Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSO: Informática

2º TESTE – 10/XII/98 – Turma 10106/07/08/09 A   Duração: 50mn

1 – (6 valores) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x - z, 2y, -x + 4y + z) \ .$$

(a) Calcule a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, e determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T, indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Determine todas as soluções de $T(u) = (0, 1, 2)$.

2 – (6 valores) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \ .$$

(a) Determine uma base ortonormada para S.

(b) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma a que o vector $(1, -1, \alpha)$ pertença a $S^\perp$.

3 – (6 valores) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, e seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$T(p(t)) = (p(0), p(1)) \ .$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T.

4 – (2 valores) Seja V um espaço vectorial e $P : V \to V$ uma transformação linear tal que $P^2 = P$. Mostre que $\mathcal{N}(P) = \mathcal{I}(I - P)$, onde $I : V \to V$ é a transformação identidade.