

2º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR  
CURSO: Informática

8 de Fevereiro de 1999

Duração: 3 horas

I – (6 valores)

1 Seja  $h \in \mathbb{R}$  e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & h & -1 \\ 1 & h-2 & h+2 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a característica e nulidade da matriz  $A$  em função do parâmetro real  $h$ . Para  $h = 1$ , determine o núcleo de  $A$  indicando a sua dimensão e uma base.
- (b) Para  $h = 2$ , justifique que as colunas de  $A$  formam uma base de  $\mathbb{R}^3$  e calcule as coordenadas do vector  $(1, 1, 3)^t$  nessa base.

2

- (a) Escreva os números complexos  $\frac{i}{1+i}$  e  $(\sqrt{3} + i)^6$  na forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (b) Determine todas as soluções da equação  $z^4 + 1 = 0$ .

II – (6 valores)

Seja  $S$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$S = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\},$$

e  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a forma bilinear definida por  $\langle X, Y \rangle = X^t A Y$ , com  $X = (x_1, x_2, x_3)^t$ ,  $Y = (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^3$  e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que  $S$  é um subespaço linear de  $\mathbb{R}^3$  e determine a sua dimensão e uma base.
- (b) Verifique que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  define um produto interno em  $\mathbb{R}^3$  e determine uma base ortogonal para  $S$  em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- (c) Determine, em relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , o ponto de  $S$  mais próximo de  $(1, 0, 1)^t$ .
- (d) Determine uma base ortonormada para  $S^\perp \equiv$  complemento ortogonal de  $S$  em relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**III** – (5 valores)

Seja  $\mathcal{M}_2$  o espaço linear real das matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais. Considere a função  $T : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2$  dada por

$$T(A) = JAJ + A ,$$

onde  $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Mostre que  $T$  é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base de  $\mathcal{M}_2$  dada por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (b) Seja  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_2$  o subespaço das matrizes simétricas  $2 \times 2$  com traço nulo, i.e.

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_2 : A = A^t \text{ e } \text{tr}(A) = 0\} .$$

Mostre que a restrição de  $T$  a  $\mathcal{S}$  é duas vezes a identidade, i.e.

$$T(A) = 2A , \forall A \in \mathcal{S}$$

- (c) Calcule os valores próprios e vectores próprios de  $T$ .
- (d)  $T$  é invertível ? E diagonalizável? Justifique.

**IV** – (3 valores)

Seja  $A$  uma matriz real ( $n \times n$ ).

- (a) Mostre que se  $\lambda \in \mathbb{R}$  é valor próprio de  $A$  então  $\lambda^2$  é valor próprio de  $A^2$ .
- (b) Mostre que todos os valores próprios do produto  $A^t \cdot A$  são reais e maiores ou iguais a zero.
- (c) Conclua, com base nas duas alíneas anteriores, que uma matriz  $A$  anti-simétrica (i.e.  $A^t = -A$ ) é diagonalizável (sobre os números reais) se e só se é a matriz nula.