Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Civil, Informática, Mecânica e Território
6 de Fevereiro de 1998
Duração: 3 horas
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

I (6 val.) – Seja $h \in \mathbf{R}$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & h-2 & -2 \\ 1 & -h & h+1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a característica e nulidade da matriz A em função do parâmetro real h. Para $h = 1$, determine uma base para o núcleo de A.

(b) Para $h = 1$, determine a solução geral da equação $A(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) Para $h = 2$, justifique que A é invertível e calcule a sua inversa.

(d) Para $h = 2$, justifique que as colunas de A formam uma base de $\mathbf{R}^3$ e calcule as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ nesse base.

II (6 val.) – Considere o espaço euclidiano $\mathbf{R}^3$ munido do produto interno usual, e seja S o subconjunto de $\mathbf{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\}.$$

(a) Mostre que S é um subespaço linear de $\mathbf{R}^3$.

(b) Determine bases ortonormadas para S e $S^\perp$.

(c) Seja $P_{S^\perp} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a projecção ortogonal de $\mathbf{R}^3$ sobre $S^\perp$. Calcule a matriz B que representa $P_{S^\perp}$ em relação à base canónica de $\mathbf{R}^3$.

(d) Determine uma matriz de mudança de base R e uma matriz diagonal Λ tais que

$$R^{-1}BR = \Lambda.$$

VIRE, SE FAZ FAVOR

III (5 val.) – Seja $\mathcal{M}_2$ o espaço linear real das matrizes 2×2 com entradas reais. Considere a função $T : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ dada por

$$T(A) = A^{\mathrm{t}} - \mathrm{tr}(A)I,$$

onde A^{t} é a transposta de A, $I = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, e $\mathrm{tr}(A)$ é o traço de A.

(a) Mostre que T é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base de $\mathcal{M}_2$ dada por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Sejam $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{M}_2$ o subespaço das matrizes simétricas 2×2, i.e.

$$\mathcal{S}_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 : A = A^{\mathrm{t}}\},$$

e $\mathcal{A}_2$ o subespaço das matrizes anti-simétricas 2×2, i.e.

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{M}_2 : A^{\mathrm{t}} = -A\}.$$

Mostre que $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{A}_2$ são subespaços invariantes de T, ou seja, $T(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{S}_2$ e $T(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_2$.

(c) Calcule os valores próprios e vectores próprios de T.

(d) T é diagonalizável? Justifique.

IV (3 val.) – Sejam V um espaço euclidiano real de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$, e $F : V \to V$ uma transformação linear ortogonal, isto é

$$\langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \ \forall u, v \in V.$$

(a) Mostre que $\mathcal{N}(F) = \{0\}$.

(b) Justifique que F é invertível e mostre que F^{-1} também é ortogonal.

(c) Mostre que se λ é um valor próprio real de F então $\lambda = \pm 1$.

(d) Dê um exemplo de um espaço euclidiano V e de uma transformação linear ortogonal $F : V \to V$ sem valores próprios reais.