t}{(t^2 + 1)^5} \, dt$, c) $\int_0^1 \frac{1}{(t + 1)(t^2 + 1)} \, dt$.

(3,0) **II.** Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}$.

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada definida por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x+1} - 1 \leq y \leq \log x \text{ e } x \leq 2\}.$$

(5,0) **IV.** 1. Classifique quanto a convergência absoluta, convergência simples e divergência as séries

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^{3/2}}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + 1}$, c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$.

2. Considere a função φ definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n + 1)!(n + 1)^2}$$

nos pontos onde a série converge.

a) Determine o domínio de φ .

b) Justifique que φ é diferenciável e obtenha a respectiva série de potências.

(5,0) **V.** 1. Considere a função $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_{\sqrt{\log x}}^x e^{-t^2} \, dt.$$

Justifique que f é diferenciável e obtenha uma expressão para f' .

2. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $0 < g(x) \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere uma função real de variável real ψ definida por

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{1 + t^2} \, dt.$$

Justifique que o contradomínio de ψ é um intervalo da forma $]\alpha, \beta[$ em que $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.