Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Informática

1º TESTE – 9/XI/98 – Turma 10102 A   Duração: 50mn

1 – (4 valores)

(a) Escreva os números complexos $\frac{1+i}{1-i}$ e $(1-i)^4$ na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Determine todas as soluções da equação $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2 – (7 valores) Seja $h \in \mathbf{R}$ e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & h \\ -1 & h+2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a característica e nulidade da matriz A em função do parâmetro real h. Para $h = 0$, determine o núcleo de A indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Para $h = 1$, justifique que A é invertível e calcule a sua inversa.

3 – (6 valores) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - y \text{ e } x = 2y - z\}.$$

(a) Mostre que S é um subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a dimensão e uma base para S.

4 – (3 valores)

(a) Seja A uma matriz quadrada, $(n \times n)$, com entradas reais, tal que $A^2 + I = \mathbf{0}$, onde I é a matriz identidade e $\mathbf{0}$ a matriz nula. Mostre que A é não-singular e determine a sua inversa.

(b) Dê um exemplo de uma matriz real A, (2×2), satisfazendo as condições da alínea anterior.