Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Informática

22 de Janeiro de 1999 — Duração: 3 horas

1 – (6 valores) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e a imagem $\mathcal{I}(T)$ de T, indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Determine a solução geral $u \in \mathbb{R}^3$ do sistema $T(u) = T(u_0)$, com $u_0 = (1, 2, 3)^t$.

(c) Sejam $v_1 = (1, 0, 1)^t$, $v_2 = (-1, 1, -1)^t$ e $v_3 = (2, -1, 1)^t$. Mostre que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e determine a representação matricial de T na base $\mathcal{B}$.

(d) Quais os valores e vectores próprios de T ? Justifique.

2 – (6 valores) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \ \text{ e } \ z = y\},$$

e $p_\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por $p_\alpha(X, Y) = X^t A_\alpha Y$, com $X = (x_1, x_2, x_3)^t, Y = (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ e

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que S é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ e determine a sua dimensão e uma base.

(b) Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ é que p_α define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Nas alíneas seguintes considere $\alpha = 0$ e o produto interno definido em $\mathbb{R}^3$ por $\langle X, Y \rangle = p_0(X, Y) = X^t Y \equiv$ produto interno usual.

(c) Determine uma base ortonormada para $S^\perp \equiv$ complemento ortogonal de S.

(d) Calcule a distância do vector $(-1, 3, 2)$ ao subespaço S.

3 – (5 valores) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, e seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação definida por

$$T(p(t)) = (t^2 - 1)p''(t) + 2tp'(t) \ ,$$

onde $p'(t)$ e $p''(t)$ denotam as primeira e segunda derivadas do polinómio $p(t)$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base usual de $\mathcal{P}_2$:
$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\} \ .$$

(b) Calcule os valores e vectores próprios de T.

(c) T é invertível ? E diagonalizável ? Justifique.

(d) Determine todas as soluções da equação linear $T(p(t)) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ denota o polinómio constante igual a c.

4 – (3 valores) Seja V um espaço vectorial e $J : V \to V$ uma transformação linear tal que $J^2 = -I$, onde $J^2 \equiv J \circ J$ e $I \equiv$ identidade. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ defina $T_\lambda : V \to V$ por $T_\lambda = J - \lambda I$.

(a) Mostre que J não tem valores próprios reais.

(b) Conclua que a transformação linear $T_\lambda = J - \lambda I$ é invertível para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Dados $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$ calcule $T_\lambda \circ T_\sigma$ e com base na expressão obtida determine $(T_\lambda)^{-1}$.