Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Informática

1º TESTE – 5/XI/98 – Turma 10101/103/104 A   Duração: 50mn

1 – (4 valores)

(a) Escreva os números complexos $\frac{1}{3-i}$ e $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^6$ na forma $a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Determine todas as soluções da equação $z^3+1=0$.

2 – (7 valores) Seja $h\in\mathbf{R}$ e considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & h & 1\\ -1 & -h & 0\end{bmatrix}$$

(a) Determine a característica e nulidade da matriz A em função do parâmetro real h. Para $h=0$, determine o núcleo de A indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Para $h=1$, justifique que A é invertível e calcule a sua inversa.

3 – (6 valores) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=x-z \text{ e } x+z=0\}.$$

(a) Mostre que S é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a dimensão e uma base para S.

4 – (3 valores) Seja A uma matriz quadrada, $(n\times n)$, com entradas reais.

(a) Mostre que se A é não-singular e $A^2=A$ então $A=I$ (matriz identidade).

(b) Dê um exemplo de uma matriz real A, (2×2), tal que $A^2=A$ e $A\neq I$.