Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (v. B)

9 de Junho de 2014

LEIC-A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\cos(2t)\,dt,$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t}{(t^2+1)^7}\,dt,$ c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt.$

(3,0) **II.** Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\cos x)^2}{x^2},$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^2},$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}.$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e^{-x+1}-1 \le y \le x^3-1 \text{ e } x\le 2\}.$$

(5,0) **IV.** 1. Classifique quanto a convergência absoluta, convergência simples e divergência as séries

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}},$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{e^n+1},$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n}.$

2. Considere a função φ definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!(n+1)}$$

nos pontos onde a série converge.

a) Determine o domínio de φ.

b) Justifique que φ é diferenciável e obtenha a respectiva série de potências.

(5,0) **V.** 1. Considere a função $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_{\log x}^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Justifique que f é diferenciável e obtenha uma expressão para f'.

2. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua verificando $0 < g(x) \le 1$ para todo o $x\in\mathbb{R}$. Considere uma função real de variável real ψ definida por

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{1+t^2}\,dt.$$

Justifique que o contradomínio de ψ é um intervalo da forma $]\alpha,\beta[$ em que $-\frac{\pi}{2} \le \alpha < 0 < \beta \le \frac{\pi}{2}$.