Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Informática

8 de Fevereiro de 1999 Duração: 3 horas

I – (6 valores)

1 Seja $h \in \mathbb{R}$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & h & -1 \\ 1 & h-2 & h+2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a característica e nulidade da matriz A em função do parâmetro real h. Para $h = 1$, determine o núcleo de A indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Para $h = 2$, justifique que as colunas de A formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e calcule as coordenadas do vector $(1, 1, 3)^t$ nessa base.

2

(a) Escreva os números complexos $\frac{i}{1+i}$ e $(\sqrt{3} + i)^6$ na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Determine todas as soluções da equação $z^4 + 1 = 0$.

II – (6 valores)

Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\},$$

e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por $\langle X, Y \rangle = X^t A Y$, com $X = (x_1, x_2, x_3)^t$, $Y = (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que S é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ e determine a sua dimensão e uma base.

(b) Verifique que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$ e determine uma base ortogonal para S em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(c) Determine, em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o ponto de S mais próximo de $(1, 0, 1)^t$.

(d) Determine uma base ortonormada para $S^\perp \equiv$ complemento ortogonal de S em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

III – (5 valores)

Seja $\mathcal{M}_2$ o espaço linear real das matrizes 2×2 com entradas reais. Considere a função $T : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ dada por

$$T(A) = JAJ + A \ ,$$

onde $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear e determine a sua representação matricial em relação à base de $\mathcal{M}_2$ dada por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_2$ o subespaço das matrizes simétricas 2×2 com traço nulo, i.e.

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_2 : A = A^t \text{ e } \mathrm{tr}(A) = 0\} \ .$$

Mostre que a restrição de T a $\mathcal{S}$ é duas vezes a identidade, i.e.

$$T(A) = 2A \ , \forall A \in \mathcal{S}$$

.

(c) Calcule os valores próprios e vectores próprios de T.

(d) T é invertível ? E diagonalizável? Justifique.

IV – (3 valores)

Seja A uma matriz real $(n \times n)$.

(a) Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A então λ^2 é valor próprio de A^2.

(b) Mostre que todos os valores próprios do produto $A^t \cdot A$ são reais e maiores ou iguais a zero.

(c) Conclua, com base nas duas alíneas anteriores, que uma matriz A anti-simétrica (i.e. $A^t = -A$) é diagonalizável (sobre os números reais) se e só se é a matriz nula.