Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSO: Informática

$2^{\underline{o}}$ TESTE – 14/XII/98 – Turma 10102 A   Duração: 50mn

1 – (6 valores) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x + y, -x - y)$$

.

(a) Calcule a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, e determine a imagem $\mathcal{I}(T)$ de T indicando a sua dimensão e uma base.

(b) Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (1, 3)$ dois vectores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e determine a matriz B que representa T na base $\mathcal{B}$.

2 – (6 valores) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado pelos vectores $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

(a) Determine bases ortonormadas para S e $S^{\perp}$.

(b) Determine o ponto de S mais próximo de $(1, 1, 1)$.

3 – (6 valores) Seja $\mathcal{M}_2$ o espaço linear das matrizes reais (2×2) e seja $T : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ a aplicação definida por

$$T(A) = AP - PA \ ,$$

onde $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T.

4 – (2 valores) Seja V um espaço vectorial e $R, S : V \to V$ duas transformações lineares tais que $RS = SR$. Mostre que $R(\mathcal{N}(S)) \subset \mathcal{N}(S)$, i.e. $u \in \mathcal{N}(S) \Rightarrow R(u) \in \mathcal{N}(S)$, e que $R(\mathcal{I}(S)) \subset \mathcal{I}(S)$, i.e. $u \in \mathcal{I}(S) \Rightarrow R(u) \in \mathcal{I}(S)$.