Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Informática

$2^{\underline{o}}$ TESTE – 10/XII/98 – Turma 10101/03/04 A   Duração: 50mn

1 – (6 valores) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + z, y, x)$.

(a) Calcule a matriz S que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, e determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T.

(b) Seja $v_1 = T(e_1)$, $v_2 = T(e_2)$ e $v_3 = T(e_3)$, onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e determine as coordenadas de $v = (2, -1, 1)$ na base $\mathcal{B}$.

2 – (6 valores) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado pelo vector $(1, 0, 1)$

(a) Determine uma base ortonormada para $S^\perp$.

(b) Calcule a distância do vector $(1, 1, -1)$ ao subespaço S.

3 – (6 valores) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, e seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação definida por

$$T(p(t)) = p(t) + p(-t) \ .$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine a imagem $\mathcal{I}(T)$ de T.

4 – (2 valores) Seja V um espaço vectorial e $P : V \to V$ uma transformação linear tal que $P^2 = P$. Mostre que $\mathcal{I}(P) = \mathcal{N}(I - P)$, onde $I : V \to V$ é a transformação identidade.