Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Informática

1º TESTE – 4/XI/98 – Turma 10105 A   Duração: 50mn

1 – (4 valores)

(a) Escreva os números complexos $\frac{1}{2-i}$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)^4$ na forma $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Determine todas as soluções da equação $z^2+i=0$.

2 – (7 valores) Seja $h\in\mathbf{R}$ e considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 4 & h\end{bmatrix}$$

(a) Determine a característica e nulidade da matriz A em função do parâmetro real h. Para $h=1$, determine o núcleo de A indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Para $h=2$, justifique que A é invertível e calcule a sua inversa.

3 – (6 valores) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x+2y\}.$$

(a) Mostre que S é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a dimensão e uma base para S.

4 – (3 valores) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2. Considere o subconjunto de $\mathcal{P}_2$ definido por

$$S=\{p\in\mathcal{P}_2 : p(1)\cdot p(-1)=0\}\ .$$

(a) Mostre que S não é um subespaço linear de $\mathcal{P}_2$, mas pode ser escrito na forma $S=U\cup V$ com U e V subespaços de $\mathcal{P}_2$.

(b) Determine $\mathcal{L}(S)\equiv$ subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado por S.