Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (v. B)

9 de Junho de 2014

LEIC-A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\cos(2t)\,dt$, b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2t}{(t^2+1)^7}\,dt$, c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt$.

a)

$$\int_{-1}^{1} t\cos(2t)\,dt = \left[\frac{t\,\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\,dt$$
$$= \frac{\mathrm{sen}\,2}{2} + \frac{\mathrm{sen}(-2)}{2} + \left[\frac{\cos(2t)}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{\cos 2}{4} - \frac{\cos(-2)}{4} = 0.$$

ou, em alternativa, podemos reconhecer que a função integranda é ímpar logo o integral no intervalo $[-1,1]$ é igual a 0.

b)

$$\int_{0}^{1} \frac{2t}{(t^2+1)^7}\,dt = \left[\frac{(t^2+1)^{-6}}{-6}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^6}-1\right) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^6}\right).$$

c) Atendendo à decomposição em fracções simples

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1},$$

obtemos

$$A(t^2+1) + (Bt+C)(t-1) = 1,$$

e, consequentemente, $A = 1/2, B = C = -1/2$. Então,

$$\int \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \mathrm{arctg}\,t\right)$$

Finalmente,

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \mathrm{arctg}\,t\right)\right]_{-1}^{0}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\log|-2| - \frac{1}{2}\log(2) - \mathrm{arctg}(-1)\right) = -\frac{1}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8}.$$

(3,0) **II.** Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$.

a) Dado que, para todo o $x>0$,

$$0\le\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}\le\frac{2}{x^2}$$

conluímos que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}=0$.

b) Temos uma indeterminação do tipo $0/0$; aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x}=0,$$

atendendo a que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

c) De novo, uma indeterminação do tipo $0/0$; aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}=1.$$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e^{-x+1}-1\le y\le x^3-1 \text{ e } x\le 2\}.$$

Reconhece-se que $e^{-x+1}-1\le x^3-1$ se e só se $x\ge 1$. Daí que a área da região seja dada por

$$\int_1^2 x^3-1-(e^{-x+1}-1)\,dx=\int_1^2 x^3-e^{-x+1}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+e^{-x+1}\right]\Bigg|_{x=1}^{x=2}$$
$$=\frac{2^4}{4}+e^{-2+1}-\frac{1}{4}-1=\frac{11}{4}+e^{-1}.$$

(5,0) **IV.** 1. Classifique quanto a convergência absoluta, convergência simples e divergência as séries

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^n}{e^n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n}$.

a) Como $\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}}\right|\le\frac{1}{n^{5/2}}$ e a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ é convergente concluímos, usando o critério de comparação e convergência absoluta, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}}$ é absolutamente convergente.

b) Como $\lim(-1)^n\frac{e^n}{e^n+1}$ não existe concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^n}{e^n+1}$ é divergente.

c) Como, para $n \geq 3$, temos $\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$, e a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, concluímos que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$ é divergente.
Alternativamente o resultado pode obter-se do critério do integral visto que $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\log^2 x)$.

2. Considere a função φ definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!(n+1)}$$

nos pontos onde a série converge.

a) Determine o domínio de φ.

Escrevendo a série de potências na forma $x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ com $a_n = \frac{1}{(2n)!(n+1)}$ verificamos

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)(n+2)}{n+1} = +\infty$$

pelo que a série de potências tem raio de convergência $+\infty$. Sendo assim o domínio da função φ é $\mathbb{R}$.

b) Justifique que φ é diferenciável e obtenha a respectiva série de potências.

Sabemos que uma série de potências é diferenciável no intervalo $]-R, R[$ em que R é o raio de convergência podendo a diferenciação efectuar-se derivando a série termo a termo. Daí que

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

(5,0) **V.** 1. Considere a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_{\log x}^{x^2} e^{-t^2}\, dt.$$

Justifique que f é diferenciável e obtenha uma expressão para f'.

O teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta permitem obter que f é diferenciável em $]0, +\infty[$ com

$$f'(x) = 2xe^{-x^4} - \frac{1}{x}e^{-\log^2 x}.$$

2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $0 < g(x) \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere uma função real de variável real ψ definida por

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{1+t^2}\,dt.$$

Justifique que o contradomínio de ψ é um intervalo da forma $]\alpha, \beta[$ em que $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

O integral indefinido é uma função contínua pelo que o teorema do valor intermédio implica que o contradomínio é um intervalo. Do Teorema Fundamental, tem-se

$$\psi'(x) = \frac{g(x)}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $g > 0$, vem $\psi' > 0$, logo ψ é uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$ com $\psi(0) = 0$. Então, existem

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \beta \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \psi(x) = \alpha.$$

Tem-se, assim, $\psi(\mathbb{R}) =]\alpha, \beta[$ onde $\alpha < 0 < \beta$.
Usando a estimativa para g obtém-se

$$|\psi(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dx \right| = |\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{2}$$

e daí $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.