AULAS TEÓRICAS DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
1^o SEMESTRE 2005/06 – LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE

MIGUEL ABREU

1. Aula – 26 de Setembro de 2005

Apresentação. Professores das aulas teóricas: Miguel Abreu (responsável) <mabreu@math.ist.utl.pt> e Rui Loja Fernandes <rfern@math.ist.utl.pt>

Página da cadeira. http://www.math.ist.utl.pt/∼mabreu/AMI
Contém toda a informação relevante: programa, fichas de exercícios, testes e exames anteriores, turmas práticas, etc. Deve ser consultada regularmente.

Bibliografia.

- T.M. Apostol, *Cálculo*, Volumes I e II, Reverté, 1994. (Nota: o volume I é a referência principal para esta cadeira.)
- J. Campos Ferreira, *Elementos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos*, DMIST, 2001.
- J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Gulbenkian, 1995.
- *Exercícios de Análise Matemática I e II* – Departamento de Matemática, IST Press, 2003.
- *Fichas de Exercícios*, Miguel Abreu, DMIST, 2003.

Horário de Dúvidas. Professor Miguel Abreu: segunda-feira das 14.30 às 16.00 e quarta-feira das 10.00 às 11.00, no seu gabinete (2-N4.8). Professor Rui Loja Fernandes: quarta-feira das 14.00 às 16.00 e sexta-feira das 14.30 às 16.00, no seu gabinete (2-N4.4). Sempre que o número de alunos presentes o justifique, as aulas de dúvidas terão lugar na sala de dúvidas (2-N2.2).

Avaliação – alunos(as) em 1^a, 2^a ou 3^a inscrição. Mini-testes (50%) + Exame (50%).
Há 5 mini-testes escritos com a duração de 25 minutos cada. Têm lugar no final de cada aula prática das 2^a, 4^a, 6^a, 9^a e 12^a semanas efectivas de aulas (o primeiro tem assim lugar na semana de 3 a 7 de Outubro). Cada mini-teste terá uma classificação entre $0,0$ e $2,5$ valores, contando os 4 melhores. Nota mínima nos mini-testes é $5,0$ em $10,0$ valores. **Alunos têm que frequentar turma prática em que estão inscritos.**

Há duas datas de exame final escrito, marcadas para 9 e 23 de Janeiro de 2006 às 9.00, tendo cada um a duração de 2 horas. Cada exame terá uma classificação entre $0,0$ e $10,0$ valores, contando o melhor dos dois. Nota mínima no exame é $4,0$ em $10,0$ valores.

A nota final mínima para aprovação na cadeira é $9,5$ em $20,0$ valores.

Avaliação – alunos(as) em 4^a ou mais inscrição. Exame (100% da Nota Final)
Há duas datas de exame final escrito, marcadas para 9 e 23 de Janeiro de 2006 às 9.00, tendo cada um a duração de 3 horas. Cada exame terá uma classificação entre $0,0$ e $20,0$ valores, contando o melhor dos dois. Nota mínima para aprovação na cadeira é $9,5$ em $20,0$ valores.

Avaliação – alunos(as) com nota final superior a 17. Prova Oral
Qualquer aluno com nota final igual ou superior a 17,5 deverá apresentar-se para fazer uma prova oral. Se não o fizer a sua nota final na cadeira será de 17.

Importante. Esqueçam máquinas de calcular.

Date: 21 de Dezembro de 2005.

Axiomática dos Numeros Reais ($\mathbb{R}$). Caracterização dos números reais a partir das suas propriedades mais básicas.

Admitimos a existência de um conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos designamos por *números reais*, no qual supomos definidas duas operações:

- a *adição* $(+)$, que a cada dois números reais $a, b \in \mathbb{R}$ faz corresponder um terceiro número real designado por soma e representado por $a + b \in \mathbb{R}$;
- a *multiplicação* $(\cdot)$, que a cada dois números reais $a, b \in \mathbb{R}$ faz corresponder um terceiro número real designado por produto e representado por $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$, $+$ e $\cdot$ são exemplo do que se designa por *termos primitivos* de uma axiomática, i.e. conceitos cuja existência se assume sem definição. A axiomática dos números reais contém ainda mais um termo primitivo que será introduzido na próxima aula.

As propriedades/proposições que, sem demonstração, se admitem como verdadeiras para os termos primitivos são designadas por *axiomas*. Na axiomática dos números reais os axiomas estão divididos em 3 grupos:

(i) *Axiomas de Corpo* (hoje);
(ii) *Axiomas de Ordem* (próxima aula);
(iii) *Axioma de Supremo* (próxima semana).

Axiomas de Corpo. São cinco os axiomas de corpo.

Axioma 1. (comutatividade de $+$ e $\cdot$)

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a \quad e \quad a \cdot b = b \cdot a \ .$$

Axioma 2. (associatividade de $+$ e $\cdot$)

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad e \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ .$$

Axioma 3. (distributividade)

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ .$$

Axioma 4. (elementos neutros)

$$\exists\, 0 \in \mathbb{R} \ : \quad a + 0 = 0 + a = a \text{ para qualquer } a \in \mathbb{R} \,.$$
$$\exists\, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ para qualquer } a \in \mathbb{R} \,.$$

Axioma 5. (simétricos e inversos)
$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \ : \quad a + b = 0$. *Um elemento b com esta propriedade é designado por* simétrico *de a. Veremos que é único e será representado por $-a$.*
$\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists\, c \in \mathbb{R} \ : \quad a \cdot c = 1$. *Um elemento c com esta propriedade é designado por* inverso *de a. Veremos que é único e será representado por a^{-1}.*

Exemplo 1.1. O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais satisfaz os Axiomas 1- 3. O conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ também satisfaz o Axioma 4. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais satisfaz todos estes 5 axiomas. Voltaremos com mais detalhe a estes conjuntos bem vossos conhecidos.

Primeiros Teoremas. Designam-se por *Teoremas* as propriedades/proposições que se demonstram a partir dos axiomas e outros teoremas (previamente demonstrados), usando as regras básicas da lógica matemática. Vejamos alguns exemplos simples.

Teorema 1.2. (Unicidade dos Elementos Neutros) *Os números 0 e 1 são os únicos reais que satisfazem as propriedades do Axioma 4.*

Dem. Suponhamos que $0' \in \mathbb{R}$ também satisfaz a propriedade do elemento neutro para a adição, i.e. $0' + a = a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$0' = 0' + 0 = 0 \,,$$

onde a igualdade da esquerda (resp. direita) é consequência de 0 (resp. $0'$) ser elemento neutro da adição. Concluimos então que

$$0' = 0 \,,$$

pelo que o elemento da adição é único.

A demonstração de unicidade para o elemento neutro da multiplicação é inteiramente análoga. □

Teorema 1.3. (Unicidade de Simétricos e Inversos) *O simétrico $-a$ de qualquer $a \in \mathbb{R}$ e o inverso a^{-1} de qualquer $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são os únicos reais que satisfazem as propriedades especificadas no Axioma 5.*

Dem. Dado $a \in \mathbb{R}$, suponhamos que $a' \in \mathbb{R}$ também satisfaz a propriedade do simétrico de a, i.e. $a + a' = 0$. Podemos então considerar a seguinte sequência válida de implicações:

$$\begin{aligned}
& a + a' = 0 && \\
\Rightarrow\ & (-a) + (a + a') = (-a) + 0 && \text{(Ax. 5 determina } (-a)) \\
\Rightarrow\ & ((-a) + a) + a' = (-a) + 0 && \text{(Ax. 2 - associatividade)} \\
\Rightarrow\ & 0 + a' = (-a) + 0 && \text{(Ax. 5 – propriedade do simétrico)} \\
\Rightarrow\ & a' = -a && \text{(Ax. 4 – 0 é neutro para } +)
\end{aligned}$$

Fica assim demonstrada a unicidade do simétrico.

A demonstração de unicidade do inverso é inteiramente análoga. □

Teorema 1.4. (Lei do Corte para a Adição – Ficha 1, 1.(a)) *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a + b = a + c$ então $b = c$. (I.e. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\,,\ a + b = a + c \Rightarrow b = c\,.$)*

Dem. É válida a seguinte sequência de implicações:

$$\begin{aligned}
& a + b = a + c && \text{(hipótese do teorema)} \\
\Rightarrow\ & (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) && \text{(Ax. 5 determina } (-a)) \\
\Rightarrow\ & ((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c && \text{(Ax. 2 - associatividade)} \\
\Rightarrow\ & 0 + b = 0 + c && \text{(Ax. 5 – propriedade do simétrico)} \\
\Rightarrow\ & b = c && \text{(Ax. 4 – 0 é neutro para } +)
\end{aligned}$$

□

Exercício 1.5. (Lei do Corte para a Multiplicação – Ficha 1, 1.(i)) Demonstre ainda hoje que $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\,,\ (a \neq 0 \text{ e } a \cdot b = a \cdot c) \Rightarrow b = c$.

2. Aula – 28 de Setembro de 2005

Última Aula. Axiomáticas dos Números Reais:

- Termos Primitivos: $\mathbb{R}$, $+$ e $\cdot$.
- Axiomas de Corpo: Ax. 1 – comutatividade, Ax. 2 – associatividade, Ax. 3 – distributividade, Ax. 4 - elementos neutros e Ax. 5 – simétricos e inversos.
- Unicidade dos elementos neutros, simétricos e inversos.
- Leis do Corte.
  Teor. 1.4: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.
  Exer. 1.5: $a \neq 0$ e $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$.

Mais Teoremas.

Teorema 2.1. (Zero é Elemento Absorvente da Multiplicação – Ficha 1, 1.(g)) *Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se que*

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0\ .$$

Nota 2.2. O resultado deste teorema conjuga adição (através do seu elemento neutro 0) e multiplicação. O único axioma em que estas duas operações são relacionadas é o Axioma 3 da distributividade. Logo, é claro que este axioma terá que ser usado na demonstração do teorema, embora para que ele intervenha tenhamos que recorrer primeiro a um pequeno "truque".

Dem. Observem que usando o Axioma 4 com $a = 0$ obtemos $0 + 0 = 0$. Esta igualdade trivial é o ponto de partida para a seguinte sequência válida de implicações:

$$\begin{aligned}
& 0 + 0 = 0 && (\text{“truque”}) \\
\Rightarrow\ & (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a && (\text{multiplicação bem definida}) \\
\Rightarrow\ & 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a && (\text{Ax. 3 - distributividade}) \\
\Rightarrow\ & 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 && (\text{Ax. 4 – 0 é neutro para } +) \\
\Rightarrow\ & 0 \cdot a = 0 && (\text{Teor. 1.4 – Lei do Corte})
\end{aligned}$$

□

Exercício 2.3. Mostre que $(-1) \cdot a = -a$.

Teorema 2.4. (Subtracção – Ficha 1, 1.(c))

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \exists^1\, x \in \mathbb{R} :\ a + x = b\,.$$

Este número x é designado por diferença *entre b e a e representa-se por $b - a$.*

Dem. É necessário mostrar dois factos independentes:

(i) *Existência* do número x.
(ii) *Unicidade* do número x.

Para mostrar existência, seja $x = b + (-a)$ com $(-a)$ determinado pelo Axioma 5. Temos então que:

$$\begin{aligned}
a + x &= a + (b + (-a)) && (\text{por definição de } x) \\
&= a + ((-a) + b) && (\text{Ax. 1 – comutatividade}) \\
&= (a + (-a)) + b && (\text{Ax. 2 – associatividade}) \\
&= 0 + b && (\text{Ax. 5 – propriedade do simétrico}) \\
&= b && (\text{Ax. 4 – 0 é neutro para } +))
\end{aligned}$$

Para mostrar unicidade, sejam $x, x' \in \mathbb{R}$ tais que $a + x = b = a + x'$. Temos então que $a + x = a + x'$, donde se conclui pela Lei do Corte para a Adição (Teorema 1.4) que $x = x'$. □

Nota 2.5. A demonstração do teorema mostra que

$$b - a = b + (-a)\,.$$

Quando $b = 0$ o enunciado do Teorema 2.4 diz-nos em particular que o simétrico, cuja existência é garantida pelo Axioma 5, é único (facto que já tinhamos demonstrado na última aula - Teorema 1.3).

Exercício 2.6. (Divisão – Ficha 1, 1.(k)) Demonstre ainda hoje que

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a \neq 0\,,\ \exists^1\, x \in \mathbb{R} :\ a \cdot x = b\,.$$

Este número x é designado por *quociente* de b por a e representa-se por b/a.

Nota 2.7. A resolução do exercício mostrará que

$$b/a = b \cdot a^{-1}\,.$$

Quando $b = 1$ o enunciado do Exercício 2.6 diz-nos em particular que o inverso, cuja existência é garantida pelo Axioma 5, é único (cf. Teorema 1.3).

Teorema 2.8. (Ficha 1, 1.(m)) *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Dem. Suponhamos então que $a \cdot b = 0$. Se $a = 0$ fica concluída a demonstração. Se $a \neq 0$ podemos considerar a seguinte sequência válida de implicações:

$$\begin{aligned}
& a \cdot b = 0 && \text{(hipótese do teorema)} \\
\Rightarrow\ & a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 && \text{(como } a \neq 0\text{, Ax. 5 determina } a^{-1}\text{)} \\
\Rightarrow\ & (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 && \text{(Ax. 2 – associatividade e Teor. 2.1 – 0 é absorvente)} \\
\Rightarrow\ & 1 \cdot b = 0 && \text{(Ax. 5 – propriedade do inverso)} \\
\Rightarrow\ & b = 0\,. && \text{(Ax. 4 – 1 é neutro para } \cdot\text{)}
\end{aligned}$$

□

Nota 2.9. O Teorema 2.8 diz-nos que em $\mathbb{R}$ não existem *divisores de zero*.

Axiomas de Ordem. São dois os axiomas de ordem e referem-se ao último termo primitivo da axiomática dos números reais: o subconjunto $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$, cujos elementos se designam por *números positivos*.

Axioma 6. ($\mathbb{R}^+$ é fechado para $+$ e $\cdot$)

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad (a \cdot b) \in \mathbb{R}^+\ .$$

Axioma 7. (tricotomia)
Qualquer número real $a \in \mathbb{R}$ verifica uma e uma só da seguintes três condições:

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad ou \quad a = 0 \quad ou \quad (-a) \in \mathbb{R}^+\ .$$

Definição 2.10. (do *termo derivado* $\mathbb{R}^-$) Um número real $a \in \mathbb{R}$ diz-se *negativo* quando $(-a) \in \mathbb{R}^+$. Designa-se por $\mathbb{R}^-$ o conjunto de todos os números negativos.

Nota 2.11. O Axioma 7 da tricotomia pode também ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}^+\,,$$

onde o símbolo $\sqcup$ significa "união disjunta".

Definição 2.12. (Relações de Ordem)
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que a *é menor que* b ou que b *é maior que* a, escrevendo $a < b$ ou $b > a$, quando $(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Diremos também que a *é menor ou igual a* b ou que b *é maior ou igual a* a, escrevendo $a \leq b$ ou $b \geq a$, quando $(b - a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b = a$.

Nota 2.13. As seguintes equivalências são consequências simples (verifiquem-no!) da Definição 2.12:

$$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^-\ .$$

Propriedades das Relações de Ordem.

Teorema 2.14. (Propriedade Transitiva – Ficha 1, 2.(b))

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\ , \quad (a < b \ e\ b < c) \Rightarrow a < c\ .$$

Dem. É válida a seguinte sequência de implicações:

$$\begin{aligned}
& a < b \ \text{ e } \ b < c && \text{(hipótese do teorema)} \\
\Rightarrow\ & (b - a) \in \mathbb{R}^+ \ \text{ e } \ (c - b) \in \mathbb{R}^+ && \text{(Definição 2.12)} \\
\Rightarrow\ & ((b - a) + (c - b)) \in \mathbb{R}^+ && \text{(Ax. 6 - fecho de } \mathbb{R}^+\text{)} \\
\Rightarrow\ & (c - a) \in \mathbb{R}^+ && \text{(Ficha 1, 1.(e))} \\
\Rightarrow\ & a < c && \text{(Definição 2.12)}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.15. (Propriedades Algébricas – Ficha 1, 2.(c),(d) e (e))
Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se que:

(i) se $a < b$ então $a + c < b + c$;

(ii) *se* $a < b$ *e* $c > 0$ *então* $a \cdot c < b \cdot c$;
(iii) *se* $a < b$ *e* $c < 0$ *então* $b \cdot c < a \cdot c$.

Dem. Faremos aqui a demontração de (i), sendo (ii) e (iii) demonstrados na segunda aula prática.

Supondo que $a < b$, ou seja $(b - a) \in \mathbb{R}^+$, queremos mostrar que $(a + c) < (b + c)$, ou seja $((b + c) - (a + c)) \in \mathbb{R}^+$. Usando os Axiomas de Corpo mostra-se facilmente que

$$(b + c) - (a + c) = b - a \ ,$$

pelo que de facto

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \ .$$

□

3. Aula – 30 de Setembro de 2005

Última Aula. Axiomáticas dos Números Reais (cont.):

- Termo primitivo $\mathbb{R}^+$ e termo derivado $\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : \ (-a) \in \mathbb{R}^+\}$.
- Axiomas de Ordem: Ax. 6 – fecho de $\mathbb{R}^+$ para operações $+$ e $\cdot$, Ax. 7 – tricotomia $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}^+$.
- Relações de Ordem: $a < b$ (ou $b > a$) $\Leftrightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+$.
- Propriedades das Relações de Ordem:
  (i) $a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$ e $a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^-$.
  (ii) transitividade: $(a < b$ e $b < c) \Rightarrow a < c$.
  (iii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.
  (iv) $(a < b$ e $c > 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.
  (v) $(a < b$ e $c < 0) \Rightarrow b \cdot c < a \cdot c$.

Mais um teorema.

Teorema 3.1. (Ficha 1, 2.(g))

$$0 < 1 \ .$$

Nota 3.2. Uma outra maneira de enunciar este teorema é "o elemento neutro da adição é menor do que o elemento neutro da multiplicação". Talvez com este enunciado seja mais fácil perceberem que o resultado não é uma completa trivialidade e requer de facto demonstração.

Dem. Como o Axioma 4 especifica que $1 \neq 0$, o Axioma 7 da tricotomia deixa-nos com uma e uma só das seguintes duas hipóteses: $0 < 1$ ou $1 < 0$.

Suponhamos que a segunda era a verdadeira. Seria então válida a seguinte sequência de implicações

$$\begin{aligned} & 1 < 0 && \text{(hipótese assumida)} \\ \Rightarrow\ & 1 \cdot 1 > 0 \cdot 1 && \text{(propriedade (v))} \\ \Rightarrow\ & 1 > 0 && \text{(Ax. 4 - 1 é neutro para } \cdot\text{)} \end{aligned}$$

que conduzem a uma contradição com o já referido Axioma 7 da tricotomia: um número real não pode ser simultaneamente positivo e negativo.

Concluimos então que a única possibilidade verdadeira é de facto $0 < 1$. □

Módulo ou Valor Absoluto.

Definição 3.3. O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x \, , & \text{se } x \geq 0; \\ -x \, , & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exercício 3.4. Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0 \quad \text{e} \quad -|x| \leq x \leq |x| \ .$$

Teorema 3.5. *Sejam $a, x \in \mathbb{R}$. Tem-se que*

$$|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; x \leq a \;\wedge\; x \geq -a \;.$$

Dem. ($\Rightarrow$)
Sabemos por hipótese que $|x| \leq a$. Usando a propriedade algébrica (v) obtemos

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x| \;.$$

Temos então que

$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a \;,$$

onde as duas desigualdades do meio são o resultado do Exercício 3.4. A transitividade (ii) implica immediatamente que

$$-a \leq x \leq a \;.$$

($\Leftarrow$)
Supomos agora por hipótese que $-a \leq x \leq a$. Temos então que:

(a) $x \geq 0 \;\Rightarrow\; |x| = x \leq a$.
(b) $x < 0 \;\Rightarrow\; |x| = -x \leq a$, onde a última desigualdade é obtida a partir da hipótese $-a \leq x$ usando novamente a propriedade algébrica (v).

Conclui-se em qualquer dos casos que $|x| \leq a$. □

Corolário 3.6. *Sejam $a, x \in \mathbb{R}$. Tem-se que*

$$|x| > a \;\Leftrightarrow\; x > a \;\vee\; x < -a \;.$$

Dem. Basta negar ambos os lados da equivalência do teorema anterior. □

Teorema 3.7. (Desigualdade Triangular)

$$|x + y| \leq |x| + |y| \,,\; \forall\, x, y \in \mathbb{R} \;.$$

Dem. Temos pelo Exercício 3.4 que

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y| \;.$$

Somando estas duas desigualdades obtemos (Ficha 1, 2.(o))

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \;.$$

Usando agora o Teorema 3.5, podemos conlcuir que

$$|x + y| \leq |x| + |y| \;.$$

□

Notação e Definições Preparatórias para o Axioma de Supremo.

Definição 3.8. (Intervalos) $a, b \in \mathbb{R}$.
Intervalo *aberto*: $]a, b[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.
(Notem que $]a, a[= \emptyset \stackrel{\text{def}}{=}$ conjunto vazio. Porquê?)
Intervalo *fechado*: $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$.
(Notem que $[a, a] = \{a\} =$ conjunto com apenas um elemento.)
Intervalos *ilimitados*: $[a, +\infty[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq a\}$ ou $]-\infty, a[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}$. (Notem que $]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$.)

Definição 3.9. (Majorantes e Minorantes) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. Um número real $x \in \mathbb{R}$ diz-se um *majorante* de A (resp. *minorante* de A) se $x \geq a$ (resp. $x \leq a$) para qualquer $a \in A$.

Exemplo 3.10. Seja A o subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por

$$A = \{-1\} \cup]0,1[\, = \{x \in \mathbb{R} \, : \; x = -1 \; \vee \; 0 < x < 1\} \; .$$

Temos então que:

$$\text{Majorantes de } A = \{x \in \mathbb{R} \, , \; x \geq 1\} = [1, +\infty[\; ,$$
$$\text{Minorantes de } A = \{x \in \mathbb{R} \, , \; x \leq -1\} = \,]-\infty, -1] \; .$$

Definição 3.11. (Supremo e Ínfimo) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. Um número real $b \in \mathbb{R}$ diz-se *supremo* de A (resp. *ínfimo* de A) se satisfaz as seguintes duas condições:

(i) b é majorante de A, i.e. $b \geq a$ para qualquer $a \in A$ (resp. b é minorante de A, i.e. $b \leq a$ para qualquer $a \in A$);

(ii) não há majorantes de A maiores do que b, i.e. $b \leq x$ para qualquer majorante x de A (resp. não há minorantes de A menores do que b, i.e. $b \geq x$ para qualquer minorante x de A).

Teorema 3.12. (Unicidade do Supremo e do Ínfimo) *O supremo e o ínfimo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, quando existem, são únicos e serão designados por* $\sup A$ *e* $\inf A$.

Dem. Sejam $b, b' \in \mathbb{R}$ supremos (resp. ínfimos) de A. Sendo ambos majorantes (resp. minorantes) de A, a condição (ii) anterior implica simultaneamente que

$$b \leq b' \quad \text{e} \quad b' \leq b \; .$$

O Axioma 7 da tricotomia diz-nos imediatamente que $b = b'$. □

Definição 3.13. (Máximo e Mínimo) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer. Quando existe supremo de A e este pertence ao conjunto A, i.e. $\sup A \in A$, diremos que A tem *máximo* e que $\max A = \sup A$. De forma análoga, quando existe ínfimo de A e este pertence ao conjunto A, i.e. $\inf A \in A$, diremos que A tem *mínimo* e que $\min A = \inf A$.

Exemplo 3.14. Consideremos o subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ do Exemplo 3.10:

$$A = \{-1\} \cup]0,1[\, = \{x \in \mathbb{R} \, : \; x = -1 \; \vee \; 0 < x < 1\} \; .$$

Temos então que:

$$\sup A = 1 \notin A \;\; \Rightarrow \;\; A \text{ não tem máximo,}$$
$$\inf A = -1 \in A \;\; \Rightarrow \;\; A \text{ tem mínimo e } \min A = -1.$$

4. Aula – 03 de Outubro de 2005

Última Aula. $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer:

- $x \in \mathbb{R}$ é *majorante* de A se $x \geq a \, , \; \forall \, a \in A$.
- um número real é *supremo* de A, e representa-se por $\sup A$, se verificar as seguintes duas condições:
  (i) $\sup A$ é majorante de A;
  (ii) $\sup A \leq x$ para qualquer majorante x de A.
  Vimos também que $\sup A$, quando existe, é único.

Propriedades do Supremo.

Definição 4.1. (Vizinhança) Designa-se por *vizinhança* de raio $\varepsilon > 0$ e centro no ponto $a \in \mathbb{R}$, e representa-se por $V_\varepsilon(a)$, o intervalo aberto

$$V_\varepsilon(a) = \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\; .$$

Teorema 4.2. (Ficha 2, I. 2,3) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto com supremo $s = \sup A$. Seja ainda $m \in \mathbb{R}$ tal que $m > s$. Então:*

(i) $\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, a \in A \; : \; a > s - \varepsilon$ *(i.e. $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$);*

(ii) $\exists \, \varepsilon > 0 \; : \; a \leq m - \varepsilon \, , \; \forall \, a \in A$ *(i.e. $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$);*

Dem. Suponhamos por absurdo que (i) não era verdade. Então existiria $\varepsilon > 0$ tal que $a \leq S - \varepsilon$ para qualquer $a \in A$. Isto significaria que $s - \varepsilon$ era um majorante de A menor do que $s = \sup A$, o que contraria a definição de supremo. Logo, (i) tem que ser verdade.

Relativamente a (ii), seja $\varepsilon = m - s$. Temos que $\varepsilon > 0$ pela hipótese $m > s$. Por outro lado, como $s = \sup A$ é um majorante de A, temos também que

$$a \leq s = m - \varepsilon\,, \text{ para qualquer } a \in A.$$

□

Corolário 4.3. (Caracterização alternativa do supremo) *Um número real $s \in \mathbb{R}$ é o supremo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se e só se verificar as seguintes duas condições:*

(i) *s é majorante de A;*
(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ :\ a > s - \varepsilon$.

Exercício 4.4. Enuncie e prove os análogos do Teorema 4.2 e Corolário 4.3 para o ínfimo.

Axioma do Supremo.

Definição 4.5. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se *majorado* (ou limitado superiormente, ou limitado à direita) quando tem majorantes. Define-se conjunto *minorado* de forma análoga.

Axioma 8. (Axioma do Supremo)
Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio tem supremo.

Teorema 4.6. ("Axioma do Ínfimo")
Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ minorado e não-vazio tem ínfimo.

Dem. Seja $B \subset \mathbb{R}$ minorado e não-vazio. Considere-se $A \subset \mathbb{R}$ definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ :\ (-x) \in B\}\ .$$

Tem-se então que

$$B \text{ minorado e não-vazio } \Rightarrow\ A \text{ majorado e não-vazio} \quad \text{(exercício)}.$$

Logo, pelo Axioma 8, existe $s = \sup A$ e um exercício simples mostra que $(-s) = \inf B$. □

Vamos agora definir o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e, como primeira aplicação do Axioma do Supremo, provar a sua Propriedade Arquimediana.

Números Naturais.

Definição 4.7. (Conjunto Indutivo) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se um *conjunto indutivo* se satisfaz as seguintes duas condições:

$$\text{(i) } 1 \in A \quad \text{e} \quad \text{(ii) } a \in A \Rightarrow (a+1) \in A\ .$$

Exemplo 4.8. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ são indutivos (porquê?). $\mathbb{R}^-$ não é indutivo (porquê?).

Definição 4.9. (Números Naturais) O conjunto dos *números naturais* é o "menor subconjunto indutivo de $\mathbb{R}$" e representa-se por $\mathbb{N}$. Mais precisamente,

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{R}\ :\ n \text{ pertence a qualquer subconjunto indutivo de } \mathbb{R}\}\,.$$

Nota 4.10. (Informal) Temos então que: $1 \in \mathbb{N}$; $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1+1 \in \mathbb{N}$; $3 \stackrel{\text{def}}{=} 2+1 \in \mathbb{N}$; .... Ou seja,

$$\mathbb{N} = \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots\}\,.$$

Propriedades dos Naturais.

Teorema 4.11. *O conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado.*

Dem. Suponhamos que $\mathbb{N}$ era majorado. Então, o facto de $\mathbb{N} \neq \emptyset$ e o Axioma do Supremo implicariam que existiria $s = \sup \mathbb{N}$. Como o supremo é o "menor dos majorantes" e $(s-1) < s$, teríamos que $(s-1) \in \mathbb{R}$ não seria majorante de $\mathbb{N}$, pelo que existiria $n \in \mathbb{N}$ com $(s-1) < n$. Isto implicaria que $(n+1) \in \mathbb{N}$ (porque $\mathbb{N}$ é por definição indutivo) e $s < (n+1) \in \mathbb{N}$, o que entraria em clara contradição com o facto de $s = \sup \mathbb{N}$.

Logo, $\mathbb{N}$ não é de facto majorado. □

5. Aula – 07 de Outubro de 2005

Última Aula.

- Axioma do Supremo: qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio tem supremo.
- $A \subset \mathbb{R}$ diz-se indutivo se $1 \in A$ e $(a \in A \Rightarrow (a+1) \in A)$.
- $$\begin{aligned}\mathbb{N} &\stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{R} : \ n \text{ pertence a qualquer subconjunto indutivo de } \mathbb{R}\} \\ &= \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots\}\end{aligned}$$
- Teorema 4.11: $\mathbb{N}$ não é majorado. (Consequência do Axioma do Supremo.)

Mais Propriedades dos Naturais.

Corolário 5.1. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > x$.*

Dem. Se assim não fosse, $\mathbb{N}$ teria um majorante o que contraria o Teorema 4.11. □

Teorema 5.2. (Propriedade Arquimediana) *Para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot \varepsilon > x$.*

Dem. Pelo Corolário 5.1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x/\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$, temos que

$$n > \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow n \cdot \varepsilon > \frac{x}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = x\ .$$

□

Corolário 5.3. (Propriedade Arquimediana - versão alternativa) *Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon\ .$$

Dem. Basta usar a Propriedade Arquimediana com $x = 1$. □

Exercício 5.4. Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{1}{n} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}\,.$$

(Usaremos frequentemente durante o semestre uma forma abreviada de representar este tipo de conjuntos: $A = \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$.) Mostre que $\inf A = 0$.

Números inteiros e racionais.

Definição 5.5. O conjunto dos *números inteiros*, representado por $\mathbb{Z}$, é definido por

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N} \vee x = 0 \vee (-x) \in \mathbb{N}\}\,.$$

O conjunto dos *números racionais*, representado por $\mathbb{Q}$, é definido por

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}\,.$$

Exercício 5.6. Mostre que $\mathbb{Z}$ é fechado para a adição e subtracção, e que $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição, multiplicação, subtracção e divisão.
Sugestão: poderá ser-lhe útil usar o Método da Indução Matemática que será explicado na próxima aula.

Teorema 5.7. (Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ – Ficha 2, I.13) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.*

Dem. Vamos supor, sem perca de generalidade, que $a > 0$. (Exercício: demonstre o resultado quando $a \leq 0$.)

Pela versão alternativa da Propriedade Arquimediana (Corolário 5.3), temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n} < b - a\,,$$

e portanto

$$n(b-a) > 1 \Leftrightarrow nb - na > 1 \Leftrightarrow nb > na + 1 \ .$$

Pelo exercício I.11 da Ficha 2, sabemos que para qualquer $c \in \mathbb{R}^+$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(m-1) \leq c < m$. Seja então $m \in \mathbb{N}$ tal que $(m-1) \leq na < m$.

Com estes naturais $n, m \in \mathbb{N}$, temos então que

$$\begin{aligned} & na < m \leq na + 1 < nb \\ \Rightarrow\ & na < m < nb \\ \Rightarrow\ & a < \frac{m}{n} < b \ . \end{aligned}$$

Definindo $r = \frac{m}{n}$, temos assim que

$$r \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a < r < b \ .$$

□

Números Irracionais. É claro que

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \ .$$

Será que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$?

Exercício 5.8. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, satisfaz todos os Axiomas de Corpo e de Ordem.

O resultado do Exercício 5.8 mostra que a distinção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, se existir, terá que ser feita pelo Axioma do Supremo.

Exemplo 5.9. Consideremos o conjunto

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\} \ .$$

É claro que A é não vazio (porque, por exemplo, $1 \in A$) e majorado (porque, por exemplo, 2 é um majorante de A). Logo,

$$\text{Axioma do Supremo} \ \Rightarrow \ \text{existe } s = \sup A \in \mathbb{R} \, .$$

De facto, é claro que $s = \sup A \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 5.10. *O número real $s = \sup A \in \mathbb{R}^+$ é tal que*

$$s^2 = 2 \, ,$$

e será designado por raiz quadrada de 2 *e representado por $\sqrt{2}$.*

Dem. Pelo Axioma 7 da tricotomia, basta mostrar que nem $s^2 < 2$ é verdade, nem $s^2 > 2$ é verdade. Faremos o caso $s^2 < 2$, deixando o outro como exercício.

Provaremos que

$$(s \in \mathbb{R}^+ \text{ e } s^2 < 2) \Rightarrow \exists\, r \in A : \ s < r \, .$$

Isto é um absurdo, pois contradiz o facto de $s = \sup A$ ser um majorante do conjunto A. Concluiremos assim que $s^2 < 2$ é necessariamente falso.

Supondo então $s \in \mathbb{R}^+$ e $s^2 < 2$, teríamos que

$$(s > 0 \text{ e } 2 - s^2 > 0) \ \Rightarrow \ \frac{2-s^2}{2s+1} > 0 \ \Rightarrow \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2-s^2}{2s+1} \, ,$$

onde a última implicação é consequência da versão alternativa da Propriedade Arquimediana (Corolário 5.3). Para este $n \in \mathbb{N}$, que satisfaz $\frac{2s+1}{n} < (2 - s^2)$, teríamos então que:

$$\begin{aligned}
(s + \frac{1}{n})^2 &= s^2 + 2\frac{s}{n} + \frac{1}{n^2} \\
&\leq s^2 + 2\frac{s}{n} + \frac{1}{n} && (\text{porque } \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}) \\
&= s^2 + \frac{2s+1}{n} \\
&< s^2 + (2 - s^2) && (\text{pela escolha de } n \in \mathbb{N}) \\
&= 2 \ .
\end{aligned}$$

Teríamos assim que $(s+\frac{1}{n})^2 < 2$. Usando agora o Teorema 5.7 (densidade dos racionais nos reais), temos que existiria $r \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r < (s + \frac{1}{n})$, pelo que $r^2 < 2$ e portanto $r \in A$. □

Proposição 5.11. *Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$.*

Dem. Ficha 2, grupo I, exercícios 17 e 18. □

As Proposições 5.10 e 5.11 permitem-nos concluir que:

(i) $\mathbb{Q}$ não satisfaz o Axioma do Supremo e $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Designaremos os elementos do conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ por *números irracionais*.
(ii) A raiz quadrada de 2 é um número irracional, i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Nota 5.12. Por um processo análogo ao descrito no Exemplo 5.9 mostra-se que

$$\forall\, x > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \exists^1\, y > 0 \ : \ y^n = x \ .$$

Este número real $y \in \mathbb{R}^+$ designa-se por *raiz-n de $x > 0$* e representa-se por

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{ou} \quad x^{1/n} \ .$$

Exercício 5.13. (Ficha 2, I.14) Mostre que se $r \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $r \cdot y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Teorema 5.14. (Densidade de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ – Ficha 2, I.16) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então, existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < x < b$.*

Dem.

$$\begin{aligned}
a < b &\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}} \\
&\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q} \ : \frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} && (\text{pelo Teorema 5.7}) \\
&\Rightarrow a < \sqrt{2}r < b \ .
\end{aligned}$$

O Exercício 5.13 diz-nos em particular que

$$(r \in \mathbb{Q} \text{ e } \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow \sqrt{2}r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ .$$

Definindo $x = \sqrt{2}r$, temos assim que

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a < x < b \ .$$

□

Nota 5.15. Existem na realidade "muito mais" irracionais do que racionais! Este assunto é para ser informalmente discutido, consoante o tempo de aula ainda disponível.

Nota 5.16. Os exercícios 5 e 6 do grupo I da Ficha 2 estão resolvidos no primeiro volume do Apostol. Consultem-no!

6. Aula – 10 de Outubro de 2005

Penúltima Aula.

- $A \subset \mathbb{R}$ diz-se indutivo se $1 \in A$ e $(a \in A \Rightarrow (a+1) \in A)$.
- $$\begin{aligned}\mathbb{N} &\stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{R} : \ n \text{ pertence a qualquer subconjunto indutivo de } \mathbb{R}\} \\ &= \{1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots\}\end{aligned}$$

Indução Matemática. O facto de $\mathbb{N}$ ser, por definição, "o menor dos subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$" implica que

$$\text{se } A \subset \mathbb{R} \text{ é indutivo então } \mathbb{N} \subset A. \tag{1}$$

Teorema 6.1. (Princípio de Indução Matemática) *Se $A \subset \mathbb{N}$ é indutivo, então $A = \mathbb{N}$.*

Dem. Como A é indutivo temos por (1) que $\mathbb{N} \subset A$. Como por hipótese $A \subset \mathbb{N}$, conclui-se imediatamente que $A = \mathbb{N}$. □

Método de Indução Matemática. O Princípio da Indução Matemática, enunciado no Teorema 6.1, está na base de um método eficaz de demonstração de determinadas proposições/propriedades relacionadas com os números naturais: o chamado *Método de Indução Matemática*. Descrevemos de seguida este método, indicando entre parentesis como se relaciona com o Princípio de Indução Matemática.

Designemos por $P(n)$ uma determinada proposição ou propriedade que se pretende mostrar verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. (Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : \ P(n) \text{ é verdade}\}$. Segue da sua definição que $A \subset \mathbb{N}$.) O Método de Indução Matemática consiste em provar separadamente que

(i) $P(1)$ é verdadeira. $(1 \in A.)$
(ii) se $P(n)$ é verdadeira para um determinado $n \in \mathbb{N}$, então $P(n+1)$ também é verdadeira. $(n \in A \Rightarrow (n+1) \in A.)$

Conclui-se a partir de (i) e (ii) que

$$P(n) \text{ é verdadeira para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

((i) e (ii) implicam que A é indutivo, pelo que o Teorema 6.1 permite concluir que $A = \mathbb{N}$.)

Exemplo 6.2. (Ficha 2, II 1.(a)) Consideremos a seguinte proposição, que queremos mostrar verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) = \text{é válida a seguinte fórmula: } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Pelo Método de Indução Matemática, a prova faz-se em dois passos.
(i) $[P(1)]$. Mostrar que a fórmula dada é válida quando $n = 1$, i.e. que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}\,,$$

o que é claramente verdade.
(ii) $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a *hipótese* $P(n)$, i.e.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da *tese* $P(n+1)$, i.e.

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \qquad \text{(pela hipótese } P(n)\text{)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Símbolo de Somatório. O Princípio de Indução Matemática está também na base de uma maneira de definir entidades matemáticas relacionadas com os números naturais: as chamadas *Definições por Recorrência*. Descrevemos de seguida uma dessas definições, a do símbolo de somatório, que não é mais do que uma notação muito útil para lidar com somas de várias parcelas.

Definição 6.3. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o *símbolo de somatório*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \text{ se } n = 1, \text{ e } \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \text{ se } n > 1.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} a_k &= \sum_{k=1}^{1} a_k + a_2 = a_1 + a_2\,, \\ \sum_{k=1}^{3} a_k &= \sum_{k=1}^{2} a_k + a_3 = a_1 + a_2 + a_3\,, \ \ldots\,. \end{aligned}$$

Nota 6.4. O índice k do somatório é um *índice mudo*, desempenhando um papel muito auxiliar. Uma mesma soma pode aparecer na notação de somatório de formas diferentes. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j\,.$$

Exemplo 6.5. A fórmula que provámos por indução no Exemplo 6.2, pode ser escrita usando o símbolo de somatório da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i.e. neste caso $a_k = k$ para $k = 1, \ldots, n$).

Teorema 6.6. (Propriedades do Somatório – Ficha 2, III 2.)

$$\begin{aligned} &(a)\ \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k && \textit{(prop. aditiva)} \\ &(b)\ \sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\,,\ \forall\, c \in \mathbb{R} && \textit{(homogeneidade)} \\ &(c)\ \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 && \textit{(prop. telescópica)} \end{aligned}$$

Dem. (a) e (b) ficam como exercício. Provamos (c) por indução.
[$P(1)$]. Mostrar que a fórmula dada em (c) é válida quando $n = 1$, i.e. que

$$\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0\,,$$

o que é imediato a partir da Definição 6.3 do símbolo de somatório quando $n = 1$.
$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k-1}) = a_{n+1} - a_0\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) + (a_{n+1} - a_{n+1-1}) && \text{(por def. de somatório)}\\ &= (a_n - a_0) + (a_{n+1} - a_n) && \text{(pela hipótese } P(n))\\ &= a_{n+1} - a_0\end{aligned}$$

□

7. Aula – 12 de Outubro de 2005

Última Aula.

- Método de Indução Matemática. Seja $P(n)$ uma proposição que se pretende mostrar verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se
  (i) $P(1)$ é verdadeira e
  (ii) $P(n)$ verdadeira para um determinado $n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(n+1)$ verdadeira,
  então $P(n)$ é de facto verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.
- Símbolo de Somatório, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, definido por recorrência:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \text{ se } n = 1, \text{ e } \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \text{ se } n > 1.$$

Mais Indução e Somatórios. Nem o Método de Indução, nem o Símbolo de Somatório, têm necessariamente que "começar" em $n = 1$. Ambos admitem generalizações simples, tendo como ponto de partida um dado $m \in \mathbb{Z}$.

- Se $P(m)$ é verdadeira e se, para um determinado $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq m$, $P(n)$ verdadeira $\Rightarrow P(n+1)$ verdadeira, então $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq m$.
- $$\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{k+m}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$
  (Nota: o exercício III. 4 da Ficha 2 pede para mostrar que esta definição é equivalente a outra feita por recorrência – resolvam-no!)

Exemplo 7.1. (Ficha 2, III. 8) Vamos neste exemplo mostrar que, para qualquer $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$ e qualquer $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,, \tag{2}$$

por dois processos distintos:

(a) usando o Método de Indução;
(b) aplicando a Propriedade Telescópica do somatório (Teorema 6.6 (c)) a

$$(1 - r) \cdot \sum_{k=0}^{n} r^k\,.$$

(a) Método de Indução.
$[P(0)]$. Mostrar que a fórmula (2) é válida quando $n = 0$, i.e. que

$$\sum_{k=0}^{0} r^k = \frac{1 - r^1}{1 - r} \,,$$

o que é claramente verdade (ambos os termos são iguais a 1).
Nota: por definição $r^0 = 1$.
$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \,, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e um determinado } n \in \mathbb{N}_0 \,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \,, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} && \text{(por def. de somatório)} \\
&= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} && \text{(pela hipótese } P(n)\text{)} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \,. &&
\end{aligned}$$

(b) Aplicando as propriedades do somatório especificadas no Teorema 6.6, temos que:

$$\begin{aligned}
(1 - r) \cdot \sum_{k=0}^{n} r^k &= \sum_{k=0}^{n} (r^k - r^{k+1}) && \text{(homogeneidade)} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (r^{k+1} - r^k) && \text{(homogeneidade)} \\
&= -(r^{n+1} - r^0) && \text{(prop. telescópica)} \\
&= 1 - r^{n+1} \,. &&
\end{aligned}$$

Sucessões Reais – definição e exemplos. Uma sucessão real não é mais do que uma sequência infinita de números reais. Usa-se normalmente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais para indexar os termos dessa sequência. Temos assim a seguinte:

Definição 7.2. Uma *sucessão real* é uma função

$$\begin{aligned}
u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto u(n) \,.
\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, designaremos $u(n)$ por *termo geral* ou *termo de ordem* n da sucessão u, representando-o normalmente por u_n. Usaremos qualquer dos símbolos u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) para representar uma mesma sucessão real.

Existem várias maneiras de explicitar exemplos particulares de sucessões reais, como se ilustra de seguida.

Exemplo 7.3. Uma sucessão real pode ser definida através de uma fórmula explícita para o seu termo geral. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
u_n &= 3 && (3, 3, 3, \ldots) \,; \\
u_n &= n && (1, 2, 3, \ldots) \,; \\
u_n &= 2^n && (2, 4, 8, \ldots) \,.
\end{aligned}$$

Há duas classes muito importantes de sucessões reais, cuja definição pode ser feita usando uma fórmula explícita para o seu termo geral.

Exemplo 7.4. *Progressões Aritméticas* – sucessões caracterizadas pelo facto de $u_{n+1} - u_n =$ constante, para todo o $n \in \mathbb{N}$. O seu termo geral é da forma

$$u_n = a + (n-1)r\,,$$

onde $a, r \in \mathbb{R}$ são respectivamente o *primeiro termo* e *razão* da progressão aritmética (u_n) (notem que a diferença $u_{n+1} - u_n = r$ é de facto constante). A sucessão $u_n = n$ do Exemplo 7.3, é uma progressão aritmética, com primeiro termo e razão iguais a 1.

Exemplo 7.5. *Progressões Geométricas* – sucessões caracterizadas pelo facto de $u_{n+1}/u_n =$ constante, para todo o $n \in \mathbb{N}$. O seu termo geral é da forma

$$u_n = a \cdot r^{n-1}\,,$$

onde $a, r \in \mathbb{R}$ são respectivamente o *primeiro termo* e *razão* da progressão geométrica (u_n) (notem que o quociente $u_{n+1}/u_n = r$ é de facto constante). A sucessão $u_n = 2^n$ do Exemplo 7.3, é uma progressão geométrica, com primeiro termo e razão iguais a 2.

Exemplo 7.6. O termo geral de uma sucessão real pode também ser definido por recorrência. Por exemplo:

$$u_1 = 1\,,\ u_{n+1} = u_n + n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,;$$
$$u_1 = u_2 = 1\,,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{(sucessão de Fibonacci).}$$

Exercício 7.7. Defina por recorrência progressões aritméticas e geométricas, com primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e razão $r \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7.8. Sucessões reais podem também ser definidas por uma regra clara que permita identificar, um a um, todos os seus termos. Um exemplo é a sucessão de todos os números naturais primos, i.e. a sucessão (u_n) cuja lista de termos é

$$(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots)\,.$$

Limite de uma Sucessão. Intuitivamente, dizemos que uma sucessão (u_n) *tem por limite o número real* $a \in \mathbb{R}$, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim u_n = a \quad \text{ou ainda} \quad u_n \to a\,,$$

se os termos da sucessão (u_n) vão eventualmente acumular-se todos em $a \in \mathbb{R}$, i.e. *se por mais pequena que seja a vizinhança de* $a \in \mathbb{R}$*, existir uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão* (u_n) *estão nessa vizinhança.* De uma forma matematicamente mais precisa, temos a seguinte

Definição 7.9.

$$\lim u_n = a \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)\ .$$

Uma sucessão (u_n) diz-se *convergente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim u_n = a$.

Nota 7.10.

$$|u_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in V_\varepsilon(a)\ .$$

Exemplo 7.11. Vamos provar que $u_n = \frac{1}{n} \to 0$. Suponhamos dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. A versão alternativa da Propriedade Arquimediana, Corolário 5.3, dá-nos um natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$. É agora imediato verificar que $(n > N \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon)$ provando-se assim que de facto

$$\lim \frac{1}{n} = 0\,. \tag{3}$$

8. Aula – 14 de Outubro de 2005

Última Aula.

- Sucessão real: $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u = (u_n)$.
- Limite: $\lim u_n = a \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; : \; (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$. Uma sucessão (u_n) diz-se *convergente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim u_n = a$.
- Exemplo: $\lim \frac{1}{n} = 0$ ($\Leftrightarrow$ Propriedade Arquimediana).

Nesta aula enunciaremos algumas propriedades básicas de sucessões e limites, ilustrando-as com alguns exemplos. Serão feitas algumas das demonstrações destas propriedades na próxima aula.

Unicidade do Limite.

Teorema 8.1. *O limite de uma sucessão, quando existe, é único.*

Sucessões, Limite e Operações Algébricas. Dadas sucessões $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ e uma constante real $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos naturalmente considerar:

(i) a sucessão soma/subtracção: $(u \pm v)_n = u_n \pm v_n$;
(ii) a sucessão produto: $(u \cdot v)_n = u_n \cdot v_n$;
(iii) a sucessão quociente: $(u/v)_n = u_n/v_n$, definida se $v_n \neq 0\,, \; \forall\, n \in \mathbb{N}$;
(iv) a sucessão $(\alpha \cdot u)_n = \alpha \cdot u_n$.

Teorema 8.2. (Ficha 2, IV 5, 6, 7 e 8) *Se $u_n \to a$, $v_n \to b$, $w_n \to c$ com $c \neq 0$ e $w_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então:*

(i) $(u_n \pm v_n) \to a \pm b$ *(limite da soma = soma dos limites);*
(ii) $(u_n \cdot v_n) \to a \cdot b$ *(limite do produto = produto dos limites);*
(iii) $(u_n/w_n) \to a/c$ *(limite do quociente = quociente dos limites);*
(iv) $(\alpha \cdot u_n) \to \alpha \cdot a$.

Exemplo 8.3.

$$\lim \frac{3n+2}{n+1} = \lim \frac{n \cdot (3 + \frac{2}{n})}{n \cdot (1 + \frac{1}{n})} = \lim \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{1+0} = 3\,,$$

usando as propriedades algébricas do limite, especificadas no Teorema 8.2, e o facto de $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Limite e Relações de Ordem.

Teorema 8.4. (Ficha 2, IV 3) *Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes para as quais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > N \Rightarrow u_n \leq v_n\,.$$

Então,

$$\lim u_n \leq \lim v_n\,.$$

Teorema 8.5. (Princípio do Encaixe ou da Sucessão Enquadrada) *Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) sucessões reais para as quais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n\,.$$

Se (u_n) e (w_n) são convergentes com $\lim u_n = a = \lim w_n$, então (v_n) também é convergente e $\lim v_n = a$.

Exemplo 8.6. Para determinar $\lim \frac{(-1)^n}{n}$, observemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Como $\lim -\frac{1}{n} = 0 = \lim \frac{1}{n}$, concluimos pelo Princípio do Encaixe que

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0\,. \tag{4}$$

Exemplo 8.7. Prova-se facilmente que, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Como $\lim 0 = 0 = \lim \frac{1}{n}$, concluimos pelo Princípio do Encaixe que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0\,. \tag{5}$$

Mais Exemplos e Propriedades do Limite.

Exemplo 8.8. Dado um número real $a \in \mathbb{R}$, queremos estudar a sucessão $x_n = a^n$, mostrando em particular que

$$\text{se} \quad |a| < 1 \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0\,. \tag{6}$$

Faremos aqui o caso $0 \leq a < 1$, deixando o caso $-1 < a < 0$ como exercício. É válida a seguinte sequência de implicações:

$$\begin{aligned} 0 \leq a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 &\Rightarrow \frac{1}{a} = 1 + b\,, \text{ com } b > 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{1}{1+b}\,, \text{ com } b > 0 \\ &\Rightarrow a^n = \frac{1}{(1+b)^n}\,, \text{ com } b > 0. \end{aligned}$$

Tendo em conta a *Desigualdade de Bernoulli* (Ficha 2, II 4 - resolvam por indução)

$$(1+b)^n \geq 1 + nb\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ b \in \mathbb{R} \text{ com } b \geq -1, \tag{7}$$

temos então que

$$0 \leq a^n = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+nb}\,.$$

Como $\lim 0 = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nb} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\frac{1}{n}+b)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+b} = \frac{0}{0+b} = 0\,,$$

para qualquer $b \in \mathbb{R}^+$ (na realidade para qualquer $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), concluimos pelo Princípio do Encaixe que $\lim a^n = 0$.

Quando $a = 1$ tem-se naturalmente que $\lim a^n = \lim 1^n = \lim 1 = 1$. Veremos mais à frente que, quando $a = -1$ ou $|a| > 1$, a sucessão $x_n = a^n$ não é convergente.

Exemplo 8.9. (Ficha 2, IV 1.(v))

$$\begin{aligned} \lim \frac{2^{2n} - 3^n}{2^n - 3^{2n}} &= \lim \frac{4^n - 3^n}{2^n - 9^n} = \lim \frac{9^n \cdot \left((\frac{4}{9})^n - (\frac{3}{9})^n\right)}{9^n \cdot \left((\frac{2}{9})^n - 1\right)} \\ &= \lim \frac{(\frac{4}{9})^n - (\frac{3}{9})^n}{(\frac{2}{9})^n - 1} = \lim \frac{0-0}{0-1} = 0\,, \end{aligned}$$

usando as propriedades algébricas do limite, especificadas no Teorema 8.2, e o resultado (6) do Exemplo 8.8.

Proposição 8.10.

(i) *Se $u_n \to a$ então $|u_n| \to |a|$ (limite do módulo = módulo do limite).*
(ii) *Se $u_n \geq 0$ e $u_n \to a$ então $\sqrt{u_n} \to \sqrt{a}$ (limite da raiz = raiz do limite).*

Nota 8.11. A Proposição 8.10 afirma que $u_n \to a \Rightarrow |u_n| \to |a|$. Não é verdade em geral que $|u_n| \to |a| \Rightarrow u_n \to a$ (e.g. se $u_n = -1$ e $a = 1$ temos que $|u_n| = |-1| = 1 \to 1 = |a|$ mas $u_n = -1 \to -1 \neq a$).

No entanto, verifiquem como exercício que

$$u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0\,.$$

Exemplo 8.12. (Ficha 2, IV 1.(h))

$$\lim \frac{\sqrt{n^4-1}}{n^2+3} = \lim \frac{n^2 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}{n^2 \cdot (1+\frac{3}{n^2})} = \lim \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{1-0}}{1+0} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

usando as propriedades algébricas do limite, especificadas no Teorema 8.2, bem como os resultados do Exemplo 8.7 e Proposição 8.10 – (ii).

Exemplo 8.13. (Ficha 2, IV 1.(p))

$$\begin{aligned}
&\lim \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}\right) \\
&= \lim \frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}\right) \cdot \left(\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}\right)}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}} \\
&= \lim \frac{n(n+1) - n(n-1)}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}} \\
&= \lim \frac{2n}{n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \\
&= \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{2}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

9. Aula – 17 de Outubro de 2005

Última Aula.

- Limite: $\lim u_n = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$. Recordem que $|u_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in V_\varepsilon(a)$.
- Propriedades do Limite e Exemplos.

Começaremos esta aula por fazer a demonstração de algumas das propriedades do limite enunciadas na última aula.

Unicidade do Limite. Recordemos o enunciado do Teorema 8.1: o limite de uma sucessão, quando existe, é único.

Dem. Seja (u_n) uma sucessão real e suponhamos que existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned}
u_n \to a_1 \quad &(\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N_1 \Rightarrow u_n \in V_\varepsilon(a_1)) \quad \text{e} \\
u_n \to a_2 \quad &(\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N_2 \Rightarrow u_n \in V_\varepsilon(a_2))\,.
\end{aligned}$$

Queremos então provar que $a_1 = a_2$. Suponhamos por absurdo que $a_1 \neq a_2$, e.g. $a_1 < a_2$. Sejam

$$\varepsilon = \frac{a_2 - a_1}{2} \quad \text{e} \quad N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}\,.$$

Teríamos então que, por um lado $V_\varepsilon(a_1) \cap V_\varepsilon(a_2) = \emptyset$, mas por outro

$$n > N \Rightarrow (u_n \in V_\varepsilon(a_1) \text{ e } u_n \in V_\varepsilon(a_2)) \Rightarrow u_n \in V_\varepsilon(a_1) \cap V_\varepsilon(a_2)\,,$$

o que é naturalmente absurdo.

Logo, $a_1 = a_2$. □

Limite e Operações Algébricas. Vamos agora provar uma das propriedades do limite enunciada no Teorema 8.2: se $u_n \to a$ e $v_n \to b$ então $(u_n + v_n) \to (a + b)$.

Dem. Sabemos então que

$$u_n \to a \quad (\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon) \quad \text{e}$$
$$v_n \to b \quad (\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N_2 \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon)\,,$$

e queremos provar que

$$(u_n + v_n) \to (a + b) \quad (\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (a + b)| < \varepsilon)\,.$$

Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário,

$$N_1 = N_1(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}:\ n > N_1 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon/2\,,$$
$$N_2 = N_2(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}:\ n > N_2 \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon/2$$

e $N = \max\{N_1, N_2\}$. Com esta escolha de $N \in \mathbb{N}$, e para qualquer $n > N$, é válida a seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (a + b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \\ &\le |u_n - a| + |v_n - b| && \text{(pela Desig. Triangular - Teor. 3.7)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \text{(porque } n > N = \max\{N_1, N_2\}\text{)} \\ &= \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

Limite e Relações de Ordem. O Teorema 8.4, que está na base do Princípio do Encaixe ou da Sucessão Enquadrada (Teorema 8.5), diz o seguinte: se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes, para as quais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow u_n \le v_n$, então $\lim u_n \le \lim v_n$.

Dem. Deixo como exercício, com a seguinte sugestão: usem o método de redução ao absurdo, i.e. suponham que $\lim u_n > \lim v_n$ e deduzam uma contradição com a hipótese $u_n \le v_n$. □

Limite e Função Módulo. Provaremos aqui o ponto (i) da Proposição 8.10: se $u_n \to a$ então $|u_n| \to |a|$.

Dem. Sabemos que

$$u_n \to a\ (\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)$$

e queremos provar que

$$|u_n| \to |a|\ (\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ (n > N' \Rightarrow ||u_n| - |a|| < \varepsilon)$$

O resultado do exercício 3.(i) da Ficha 1 diz-nos que

$$||b| - |a|| \le |b - a|\,,\ \text{para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}.$$

Esta desigualdade implica imediatamente que, para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, o $N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ necessário para provar que $|u_n| \to |a|$ pode ser escolhido exactamente igual ao $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ que nos é dado pelo facto de $u_n \to a$. □

Notem que, quando $a = 0$, temos $|u_n - a| = |u_n| = ||u_n| - |a||$, pelo que de facto

$$u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \to 0\,,$$

como já tinha sido referido na Nota 8.11 da última aula.

Exemplo 9.1. *(limitada* x *infinitésimo = infinitésimo)* O Exemplo 8.6 ($\lim (-1)^n/n = 0$) pode ser generalizado da seguinte forma. Sejam:

(i) (x_n) uma sucessão com $\lim x_n = 0$, i.e. x_n é um *infinitésimo*;
(ii) (ℓ_n) uma sucessão *limitada*, i.e. para a qual existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $-M \le \ell_n \le M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Tem-se então que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$-M \cdot |x_n| \leq \ell_n \cdot x_n \leq M \cdot |x_n| \,.$$

Como

$$\lim -M \cdot |x_n| = -M \cdot |0| = 0 = M \cdot |0| = \lim M \cdot |x_n| \,,$$

podemos concluir pelo Princípio do Encaixe (Teorema 8.5) que

$$\lim \ell_n \cdot x_n = 0 \,.$$

Sucessões Monótonas e Limitadas.

Definição 9.2. Seja (u_n) uma sucessão real. Então:

(i) (u_n) diz-se *limitada* se existir $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $-M \leq u_n \leq M$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(ii) (u_n) diz-se *crescente* (resp. *estritamente crescente*) se $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$) para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(iii) (u_n) diz-se *decrescente* (resp. *estritamente decrescente*) se $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(iv) (u_n) diz-se *monótona* (resp. *estritamente monótona*) se for crescente ou decrescente (resp. estritamente crescente ou decrescente).

Teorema 9.3. *Se uma sucessão (u_n) é convergente, então (u_n) é limitada.*

Dem. Seja $a \in \mathbb{R}$ o limite da sucessão (u_n). Fazendo $\varepsilon = 1$ na definição de limite, temos então que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n - a| < 1 \,,$$

pelo que $a - 1 < u_n < a + 1$ para todo o $n > N$. Definindo $m, M \in \mathbb{R}$ por

$$m = \min\{a - 1, u_1, u_2, \ldots, u_N\} \quad \text{e} \quad M = \max\{a + 1, u_1, u_2, \ldots, u_N\} \,,$$

temos então que

$$m \leq u_n \leq M \,, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N},$$

pelo que a sucessão (u_n) é de facto limitada. □

Exercício 9.4. Usou-se nesta demonstração o facto de qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ finito ter máximo e mínimo. Demonstrem este facto, provando pelo Método de Indução que a proposição

$$P(n) = \text{ “qualquer subconjunto de } \mathbb{R} \text{ com } n \text{ elementos tem máximo e mínimo”}$$

é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Nota 9.5. O Teorema 9.3 diz-nos que

$$(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow (u_n) \text{ limitada.}$$

A afirmação recíproca não é em geral verdadeira, i.e.

$$(u_n) \text{ limitada } \not\Rightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

Por exemplo, a sucessão $u_n = (-1)^n$ é claramente limitada mas, como veremos na próxima aula, não é convergente.

Teorema 9.6. *Se uma sucessão (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente e:*

(i) *se (u_n) é crescente então* $\lim u_n = \sup\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$;
(ii) *se (u_n) é decrescente então* $\lim u_n = \inf\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

Dem. Faremos o caso em que (u_n) é crescente (o caso decrescente é completamente análogo).

Como a sucessão (u_n) é limitada, em particular o conjunto dos seus termos é majorado, temos que existe

$$a = \sup\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \,.$$

Queremos portanto provar que

$$u_n \to a \text{ i.e. } \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,:\, (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon) \,.$$

Seja então dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pelo ponto (ii) da caracterização de supremo dada pelo Corolário 4.3, temos que existe pelo menos um termo da sucessão (u_n) na vizinhança $V_\varepsilon(a)$, i.e. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a-\varepsilon < u_N$. Podemos então considerar a seguinte sequência de desigualdades, válida para qualquer $n > N$:

$$a - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq a\,,$$

onde a segunda desigualdade é consequência de (u_n) ser crescente e a terceira é consequência de a ser um majorante do conjunto de todos os termos da sucessão (u_n). Temos então que

$$|u_n - a| < \varepsilon \text{ para todo o } n > N,$$

como se pretendia mostrar. □

10. Aula – 19 de Outubro de 2005

Última Aula. Provámos o Teorema 9.6: (u_n) monótona e limitada $\Rightarrow$ (u_n) convergente.

Nota 10.1. O Teorema 9.6 diz-nos que

$$(u_n) \text{ monótona e limitada } \Rightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

A afirmação recíproca não é em geral verdadeira, porque embora o Teorema 9.3 nos diga que

$$(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow (u_n) \text{ limitada,}$$

temos que

$$(u_n) \text{ convergente } \not\Rightarrow (u_n) \text{ monótona.}$$

Por exemplo, a sucessão $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ do Exemplo 8.6 é convergente mas não é monótona.

Exemplos de Aplicação.

Exemplo 10.2. (Ficha 3, I 4.) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{4} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,. \tag{8}$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3/2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

Para resolver a alínea (a), começamos por mostrar pelo método de indução que a proposição

$$P(n) = \text{“}x_n < x_{n+1}\text{”}$$

é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$[P(1)]$. Temos que verificar que $x_1 < x_2$. Isto é de facto verdade, pois

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{2 \cdot x_1 + 3}{4} = \frac{2 \cdot 1 + 3}{4} = \frac{5}{4}\,.$$

$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$x_n < x_{n+1}\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$x_{n+1} < x_{n+2}\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Rightarrow 2x_n < 2x_{n+1} \\ &\Rightarrow 2x_n + 3 < 2x_{n+1} + 3 \\ &\Rightarrow \frac{2x_n + 3}{4} < \frac{2x_{n+1} + 3}{4} \\ &\Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2} \qquad \text{(por (8))} \end{aligned}$$

Para terminar a resolução da alínea (a), vamos mostrar pelo método de indução que a proposição

$$P(n) = \text{“}x_n < 3/2\text{”}$$

é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

$[P(1)]$. Temos que verificar que $x_1 < 3/2$. Isto é de facto verdade, pois

$$x_1 = 1 < \frac{3}{2}\,.$$

$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$x_n < \frac{3}{2}\,,\ \text{para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$x_{n+1} < \frac{3}{2}\,,\ \text{para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_n < \frac{3}{2} &\Rightarrow 2x_n < 3 \\ &\Rightarrow 2x_n + 3 < 6 \\ &\Rightarrow \frac{2x_n+3}{4} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow x_{n+1} < \frac{3}{2} \qquad\qquad \text{(por (8))} \end{aligned}$$

Para resolver a alínea (b), observemos primeiro que, pelo resultado da alínea (a), temos

$$((x_n) \text{ estritamente crescente e } x_n < \frac{3}{2}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 1 = x_1 \leq x_n < \frac{3}{2}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Logo, a sucessão (x_n) é monótona e limitada, pelo que o Teorema 9.6 garante a sua convergência. Designemos por $L \in \mathbb{R}$ o seu limite. Temos então que $\lim x_n = L$ e também $\lim x_{n+1} = L$ (cf. Teorema 10.5 e Exemplo 10.6). Partindo agora da definição por recorrência (8), podemos calcular L da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4} &\Rightarrow \lim x_{n+1} = \lim \frac{2x_n+3}{4} \\ &\Rightarrow L = \frac{2L+3}{4} \Rightarrow 4L = 2L+3 \\ &\Rightarrow 2L = 3 \Rightarrow L = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\lim x_n = \frac{3}{2}\,.$$

Subsucessões: definição e exemplos.

Definição 10.3. Sejam $u = (u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma sucessão real e $k = (k_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma sucessão de números naturais estritamente crescente. A sucessão composta

$$v = (v_n) = u \circ k = ((u \circ k)_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

designa-se por *subsucessão* de $u = (u_n)$. O seu termo geral é dado por

$$v_n = u_{k_n}\,.$$

Exemplo 10.4. Dada uma sucessão real (u_n) qualquer, podemos por exemplo considerar as seguintes subsucessões:

(i) escolhendo $k_n = n$ obtemos a subsucessão (v_n) com termo geral

$$v_n = u_n\,,$$

i.e. qualquer sucessão é subsucessão de si própria.

(ii) escolhendo $k_n = n+1$ obtemos a subsucessão (v_n) com termo geral

$$v_n = u_{n+1}\,.$$

(iii) *subsucessão dos termos de ordem par* – corresponde a escolher $k_n = 2n$, i.e. a considerar a subsucessão (v_n) com termo geral dado por

$$v_n = u_{2n}\,.$$

(iv) *subsucessão dos termos de ordem ímpar* – corresponde a escolher $k_n = 2n-1$, i.e. a considerar a subsucessão (v_n) com termo geral dado por

$$v_n = u_{2n-1}\,.$$

Subsucessões e Limite de Sucessões.

Teorema 10.5. *Uma sucessão real é convergente se e só se todas as suas subsucessões forem convergentes para um mesmo limite.*

Dem. Parecida com a demonstração do Teorema 8.1 – unicidade do limite, feita na última aula. Fica como exercício. □

Exemplo 10.6. Aplicando este Teorema 10.5 ao Exemplo 10.4 (ii), obtemos o seguinte resultado: se (x_n) é uma sucessão convergente com $\lim x_n = L$, então (x_{n+1}) também é convergente e $\lim x_{n+1} = L$. Este facto foi implicitamente usado no Exemplo 10.2.

Exemplo 10.7. Consideremos a sucessão real (u_n) com termo geral dado por $u_n = (-1)^n$. Temos que a sua subsucessão dos termos de ordem par satisfaz

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1\,,$$

enquanto que a sua subsucessão dos termos de ordem ímpar satisfaz

$$u_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1\,.$$

Assim, a sucessão $u_n = (-1)^n$ tem duas subsucessões com limites distintos, $1 \neq -1$. Usando o resultado do Teorema 10.5, podemos então concluir que

$$\text{a sucessão } u_n = (-1)^n \text{ não é convergente.}$$

Sublimites e o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Por falta de tempo, e apesar da sua muita importância e interesse, os resultados que agora enunciaremos não serão demonstrados neste curso de Análise Matemática I.

Definição 10.8. Um número real $a \in \mathbb{R}$ diz-se um *sublimite* de uma sucessão real (u_n) se existir uma subsucessão $(v_n = u_{k_n})$ com $\lim v_n = a$.

Teorema 10.9. *Qualquer sucessão real tem subsucessões monótonas.*

Corolário 10.10. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Qualquer sucessão limitada tem subsucessões convergentes, i.e. qualquer sucessão limitada tem sublimites.*

Teorema 10.11. *Uma sucessão limitada é convergente se e só se tiver apenas um sublimite.*

Observações. Por falta de tempo, sucessões de Cauchy e sucessões contractivas não serão tratadas neste curso de Análise Matemática I. Assim, os exercícios 14, 15 e 16 do grupo I da Ficha 3, não são para resolver.

11. Aula – 21 de Outubro de 2005

Penúltima Aula. Provámos os seguintes resultados:

- Teorema 9.3 (u_n) convergente $\Rightarrow$ (u_n) limitada.
- Teorema 9.6: (u_n) monótona e limitada $\Rightarrow$ (u_n) convergente.

Sucessões Não-Limitadas.

Definição 11.1. Dizemos que uma sucessão real (u_n) converge para $+\infty$ (resp. $-\infty$), e escrevemos $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$ (resp. $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$), se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n > N \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(\text{resp.}\quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n > N \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon})\,.$$

Exemplo 11.2. Assim como provámos que $\lim 1/n = 0$, podemos também usar a versão alternativa da Propriedade Arquimediana, Corolário 5.3, para provar que

$$\lim n = +\infty\,. \tag{9}$$

Proposição 11.3. *Seja (u_n) uma sucessão de termos positivos (resp. negativos). Então*

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{u_n} = +\infty$$

$$(\textit{resp.}\quad \lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{u_n} = -\infty\,)\,.$$

Dem. Exercício. □

Recta Acabada e Indeterminações.

Definição 11.4. Designa-se por *recta acabada*, e representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\ .$$

Os elementos $-\infty$ e $+\infty$ satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem de seguida.

As regras operacionais algébricas com os elementos $-\infty$ e $+\infty$ são determinadas por forma a que os Axiomas de Corpo continuem a ser válidos na recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$. Quando numa determinada operação não for possível determinar uma regra nestas condições, diremos que estamos perante uma *indeterminação*.

Relativamente à adição, temos que

$$a + (+\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad a + (-\infty) = -\infty\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,,$$

bem como

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,.$$

Por outro lado,

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } \infty - \infty\,. \tag{10}$$

Relativamente à multiplicação, temos que

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty\,, & \text{se } a > 0; \\ \mp\infty\,, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Temos também que

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty = (-\infty) \cdot (-\infty) \quad \text{e} \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty\,.$$

Por outro lado,

$$0 \cdot (\pm\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } 0 \cdot \infty\,. \tag{11}$$

Esta indeterminação dá naturalmente origem a indeterminações na divisão: as chamadas indeterminações do tipo

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty \tag{12}$$

e

$$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty \,. \tag{13}$$

Relativamente à potenciação a^b, com $a \geq 0$, temos que

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq a < 1; \\ +\infty\,, & \text{se } a > 1; \end{cases} \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}}\,,$$

bem como

$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0\,, & \text{se } b < 0; \\ +\infty\,, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

Por outro lado

$$1^{+\infty} \text{ é uma indeterminação do tipo } 1^{\infty}\,, \tag{14}$$

e

$$(+\infty)^0 \text{ é uma indeterminação do tipo } \infty^0\,. \tag{15}$$

Esta última indeterminação está directamente relacionada com a

$$\text{indeterminação do tipo } 0^0 \tag{16}$$

já existente em $\mathbb{R}$.

Levantamento de Indeterminações em Limites de Sucessões. Já vimos em vários exemplos como levantar (i.e. resolver) alguns tipos de indeterminações que surgem no cálculo do limite de sucessões:

(i) indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$ ou ∞/∞ ou $0/0$, podem normalmente ser levantadas *pondo em evidência os termos de maior grau*;
(ii) indeterminações do tipo $\infty - \infty$ que envolvem a raiz quadrada podem normalmente ser levantadas *multiplicando pelo conjugado.*

Indeterminações do tipo 1^{∞} são também bastante importantes no cálculo do limite de sucessões. O caso mais simples é o que se apresente no exemplo seguinte.

Exemplo 11.5. Consideremos a sucessão (e_n), com termo geral dado por

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,.$$

O cálculo do seu limite dá imediatamente origem a

$$\lim e_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^{+\infty} = \text{ indeterminação,}$$

que pretendemos levantar ou resolver.

Usando a fórmula do *Binómio de Newton* (Ficha 2, III 9.)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{17}$$

não é difícil mostrar que:

(i) (e_n) é estritamente crescente, i.e. $e_n < e_{n+1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
(ii) $2 \leq e_n < 3\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, i.e. (e_n) é limitada.

Conclui-se então pelo Teorema 9.6 que (e_n) é convergente. O seu limite é um dos números reais mais importantes da matemática, o chamado número e. Temos então que $e \in \mathbb{R}$ é definido por

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,. \tag{18}$$

O seu valor numérico é aproximadamente $2,718\ldots$, ficando desta forma resolvida a indeterminação inicial.

Outras indeterminações do tipo 1^∞ serão levantadas com base no teorema seguinte.

Teorema 11.6. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real e (u_n) uma sucessão real tal que $\lim |u_n| = +\infty$. Então*

$$\lim \left(1 + \frac{a}{u_n}\right)^{u_n} = e^a \,.$$

Dem. Exercício. □

Exemplo 11.7. (Ficha 3, I 12.(b)) Temos que

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} = 1^{+\infty} = \text{ indeterminação.}$$

Usando o Teorema 11.6, podemos resolver esta indeterminação da seguinte forma:

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim \left(1 + \frac{6}{3n}\right)^{3n} = e^6 \quad (\text{porque } u_n = 3n \to +\infty).$$

Indeterminações do tipo ∞^0 ou 0^0 são também frequentes no cálculo do limite de sucessões. O caso mais notável é

$$\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} \equiv \lim \sqrt[n]{u_n} \,,$$

quando $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\lim u_n = 0$ ou $\lim u_n = +\infty$. Este tipo de indeterminações é resolvido com base no teorema seguinte.

Teorema 11.8. *Seja (u_n) uma sucessão real de termos positivos. Se*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \in \overline{\mathbb{R}} \,,$$

então

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = a \,.$$

Dem. Próxima aula. □

Exemplo 11.9. (Ficha 3, I 13.(c)) Temos que

$$\lim \left(2^n + 1\right)^{\frac{1}{n}} = \infty^0 = \text{ indeterminação.}$$

Fazendo $u_n = 2^n + 1$ temos que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1} = \lim \frac{2^n \cdot \left(2 + \frac{1}{2^n}\right)}{2^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} = \lim \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2 \,.$$

Concluimos então pelo Teorema 11.8 que

$$\lim \left(2^n + 1\right)^{\frac{1}{n}} = 2, \,.$$

Ordens de Grandeza.

Definição 11.10. Diremos que uma sucessão (v_n) tem uma *ordem de grandeza superior* a outra sucessão (u_n), e escreveremos $u_n \ll v_n$ ou $v_n \gg u_n$, quando

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 0 \,.$$

A seguinte proposição é bastante útil no levantamento de indeterminações do tipo $0 \cdot \infty$, ∞/∞ e $0/0$.

Proposição 11.11. *Para quaisquer $1 < a \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$, tem-se que*

$$n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n \,.$$

Dem. Próxima aula. □

Exemplo 11.12. (Ficha 3, I 17.(c))

$$\begin{aligned}\lim \frac{2^n+(n+1)!}{3^n+n!} &= \lim \frac{n!\left(\frac{2^n}{n!}+(n+1)\right)}{n!\left(\frac{3^n}{n!}+1\right)}\\ &= \lim \frac{\frac{2^n}{n!}+(n+1)}{\frac{3^n}{n!}+1}\\ &= \frac{0+(+\infty)}{0+1} \qquad \text{(porque } 2^n \ll n! \text{ e } 3^n \ll n!\text{)}\\ &= +\infty\,. \end{aligned} \tag{19}$$

12. Aula – 24 de Outubro de 2005

Última Aula. Recta Acabada, Indeterminações e Ordens de Grandeza. Levantamento de Indeterminações em Limites de Sucessões.

Começaremos esta aula por fazer a demonstração de alguns dos resultados enunciados.

Demonstração do Teorema 11.8. Recordemos o seu enunciado: se (u_n) é uma sucessão de termos positivos e $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \in \overline{\mathbb{R}}$, então $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$.

O exercício seguinte, cujo ponto (ii) é relevante para a demonstração do Teorema 11.8, pode ser resolvido de forma simples usando o Método de Indução.

Exercício 12.1. Sejam (u_n) uma sucessão de termos positivos, $a \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < a$ e $N \in \mathbb{N}$. Então

(i)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\,,\ \forall\, n \geq N \Rightarrow u_n = a^n \frac{u_N}{a^N}\,,\ \forall\, n \geq N\,;$$

(ii)

$$a-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a+\varepsilon\,,\ \forall\, n \geq N \Rightarrow (a-\varepsilon)^n \frac{u_N}{(a-\varepsilon)^N} < u_n < (a+\varepsilon)^n \frac{u_N}{(a+\varepsilon)^N}\,,\ \forall\, n > N\,.$$

Dem. (Teorema 11.8) Faremos apenas o caso $0 < a < +\infty$, deixando os casos $a = 0$ e $a = +\infty$ como exercício.

Tendo em conta que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, sabemos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow a-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a+\varepsilon\,.$$

Em particular, se $0 < \varepsilon < a$ temos pelo Exercício 12.1 que

$$\begin{aligned}&(a-\varepsilon)^n \frac{u_N}{(a-\varepsilon)^N} < u_n < (a+\varepsilon)^n \frac{u_N}{(a+\varepsilon)^n}\\ \Rightarrow\ &(a-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{u_N}{(a-\varepsilon)^N}} < \sqrt[n]{u_n} < (a+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{u_N}{(a+\varepsilon)^N}}\,,\end{aligned}$$

para todo o $n > N$. Tendo em conta que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{u_N}{(a-\varepsilon)^N}} = \left(\frac{u_N}{(a-\varepsilon)^N}\right)^0 = 1 = \left(\frac{u_N}{(a+\varepsilon)^N}\right)^0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{u_N}{(a+\varepsilon)^N}}$$

e que $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, podemos concluir que de facto $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$. □

Exercício 12.2. Mostre que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ e que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Demonstração da Proposição 11.11. Recordemos o seu enunciado: para quaisquer $1 < a \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ tem-se que $n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

Dem.
(i) Tendo em conta o primeiro resultado do Exercício 12.2, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^p}{a} = \frac{1}{a} < 1\,.$$

Logo, existem $0 < \varepsilon < 1$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} < (1-\varepsilon) \quad \text{para todo o } n > N \\ \Rightarrow \quad & 0 < \frac{n^p}{a^n} < (1-\varepsilon)^n \quad \text{para todo o } n > N. \end{aligned}$$

Como

$$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow |1-\varepsilon| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n = 0\,,$$

conclui-se pelo Princípio do Encaixe ou da Sucessão Enquadrada (Teorema 8.5) que de facto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0\,.$$

(ii) Tendo em conta o segundo resultado do Exercício 12.2, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{+\infty} = 0\,.$$

Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} & 0 < \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} < \frac{1}{2} \quad \text{para todo o } n > N \\ \Rightarrow \quad & 0 < \frac{a^n}{n!} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{para todo o } n > N. \end{aligned}$$

Como $\lim(1/2)^n = 0$, conclui-se novamente pelo Princípio do Encaixe que de facto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\,.$$

(iii) Como

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N},$$

o Princípio do Encaixe implica imediatamente que

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

□

Séries Numéricas. O tema que agora vamos iniciar é motivado pelo seguinte problema: dada uma sucessão real $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, determinar quando é que é possível atribuir significado preciso à *soma de todos os elementos da sucessão* (a_k), i.e. determinar a *soma* da

$$\textit{série} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \text{ somatório com um número infinito de parcelas.}$$

Quando tal for possível e a soma obtida for finita, diremos que a série é *convergente*.

O exemplo seguinte ilustra o caso trivial em que uma série numérica se reduz a um somatório com um número finito de parcelas.

Exemplo 12.3. Suponhamos que a sucessão (a_k) é tal que, a partir de certa ordem, todos os seus termos são iguais a zero, i.e. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k > N \Rightarrow a_k = 0$. Temos então que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k \,,$$

i.e. a soma da série é igual ao somatório com um número finito de parcelas. Assim, qualquer série deste tipo é convergente.

Veremos agora alguns exemplos importantes de séries, em que a resposta ao problema anterior, não sendo trivial como a do exemplo anterior, pode ser obtida de forma natural e explícita.

Séries Geométricas. Suponhamos que (a_k) é uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão $r \in \mathbb{R}$, i.e.

$$a_k = r^k \,, \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Sabemos do Exemplo 7.1 que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \,, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \text{ e } r \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \,.$$

Por outro lado, sabemos do Exemplo 8.8 que

$$\text{se} \quad |r| < 1 \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \,.$$

Logo, quando $|r| < 1$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \,.$$

Faz então sentido dizer que

$$\text{a série } \sum_{k=0}^{\infty} r^k \text{ é convergente quando } |r| < 1, \text{ com soma igual a } \frac{1}{1 - r} \,.$$

Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r} \,, \ \text{se } |r| < 1. \tag{20}$$

Exercício 12.4. Usando indução matemática, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{1 - r^n}{1 - r} \cdot r \,, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ e } r \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \,.$$

Usando este resultado, justifique porque faz sentido dizer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1 - r} \,, \ \text{se } |r| < 1. \tag{21}$$

Definição 12.5. Séries cujas parcelas são os termos de uma progressão geométrica designam-se por *séries geométricas*.

Exemplo 12.6. (Ficha 3, II 1.(b)) Pretende-se mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 \,.$$

Tendo em conta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3}{3^n} = 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \,,$$

temos que a série é geométrica com razão $r = 1/3$. Concluimos assim que se trata de uma série convergente, pois $|r| = 1/3 < 1$, e podemos usar a fórmula (21) para calcular a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\,.$$

Séries telescópicas ou de Mengoli. Suponhamos que (a_k) é uma sucessão real com termo geral da forma

$$a_k = u_k - u_{k+1}\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \text{onde } (u_k) \text{ é também uma sucessão real.}$$

Usando a propriedade telescópica do somatório (Teorema 6.6), temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - \lim u_{n+1}\,.$$

Faz então sentido dizer que

$$\text{a série } \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) \text{ é convergente se e só se a sucessão } (u_n) \text{ é convergente,}$$

e nesse caso a sua soma é igual a $(u_1 - \lim u_n)$. Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - \lim u_n\,. \tag{22}$$

Exemplo 12.7. Pretende-se mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

Tendo em conta que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,,$$

podemos escrever a série na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)\,.$$

A série da direita é de Mengoli com $u_n = 1/n$. Temos então que a série é convergente, pois $u_n = 1/n \to 0$, e podemos usar a fórmula (22) para calcular a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} - \lim \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1\,.$$

13. Aula – 26 de Outubro de 2005

Última Aula. Séries numéricas: $\sum_k a_k$.

- Séries geoméricas:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}\,,\ \text{se } |r| < 1.$$

- Séries de Mengoli: se (u_n) é uma sucessão convergente, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - \lim u_n\,.$$

Mais Séries de Mengoli.

Exercício 13.1. Dada uma sucessão real (u_k) mostre, usando indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+p}) = \sum_{k=1}^{p} u_k - \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\,,\ \forall\, n, p \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq p\,.$$

Usando este resultado, justifique porque faz sentido dizer que, dado um $p \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\text{a série } \sum_{k=1}^{\infty}(u_k - u_{k+p}) \text{ é convergente se e só se a sucessão } (u_n) \text{ é convergente,}$$

e nesse caso

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k - u_{k+p}) = \sum_{k=1}^{p} u_k - p \cdot (\lim u_n)\,. \tag{23}$$

Definição 13.2. Séries da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k - u_{k+p})\,,$$

onde (u_k) é uma sucessão real e $p \in \mathbb{N}$ é um número natural fixo, designam-se por *séries telescópicas ou de Mengoli*.

Exemplo 13.3. (Ficha 3, II 1.(c)) Pretende-se mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}\,.$$

Tendo em conta que

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{n+1}\,,$$

podemos escrever a série na forma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\,.$$

A série da direita é de Mengoli com $u_n = 1/n$ e $p = 2$. Temos então que a série é convergente, pois $u_n = 1/n$ é uma sucessão convergente, e podemos usar a fórmula (23) para calcular a sua soma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot \lim \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 2 \cdot 0\right) = \frac{3}{4}\,.$$

Nota 13.4. Podem, e devem, fazer já todas as alíneas do exercício II 1 da Ficha 3.

Séries Convergentes e Séries Divergentes. O estudo da convergência de uma série numérica arbitrária

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

é feito com base na correspondente *sucessão de somas parciais* (s_n), cujo termo geral é dado por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Definição 13.5. Uma série numérica diz-se *convergente* quando a correspondente sucessão de somas parciais for convergente (em $\mathbb{R}$). Nesse caso, diremos que a *soma* da série é igual ao limite da sua sucessão de somas parciais:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\,.$$

Uma série numérica diz-se *divergente* quando não é convergente.

Teorema 13.6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergente } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Dem. Sendo a série convergente, sabemos então que a sucessão de somas parciais

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

é convergente. Logo, a sua subsucessão (s_{n+1}) também é convergente e tem o mesmo limite. Temos então que

$$0 = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\,,$$

pelo que $\lim a_n = 0$. □

Nota 13.7. A implicação contrária à especificada no Teorema 13.6 não é verdadeira, i.e.

$$\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_k a_k \text{ convergente.}$$

Consideremos por exemplo a sucessão (a_n) com termo geral $a_n = 1/\sqrt{n}$. Temos então que (a_n) é convergente e

$$\lim a_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0\,.$$

No entanto, a alínea (f) do exercício II 1. da Ficha 2 (resolvido por indução numa aula prática) diz-nos que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

pelo que

$$\lim s_n \geq \lim \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim s_n = +\infty$$

e portanto

$$\text{a série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ é divergente.} \tag{24}$$

Nota 13.8. O Teorema 13.6 pode ser usado como *critério de divergência* para séries numéricas, pois o seu resultado é logicamente equivalente ao seguinte:

$$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_k a_k \text{ divergente.}$$

Quando aplicado por exemplo a séries geométricas, tendo em conta que

$$r^n \not\to 0 \text{ quando } |r| \geq 1$$

e que séries geométricas são convergente quando $|r| < 1$, permite-nos concluir que

$$\text{a série geométrica } \sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ é } \begin{cases} \text{convergente,} & \text{se } |r| < 1; \\ \text{divergente,} & \text{se } |r| \geq 1. \end{cases} \tag{25}$$

Séries de Termos Não-Negativos (STNN). Séries de termos não-negativos (STNN) são séries da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \quad \text{com} \quad a_k \geq 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Teorema 13.9. *Uma STNN $\sum_k a_k$ é convergente se e só se a sua sucessão de somas parciais (s_n) for majorada.*

Dem. Por definição, a série é convergente se e só se

$$\text{a sucessão } s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ for convergente.}$$

Como $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos que a sucessão (s_n) é monótona crescente. Logo, segue dos Teoremas 9.3 e 9.6 que (s_n) é convergente se e só se for majorada. □

Exemplo 13.10. (Série Harmónica) O Teorema anterior e Exercício seguinte implicam imediatamente que:

$$\text{a série } \textit{harmónica} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{é } \textit{divergente.} \tag{26}$$

Exercício 13.11. Usando indução matemática, mostre que a subsucessão (s_{2^n}) da sucessao de somas parciais (s_n) da série harmónica satisfaz a seguinte desigualdade:

$$s_{2^n} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Critério Geral de Comparação para STNN.

Teorema 13.12. (Critério Geral de Comparação para STNN) *Sejam (a_k) e (b_k) duas sucessões reais tais que*

$$0 \leq a_k \leq b_k\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Tem-se então que:

(i)
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{convergente;}$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{divergente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{divergente.}$$

Dem. Sejam (s_n) e (t_n) as sucessões de somas parciais das séries dadas, i.e.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\,.$$

Temos naturalmente que

$$0 \leq a_k \leq b_k\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq s_n \leq t_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Usando o Teorema 13.9, podemos então concluir que:
(i) $\sum_k b_k$ convergente $\Rightarrow$ (t_n) majorada $\Rightarrow$ (s_n) majorada $\Rightarrow$ $\sum_k a_k$ convergente.
(ii) $\sum_k a_k$ divergente $\Rightarrow$ (s_n) não-majorada $\Rightarrow$ (t_n) não-majorada $\Rightarrow$ $\sum_k b_k$ divergente. □

Nota 13.13. Nas condições do Teorema 13.12, ou seja assumindo que $0 \leq a_k \leq b_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, as implicações contrárias às especificadas não são verdadeiras, i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergente} \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergente}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergente} \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergente.}$$

14. Aula – 28 de Outubro de 2005

Última Aula. STNN: $\sum_n a_n$ com $a_n \geq 0$. Teorema 13.12 – Critério Geral de Comparação para STNN: se $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então

(i) $\sum_n b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente;
(ii) $\sum_n a_n$ divergente $\Rightarrow \sum_n b_n$ divergente.

Exemplo 14.1. Pretendemos estudar a convergência da STNN

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Temos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$,

$$n^2 = n \cdot n > n(n-1) \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}\,.$$

Como

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$$

e tendo em conta o Exemplo 12.7 onde se estudou a série da direita, sabemos que a série da esquerda é convergente com soma igual a 1. Usando então a desigualdade anterior e o Critério Geral de Comparação do Teorema 13.12, podemos concluir que

$$\text{a série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{é convergente.} \tag{27}$$

A sua soma está estritamente entre 1 e 2, visto que

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + 1 = 2\,.$$

Nota 14.2. Na realidade,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ !!$$

Este facto foi descoberto pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) em 1736.

Série de Dirichlet. Pretendemos estudar a convergência da chamada *Série de Dirichlet*, i.e. uma STNN da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(0) Temos que

$$\alpha \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \nrightarrow 0\,.$$

Assim, usando o resultado do Teorema 13.6, podemos concluir que

$$\text{a série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{é divergente quando } \alpha \leq 0.$$

(i) Temos que

$$0 < \alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

Como sabemos que a série harmónica $\sum_n 1/n$ é divergente (Exemplo 13.10), podemos usar esta desigualdade e o Critério Geral de Comparação do Teorema 13.12 para concluir que

$$\text{a série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{é divergente quando } 0 < \alpha \leq 1.$$

(ii) Temos também que

$$\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Como sabemos que a série $\sum_n 1/n^2$ é convergente (Exemplo 14.1), podemos usar esta desigualdade e o Critério Geral de Comparação do Teorema 13.12 para concluir que

$$\text{a série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{é convergente quando } \alpha \geq 2.$$

(iii) A natureza da série de Dirichlet quando $1 < \alpha < 2$ pode ser determinada com base na seguinte análise. Observemos primeiro que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \cdots \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \cdots\right. \\
&< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + 8 \cdot \frac{1}{8^\alpha} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n .
\end{aligned}$$

Temos assim que a série de Dirichlet é majorada por uma série geométrica de razão $r = 1/2^{\alpha-1}$. Como

$$\alpha > 1 \Rightarrow |r| = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1\,,$$

temos que a série geométrica é neste caso convergente. Logo, usando novamente o Critério Geral de Comparação do Teorema 13.12 concluimos que de facto

$$\text{a série} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{é convergente quando } \alpha > 1.$$

Resumindo:

$$\text{a série de Dirichlet} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente}, & \text{se } \alpha \leq 1; \\ \text{convergente}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} \tag{28}$$

Outro Critério de Comparação para STNN.

Teorema 14.3. *Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais de termos positivos, tais que*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty.$$

Então,

$$\text{as séries } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ são da mesma natureza,}$$

i.e. ou ambas convergentes ou ambas divergentes.

Dem. A hipótese

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty,$$

garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n > N \Rightarrow \frac{L}{2} &< \frac{a_n}{b_n} < 2L \\ \Rightarrow \frac{L}{2} \cdot b_n &< a_n < 2L \cdot b_n \,. \end{aligned}$$

Basta agora aplicar o Critério Geral de Comparação do Teorema 13.12 a estas desigualdades. □

Exercício 14.4. No contexto do Teorema 14.3, o que é que se pode dizer quando $L = 0$ ou $L = +\infty$?

Exemplo 14.5. (Ficha 3, II 2.(d)) Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \,.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série harmónica $\sum 1/n$. De facto, como

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 < +\infty \,,$$

sabemos pelo Teorema 14.3 que as séries são da mesma natureza. Como a série harmónica é divergente (Exemplo 13.10), concluimos que

$$\text{a série} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{também é divergente.}$$

Resumindo. Vejamos de forma resumida o que aprendemos sobre séries numéricas até ao momento:

(i) Séries geométricas $\sum r^n$ são convergentes sse $|r| < 1$ e nesse caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \,.$$

(ii) Séries telescópicas ou de Mengoli $\sum_n (u_n - u_{n+p})$, com $p \in \mathbb{N}$ fixo, são convergentes sse a sucessão (u_n) é convergente e nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+p}) = \sum_{n=1}^{p} u_n - p \cdot \lim u_n \,.$$

(iii) Série de Dirichlet ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{divergente}, & \text{se } \alpha \leq 1; \\ \text{convergente}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

(iv) $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \to 0$.

(v) STNN - critérios de comparação:

(a) se $0 \leq a_n \leq b_n$ então

$$\left(\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.} \right) \quad \text{e} \quad \left(\sum a_n \text{ div.} \Rightarrow \sum b_n \text{ div.} \right) .$$

(b) se $a_n, b_n \geq 0$ e $\lim a_n/b_n = L$ com $0 < L < +\infty$, então $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza.

Exemplos.

Exemplo 14.6. (Ficha 3, II 2.(a)) Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{n-2}{3n+1}\,.$$

Como

$$\lim \frac{n-2}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0\,,$$

concluimos que a série não é convergente.

Exemplo 14.7. (Ficha 3, II 2.(g)) Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{n!}{(n+2)!}\,.$$

Como

$$0 < \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} < \frac{1}{n^2}\,,$$

e tendo em conta que $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente (série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$, concluimos por comparação que a série dada também é convergente.

Neste exemplo é até possível calcular a soma da série. De facto, como

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\,,$$

temos que a série dada é de Mengoli com $u_n = 1/(n+1)$ e $p = 1$. A sua soma é então dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{1+1} - 1 \cdot \lim \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Exemplo 14.8. (Ficha 3, II 2.(l)) Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^3\,.$$

Como

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,,$$

temos que

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^3 = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^3} < \frac{1}{(2\sqrt{n})^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Tendo em conta que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente (série de Dirichlet com $\alpha = 3/2 > 1$, concluimos por comparação que a série dada também é convergente.

15. Aula – 31 de Outubro de 2005

Últimas Aulas. STNN: $\sum_n a_n$ com $a_n \geq 0$. Teorema 13.12 – Critério Geral de Comparação para STNN: se $0 \leq a_n \leq b_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, então

(i) $\sum_n b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente;
(ii) $\sum_n a_n$ divergente $\Rightarrow \sum_n b_n$ divergente.

Teorema 14.3 – Corolário do Critério Geral de Comparação para STNN:
se $a_n, b_n > 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e $\lim a_n/b_n = L$ com $0 < L < +\infty$, então $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ são da mesma natureza.

Critério da Raiz para STNN.

Teorema 15.1. *Seja $\sum_n a_n$ uma série numérica, com $a_n \geq 0$ e tal que*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = R \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Então:

(a) *se $R < 1$ a série $\sum_n a_n$ é convergente.*
(b) *se $R > 1$ a série $\sum_n a_n$ é divergente.*
(c) *se $R = 1$ o critério é inconclusivo.*

Dem.
(a) Sabemos por hipótese que $\lim \sqrt[n]{a_n} = R < 1$. Existem então $r \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $R < r < 1$ e

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < r \\ &\Rightarrow 0 \leq a_n < r^n\,. \end{aligned}$$

Como $r \in \mathbb{R}$ é tal que $|r| = r < 1$, temos que a série geométrica $\sum_n r^n$ é convergente. Podemos então concluir por comparação que $\sum_n a_n$ é convergente.
(b) Sabemos por hipótese que $\lim \sqrt[n]{a_n} = R > 1$. Existem então $r \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $1 < r < R$ e

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow 1 < r \leq \sqrt[n]{a_n} \\ &\Rightarrow 1 < r^n \leq a_n\,. \end{aligned}$$

Como $r \in \mathbb{R}$ é tal que $|r| = r > 1$, temos que a série geométrica $\sum_n r^n$ é divergente. Podemos então concluir por comparação que $\sum_n a_n$ é divergente.
(c) Consideremos duas séries numéricas, uma com termo geral $a_n = 1/n$ e outra com termo geral $a_n = 1/n^2$. Temos em ambos os casos que $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, mas

$$\sum_n \frac{1}{n} \text{ é divergente enquanto que } \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ é convergente.}$$

□

Exemplo 15.2. (Ficha 4, I 4.(m)) Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Tendo em conta que

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(e^{-1}\right)^1 = \frac{1}{e}$$

e $R = 1/e < 1$, concluimos pelo Critério da Raiz (Teorema 15.1) que a série dada é convergente.

Critério da Razão para STNN.

Teorema 15.3. *Seja $\sum_n a_n$ uma série numérica, com $a_n > 0$ e tal que*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = R \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Então:

(a) *se $R < 1$ a série $\sum_n a_n$ é convergente.*
(b) *se $R > 1$ a série $\sum_n a_n$ é divergente.*
(c) *se $R = 1$ o critério é inconclusivo.*

Dem. Como, por hipótese, existe o limite de a_{n+1}/a_n, sabemos pelo Teorema 11.8 que

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = R\,.$$

Basta agora aplicar o Teorema 15.1. □

Exemplo 15.4. (Ficha 4, I 4.(j)) Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{n!}{n^n}\,.$$

Fazendo $a_n = n!/n^n$, temos então que

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} = R\,.\end{aligned}$$

Como $R = 1/e < 1$, concluimos pelo Critério da Razão (Teorema 15.3) que a série dada é convergente.

Dízimas Periódicas e Números Racionais. Qualquer número real admite uma representação decimal da forma

$$\begin{aligned}a_0, a_1a_2a_3\cdots &= \frac{a_0}{10^0} + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}\,,\end{aligned}$$

com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_n \in \mathbb{N}_0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Quando esta representação decimal é uma dízima periódica, a série que se obtém torna-se numa série geométrica cuja soma é um número racional fácil de determinar. Vejamos alguns exemplos.

1)

$$0,444444\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^n} = 4\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 4\cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}\,.$$

2)

$$0,515151\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{51}{10^{2n}} = 51\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 51\cdot \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{51}{00}\,.$$

3)

$$0,123123123\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{123}{10^{3n}} = 123\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^n = 123\cdot \frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{123}{999}\,.$$

4)

$$0,999999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9\cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{9} = 1 = 1,000000\cdots !!!$$

Séries Alternadas e o Critério de Leibniz.

Definição 15.5. Uma série numérica da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n\,,\ \text{com } a_n \geq 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

diz-se uma *série alternada*.

Teorema 15.6. (Critério de Leibniz) *Se (a_n) é uma sucessão decrescente com $\lim a_n = 0$, i.e.*

$$\textit{se} \quad a_n \searrow 0\,,$$

então

$$\textit{as série alternadas} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \textit{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n \quad \textit{são convergentes.}$$

Dem. Provaremos apenas a convergência de $\sum(-1)^{n-1}a_n$, sendo a outra inteiramente análoga. Seja (s_k) a sucessão de somas parciais dada por

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}a_n\,,$$

e consideremos as suas subsucessões (s_{2k}) e (s_{2k-1}). Temos então que:
(i) (s_{2k}) é crescente, pois

$$s_{2(k+1)} - s_{2k} = s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+2} + (-1)^{2k}a_{2k+1} = a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0\,,$$

onde a última desigualdade é consequência de (a_n) ser por hipótese uma sucessão decrescente.
(ii) (s_{2k}) é majorada, pois

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_1) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1\,,$$

visto que o facto de (a_n) ser decrescente implica que cada uma das subtracções entre parentesis dá um resultado maior ou igual a zero.
(iii) Mostra-se de forma análoga que a subsucessão (s_{2k-1}) é decrescente e minorada por $(a_1 - a_2)$.
Concluimos assim que (s_{2k}) e (s_{2k-1}) são sucessões monótonas e limitadas, pelo que ambas são convergentes. Como

$$\lim s_{2k} - \lim s_{2k-1} = \lim(s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim(-1)^{2k-1}a_{2k} = \lim(-a_{2k}) = 0\,,$$

onde a última igualdade é consequência da hipótese $\lim a_n = 0$, temos também que

$$\lim s_{2k} = \lim s_{2k-1}\,.$$

Usando o resultado do exercício 1.(a) do grupo I da Ficha 3, podemos então concluir que a sucessão (s_k) de somas parciais é convergente, pelo que a série alternada $\sum(-1)^{n-1}a_n$ é convergente. □

Exemplo 15.7. Como

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0\,,$$

concluimos pelo Critério de Leibniz que

$$\text{as séries harmónicas alternadas} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n} \quad \text{são convergentes.}$$

Veremos mais tarde que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2\ !!$$

16. Aula – 02 de Novembro de 2005

Última Aula. Séries de termos sem sinal fixo.

- Séries alternadas: $\sum_n(-1)^{n-1}a_n$ com $a_n \geq 0$.
- Critério de Leibniz: $a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_n(-1)^{n-1}a_n$ convergente.
- Exemplo: $\sum_n(-1)^{n-1}/n$ é convergente.

Convergência Simples e Absoluta. O exemplo anterior ilustra uma situação em que uma série $\sum_n b_n$ é convergente (a série harmónica alternada), enquanto que a correspondente série de módulos $\sum_n |b_n|$ é divergente (a série harmónica). Temos assim que, em geral,

$$\sum_n b_n \text{ convergente } \not\Rightarrow \sum_n |b_n| \text{ convergente.}$$

A implicação contrária é no entanto verdadeira.

Teorema 16.1. *Se $\sum_n |b_n|$ é convergente, então $\sum_n b_n$ também é convergente e*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\,.$$

A definição seguinte introduz notação que é útil para a demonstração deste teorema.

Definição 16.2. Dado um número real $b \in \mathbb{R}$, define-se:

$$b^+ = \max\{b, 0\} = \text{ \textit{parte positiva} de } b;$$
$$b^- = -\min\{b, 0\} = \text{ \textit{parte negativa} de } b.$$

Exercício 16.3. Verifique que

$$0 \leq b^+, b^- \leq |b|\,, \quad b = b^+ - b^- \quad \text{e} \quad |b| = b^+ + b^-\,,$$

pelo que em particular

$$b^+ = \frac{|b| + b}{2} \quad \text{e} \quad b^- = \frac{|b| - b}{2}\,.$$

Dem. (Teorema 16.1) Tendo em conta a primeira desigualdade do exercício anterior, o critério geral de comparação diz-nos que se $\sum_n |b_n|$ é convergente então $\sum_n b_n^+$ e $\sum_n b_n^-$ também são convergentes. Como

$$\sum_n b_n = \sum_n \left(b_n^+ - b_n^-\right) = \sum_n b_n^+ - \sum_n b_n^-\,,$$

podemos então concluir que $\sum_n b_n$ é convergente. Relativamente à sua soma, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_n b_n\right| &= \left|\left(\sum_n b_n^+\right) - \left(\sum_n b_n^-\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_n b_n^+\right| + \left|\sum_n b_n^-\right| && \text{(pela desig. triangular)} \\
&= \sum_n \left(b_n^+ + b_n^-\right) && \text{(porque } b_n^+, b_n^- \geq 0\text{)} \\
&= \sum_n |b_n|\,.
\end{aligned}$$

□

Definição 16.4. Uma série $\sum_n b_n$ diz-se *absolutamente convergente* se a correspondente série de módulos $\sum_n |b_n|$ é convergente.

Uma série $\sum_n b_n$ diz-se *simplesmente convergente* se é convergente, mas a correspondente série de módulos $\sum_n |b_n|$ é divergente.

Exemplos.

Exemplo 16.5. Como, para qualquer $0 < \alpha \in \mathbb{R}$,

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \searrow 0\,,$$

temos pelo Critério de Leibniz que

$$\text{a série} \quad \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad \text{é convergente para qualquer } 0 < \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right| = \sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{divergente}, & \text{se } \alpha \leq 1; \\ \text{convergente}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Temos então que:

$$\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{simplesmente convergente}, & \text{se } 0 < \alpha \leq 1; \\ \text{absolutamente convergente}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Exemplo 16.6. Se $\sum_n b_n$ é uma série convergente de termos com sinal fixo, i.e. $b_n \geq 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ou $b_n \leq 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\sum_n b_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo 16.7. (Ficha 4, I 6.(b)) Pretende-se determinar se a série

$$\sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

Estudemos primeiro a série dos módulos

$$\sum_n \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \right| = \sum_n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \, .$$

Como

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+100}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{n}{n+100} = 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 < +\infty \, ,$$

temos por comparação que a série dos módulos tem a mesma natureza da série $\sum 1/\sqrt{n}$. Sendo esta uma série de Dirichlet com $\alpha = 1/2 \leq 1$, logo divergente, concluimos que a série dos módulos é divergente.

A série original é alternada com $a_n = \sqrt{n}/(n+100)$. É claro que

$$\lim a_n = \lim \frac{\sqrt{n}}{n+100} = 0 \, .$$

Para verificar se (a_n) é uma sucessão decrescente, temos que determinar o sinal de $a_n - a_{n+1}$. Como $a_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos que este sinal é igual ao sinal de

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})(a_n + a_{n+1}) \, .$$

Como

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n+1}^2 &= \frac{n}{(n+100)^2} - \frac{n+1}{(n+101)^2} = \frac{n(n+101)^2 - (n+1)(n+100)^2}{(n+100)^2(n+101)^2} \\ &= \frac{n^2 + n - 100^2}{(n+100)^2(n+101)^2} \, , \end{aligned}$$

concluimos que $a_n - a_{n+1} > 0$ para $n \geq 100$, pelo que a partir desta ordem a sucessão (a_n) é de facto decrescente. Temos assim que $a_n \searrow 0$, pelo que o Critério de Leibniz garante a convergência da série alternada original.

Podemos finalmente concluir que

$$\text{a série} \quad \sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \quad \text{é simplesmente convergente.}$$

Teorema de Riemann. Enunciaremos agora, sem demonstração, dois resultados que ilustram bem a diferença entre o comportamento das séries absolutamente convergentes e o das séries simplesmente convergentes.

Teorema 16.8. *Qualquer série obtida por reordenação dos termos de uma série absolutamente convergente é também absolutamente convergente, com soma igual à soma da série original.*

Teorema 16.9. (Riemann) *Sejam $\sum_n b_n$ uma série simplesmente convergente e $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ arbitrário. Então, existem reordenações de $\sum_n b_n$ com soma igual a β.*

Nota 16.10. As demonstrações destes dois teoremas estão feitas tanto no primeiro volume do Apostol como no livro do Professor Campos Ferreira.

Exemplo 16.11. Consideremos a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 \, .$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\log 2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} - \cdots \\
&= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \cdots \\
\Rightarrow \frac{3}{2}\log 2 &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \\
&= \text{reordenação da série harmónica alternada,}
\end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta da adição termo a termo das duas primeiras.

17. Aula – 04 de Novembro de 2005

Séries de Potências.

Definição 17.1. Dada uma sucessão real (a_n) designa-se por *série de potências de x com coeficientes a_n* a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots \ . \tag{29}$$

O seu *domínio de convergência* é o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \sum_n a_n \cdot x^n \text{ é convergente} \right\} \ .$$

Nota 17.2. É imediato da definição que zero pertence ao domínio de convergência D de qualquer série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$.

Exemplo 17.3. Consideremos a sucessão $(a_n = n!)$ e a correspondente série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n \ .$$

Quando $0 \neq x \in \mathbb{R}$ o termo geral desta série não tende para zero, pelo que a série é divergente. Este é assim um exemplo em que $D = \{0\}$.

Exemplo 17.4. Consideremos a sucessão $(a_n = 1/n!)$ e a correspondente série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \ .$$

Analisando a série dos módulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

pelo Critério da Razão (Teorema 15.3), e como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1 \,, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \,,$$

concluimos que esta série de potências é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Este é assim um exemplo em que $D = \mathbb{R}$.

Exemplo 17.5. Consideremos a sucessão $(a_n = 1/2^n)$ e a correspondente série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^n \ .$$

Esta série é de facto uma série geométrica de razão $r = x/2$. Sabemos então que

$$\text{a série é absolutamente convergente quando } \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in]-2,2[$$

e também que

$$\text{a série é divergente quando } \left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\ .$$

Este é assim um exemplo em que $D =]-2,2[$.

Raio de Convergência.

Teorema 17.6. *Dada uma série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$, existe um número $0 \leq R \in \overline{\mathbb{R}}$, designado por* raio de convergência*, tal que:*

(i) *a série é absolutamente convergente quando $|x| < R$, i.e. para $x \in]-R,R[$;*
(ii) *a série é divergente quando $|x| > R$, i.e. para $x \in]-\infty,-R[\cup]R,+\infty[$;*
(iii) *a série pode ser tanto convergente como divergente quando $x = R$ e $x = -R$.*

Nota 17.7. Este Teorema diz-nos em particular que o domínio de convergência de uma série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$ é sempre um intervalo, também designado por *intervalo de convergência*, da forma

$$]-R,R[\quad \text{ou} \quad [-R,R] \quad \text{ou} \quad]-R,R] \quad \text{ou} \quad [-R,R[\ .$$

Quando $R = 0$ o domínio de convergência da série de potências é $D = \{0\}$, como acontece no Exemplo 17.3. Quando $R = +\infty$ o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$, como acontece no Exemplo 17.4. No Exemplo 17.5 temos que $D =]-R,R[$ com $R = 2$.

A demonstração do Teorema 17.6 será feita com base no seguinte lema.

Lema 17.8. *Seja (a_n) uma sucessão real e suponhamos que existe um número real $0 \neq y \in \mathbb{R}$ tal que a série $\sum_n a_n \cdot y^n$ é convergente. Então, a série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$ é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < |y|$.*

Dem. (Lema 17.8) O Teorema 13.6 diz-nos que

$$\sum_n a_n \cdot y^n \text{ convergente } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot y^n = 0 \, ,$$

pelo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n \cdot y^n| < 1 \, .$$

Logo, para $n \geq N$ temos que

$$|a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot y^n| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^n < \left|\frac{x}{y}\right|^n \ .$$

Assumindo que $|x| < |y|$, temos que a série geométrica de razão $r = |x/y| < 1$ é convergente. Podemos então concluir por comparação que a série $\sum_n |a_n \cdot x^n|$ é convergente, i.e. a série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$ é absolutamente convergente. □

Dem. (Teorema 17.6) Consideremos o conjunto $A \subset \mathbb{R}^+$ definido por

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \ : \ r = |x| \text{ e } \sum_n a_n \cdot x^n \text{ é convergente} \right\} \, .$$

Tem-se imediatamente que:

- se $A = \emptyset$ então $R = 0$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema;
- se A não é majorado então o Lema 17.8 garante que $R = +\infty$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Suponhamos agora que A é não-vazio e majorado. Então A tem supremo $R = \sup A \in \mathbb{R}$. Verifiquemos que este $R \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema:

- $R > 0$ porque $R \geq r > 0$ para qualquer $r \in A$;
- se $|x| > R$ então a série $\sum_n a_n \cdot x^n$ é divergente, porque neste caso $r = |x| \notin A$;

- se $|x| < R$ então a série $\sum_n a_n \cdot x^n$ converge absolutamente, porque neste caso existe $r \in A$ com $|x| < r < R$ (cf. caracterização alternativa de supremo dada pelo Corolário 4.3) e podemos então usar o Lema 17.8.
- o Exemplo 17.9 mostra que a série pode ser tanto convergente como divergente quando $|x| = R$.

□

Exemplo 17.9. Consideremos a série de potências

$$\sum_n \frac{x^n}{n} .$$

Analisando a série dos módulos

$$\sum_n \frac{|x|^n}{n}$$

pelo Critério da Razão (Teorema 15.3), e como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{n}{n+1} = |x| ,$$

concluimos que esta série de potências é absolutamente convergente quando $|x| < 1$. Por outro lado, quando $|x| > 1$ temos que o termo geral x^n/n não tende para zero pelo que a série de potências é divergente. Este é assim um exemplo em que $R = 1$.

Analisemos agora a natureza da série de potências quando $|x| = 1$. Quando $x = 1$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{x^n}{n}\right)_{x=1} = \sum_n \frac{1}{n} = \text{ série harmónica,}$$

logo divergente. Quando $x = -1$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{x^n}{n}\right)_{x=-1} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n} = \text{ série harmónica alternada,}$$

logo simplesmente convergente.

Temos assim que o domínio ou intervalo de convergência desta série de potências é $D = [-1, 1[$.

18. Aula – 07 de Novembro de 2005

Última Aula. Séries de potências: $\sum_n a_n \cdot x^n$. Vimos que existe um raio de convergência R, com $0 \leq R \leq +\infty$, tal que:

(i) a série é absolutamente convergente se $|x| < R$;
(ii) a série é divergente se $|x| > R$;
(iii) para $x = R$ ou $x = -R$ tudo pode acontecer – há que analisar com cuidado cada caso.

Determinação do Raio de Convergência.

Teorema 18.1. *Seja (a_n) uma sucessão real tal que existe em $\overline{\mathbb{R}}$ o limite $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Então, o raio de convergência da série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$ é dado por*

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Dem. Aplicando o Critério da Raiz (Teorema 15.1) à série dos módulos $\sum_n |a_n| \cdot |x|^n$, temos que

$$\lim \sqrt[n]{|a_n||x|^n} < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Logo, a série $\sum_n a_n \cdot x^n$ é absolutamente convergente se $|x| < 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Por outro lado, a série é divergente se $|x| > 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, porque neste caso o seu termo geral $a_n \cdot x^n$ não tende para zero.

Temos assim que, de facto,

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

□

Corolário 18.2. *O raio de convergência R de uma série de potências $\sum_n a_n \cdot x^n$ é dado por*

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| ,$$

sempre que o limite da direita exista.

Dem. Como

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| ,$$

temos pelo Teorema 18.1 que

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

□

Exemplos.

Exemplo 18.3. (Ficha 4, II 1.(c)) Pretende-se determinar o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot (x+3)^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

Trata-se de uma série de potências de $(x+3)$ com coeficientes $a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$. Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula do Corolário 18.2:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot \frac{(n+2)2^{n+1}}{1} = \lim \frac{n+2}{n+1} \cdot 2 = 2 .$$

Temos então que a série de potências é absolutamente convergente para

$$|x+3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+3 < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \Leftrightarrow x \in]-5, -1[,$$

e é divergente para

$$|x+3| > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[.$$

Analisemos agora a natureza da série de potências quando $|x+3| = 2$, i.e. quando $x = -5$ ou $x = -1$.

Quando $x = -5$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right)_{x=-5} = \sum_n \frac{(-5+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

Trata-se de uma série alternada com

$$a_n = \frac{1}{n+1} \searrow 0 ,$$

pelo que o Critério de Leibniz (Teorema 15.6) garante a sua convergência. A correspondente série de módulos

$$\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum_n \frac{1}{n+1}$$

é claramente da mesma natureza que a série harmónica $\sum_n 1/n$, logo divergente. Concluimos assim que a série de potências é simplesmente convergente para $x = -5$.

Quando $x = -1$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}\right)_{x=-1} = \sum_n \frac{(-1+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{n+1}\,,$$

que, como já vimos, é uma série divergente. Logo, a série de potências é divergente para $x = -1$.

Exemplo 18.4. (Ficha 4, II 7.) Seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}\,.$$

Pretende-se determinar o domínio desta função e calcular o seu valor no ponto $x = 0$.

O domínio da função g coincide naturalmente com o domínio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot (x-1)^n\,,$$

que é uma série de potências de $(x-1)$ com $a_n = 1/2^{n-1}$. Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula do Corolário 18.2:

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^n}{1} = \lim 2 = 2\,.$$

Temos então que a série de potências é absolutamente convergente para

$$|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in \,]-1,3[\,,$$

e é divergente para

$$|x-1| > 2 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[\,.$$

Analisemos agora a natureza da série de potências quando $|x-1| = 2$, i.e. quando $x = -1$ ou $x = 3$.

Quando $x = -1$ temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}\right)_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^{n-1}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,.$$

Como o termo geral $(-1)^n \nrightarrow 0$, esta série é divergente.

Quando $x = 3$ temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}\right)_{x=3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-1)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\,,$$

que é novamente uma série divergente.

Temos assim que o domínio da função g é $D = \,]-1,3[$. O cálculo do seu valor no ponto $x = 0$ pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g(0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}\right)_{x=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{2^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2 \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}\,, \end{aligned}$$

onde se usou a fórmula (21) para a soma dos termos de uma série geométrica.

Funções Reais de Variável Real. Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$, i.e.

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$D \ni x \mapsto f(x)\,.$$

O conjunto $D \subset \mathbb{R}$ onde a função f está definida é designado por *domínio* de f. O *contradomínio* de f é o conjunto

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}\,.$$

Uma função f diz-se *minorada*, *majorada* ou *limitada*, se o seu contradomínio $f(D)$ for minorado, majorado ou limitado.

O *gráfico* de uma função f é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\text{gráfico de } f \;=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in D \text{ e } y = f(x)\big\}\,.$$

Uma função f com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\textit{par} \text{ se } f(x) = f(-x)\,,\ \forall\, x \in D\,,$$
$$\textit{ímpar} \text{ se } f(x) = -f(-x)\,,\ \forall\, x \in D\,,$$
$$\textit{crescente} \text{ se } (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2))\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,,$$
$$\text{e } \textit{decrescente} \text{ se } (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2))\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,.$$

Uma função f com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\textit{periódica} \text{ com } \textit{período } T > 0 \text{ se } f(x+T) = f(x)\,,\ \forall\, x \in D\,.$$

19. Aula – 09 de Novembro de 2005

Última Aula. Demos início ao estudo de funções reais de variável real, $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que D é o domínio de f, tendo definido algumas noções importantes para esse estudo: contradomínio, gráfico, paridade, monotonia e periodicidade.

Exemplos. Apresentamos nesta secção vários exemplos de funções elementares já vossas conhecidas. Nos casos relevantes, será apresentada a sua definição por intermédio de séries de potências. Embora as propriedades fundamentais destas funções elementares possam ser deduzidas a partir das séries de potências que as definem, não o faremos aqui. Poderemos voltar a este assunto se houver tempo para falar de séries de Taylor neste curso de Análise Matemática I.

Exemplo 19.1. *Funções polinomiais* são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e. funções da forma

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,,\ \text{com } c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

O domínio de qualquer uma destas funções é $D = \mathbb{R}$.

Veremos que quando uma função polinomial tem grau ímpar o seu contradomínio é todo o $\mathbb{R}$, enquanto que quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $[m, +\infty[$ ou $]-\infty, M]$, com $m, M \in \mathbb{R}$. A Figura 1 mostra o gráfico de duas funções polinomiais.

Os exercícios 1 a 5 do grupo III da Ficha 4 apresentam algumas propriedades importantes das funções polinomiais.

Exemplo 19.2. *Funções racionais* são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e. funções da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinómios.}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, q(x) \neq 0\}\,.$$

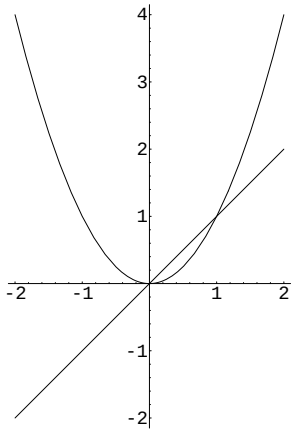

FIGURA 1. Gráfico das funções polinomiais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

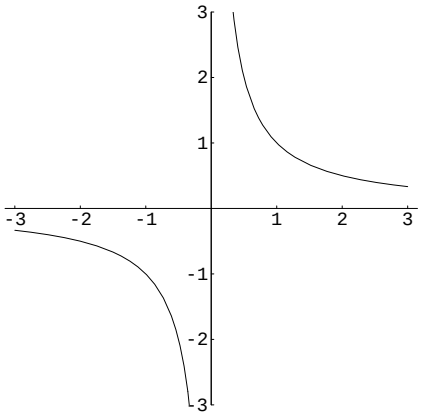

FIGURA 2. Gráfico da função racional $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$.

Um exemplo simples é a função definida por $f(x) = 1/x$, cujo gráfico está representado na Figura 2. Tanto o seu domínio como contradomínio são $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta função é ímpar, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ (mas não em todo o seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Exemplo 19.3. Tendo em conta o Teorema 11.6, a *função exponencial* é naturalmente definida por

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Usando a fórmula (17) do Binómio de Newton, é possivel mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ,$$

pelo que a função exponencial pode também ser definida por uma série de potências:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \tag{30}$$

Qualquer uma destas definições é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$ (verifiquem que o raio de convergência da série de potências é $R = +\infty$), pelo que o domínio da função exponencial é $D = \mathbb{R}$. O seu gráfico está representado na Figura 3.

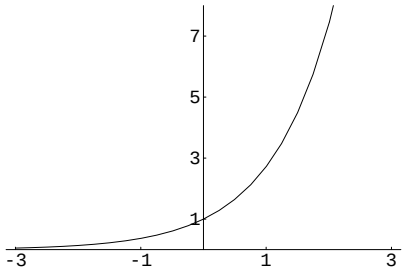

FIGURA 3. Gráfico da função exponencial.

A função exponencial é estritamente crescente, com contradomínio $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$. É assim uma função minorada mas não majorada.

Exemplo 19.4. As funções trigonométricas *seno* e *coseno* podem também ser definidas por séries de potências:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \text{e} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\,. \tag{31}$$

O raio de convergência de qualquer uma destas séries de potências é $+\infty$, pelo que o domínio das funções seno e coseno é todo o $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 4.

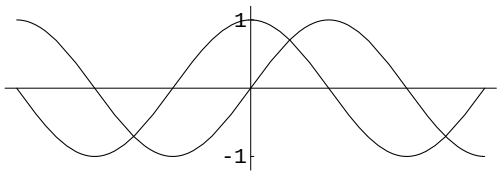

FIGURA 4. Gráfico das funções trigonométricas seno e coseno.

Qualquer uma destas funções tem por contradomínio o intervalo $[-1, 1]$, sendo portanto funções limitadas. A função seno é ímpar e periódica de período 2π, i.e.

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

A função coseno é par e também periódica de período 2π, i.e.

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

As funções seno e coseno satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{32}$$

Os exercícios 6 e 7 do grupo III da Ficha 4 apresentam outras propriedades importantes das funções seno e coseno.

Exemplo 19.5. As funções trigonométricas *tangente* e *cotangente* são definidas a partir das funções seno e coseno:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\tan(x)}\,. \tag{33}$$

O domínio da função tangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e o seu gráfico está representado na Figura 5. A função tangente é ímpar e periódica de período π, i.e.

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \text{e} \quad \tan(x+\pi) = \tan(x)\,,\ \forall\, x \in D_{\tan}\,.$$

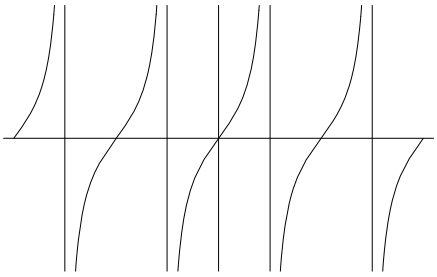

FIGURA 5. Gráfico da função trigonométrica tangente.

O domínio da função cotangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e a representação do seu gráfico fica como exercício.A função cotangente também é ímpar e periódica de período π, i.e.

$$\cot(x) = -\cot(-x) \quad \text{e} \quad \cot(x+\pi) = \cot(x)\,,\ \forall\, x \in D_{\cot}\,.$$

Exemplo 19.6. As funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico* são definidas a partir da função exponencial:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,. \tag{34}$$

Usando a expressão (30) da função exponencial numa série de potências, obtém-se facilmente que:

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}\,. \tag{35}$$

O domínio das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico é todo o $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 6.

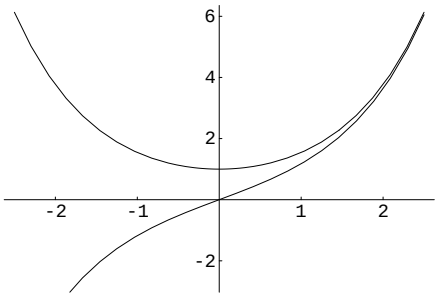

FIGURA 6. Gráfico das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico.

A função seno hiperbólico é ímpar e tem por contradomínio $\mathbb{R}$. A função coseno hiperbólico é par e tem por contradomínio o intervalo $[1, +\infty[$. Estas duas funções satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{36}$$

O exercício 8 do grupo III da Ficha 4 apresenta outras propriedades importantes das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico.

20. Aula – 11 de Novembro de 2005

Última Aula. Exemplos de funções reais de variável real: polinomiais, racionais, exponencial, trigonométricas e hiperbólicas.

Funções Injectivas e suas Inversas.

Definição 20.1. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *injectiva* se para qualquer valor do contradomínio $y \in f(D)$ existir um só ponto do domínio $x \in D$ tal que $f(x) = y$. De forma equivalente, f é injectiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,.$$

Exercício 20.2. Mostre que qualquer função estritamente monótona é injectiva. Será que uma função injectiva tem que ser estritamente monótona?

Definição 20.3. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to f(D_f) \subset \mathbb{R}$ uma função injectiva. A sua função *inversa* é definida como a função

$$\begin{aligned} f^{-1} : D_{f^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} f(D_f) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow D_f \subset \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x\,, \end{aligned}$$

onde $x \in D_f$ é o único ponto do domínio de f tal que $f(x) = y$.

Temos assim que

$$\begin{array}{ccccccccc} D_f & \stackrel{f}{\longrightarrow} & f(D_f) & = & D_{f^{-1}} & \stackrel{f^{-1}}{\longrightarrow} & f^{-1}(D_{f^{-1}}) & = & D_f \\ x & \longmapsto & f(x) & = & y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = & x \end{array}$$

e portanto

$$f^{-1}(f(x)) = x\,,\ \forall\, x \in D_f = f^{-1}(D_{f^{-1}}) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ \forall\, y \in D_{f^{-1}} = f(D_f)\,.$$

Exemplos.

Exemplo 20.4. A função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^2\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, não é injectiva em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ porque

$$p(x) = x^2 = (-x)^2 = p(-x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

No entanto, como a sua restrição ao intervalo $[0, +\infty[$ é estritamente crescente, temos que a função

$$\begin{aligned} f = p_{|\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow p(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

é injectiva. Tem assim inversa f^{-1} definida em $\mathbb{R}_0^+$, que é naturalmente a função raiz quadrada:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 7.

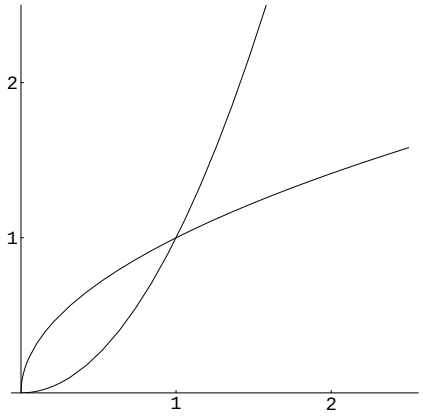

FIGURA 7. Gráfico da função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo 20.5. A função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tem assim inversa f^{-1} definida em todo o $\mathbb{R}$, que é naturalmente a função raiz cúbica:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 8.

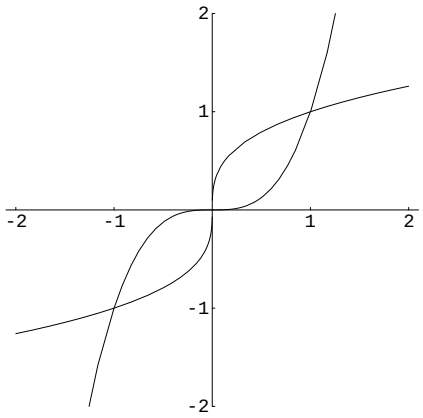

FIGURA 8. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exemplo 20.6. Os dois exemplos anteriores podem ser generalizados da seguinte forma. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que a função polinomial

$$f(x) = x^n \quad \text{é injectiva em} \begin{cases} [0, +\infty[\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{R}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

pelo que a função inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{tem domínio} \begin{cases} f\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo 20.7. A funcões trigonométricas seno e coseno, apresentadas no Exemplo 19.4, são periódicas pelo que não são certamente injectivas em todo o seu domínio. De facto, para cada valor y do seu contradomínio $[-1,1]$ há uma infinidade de pontos do domínio $\mathbb{R}$ que lhe correspondem. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(k\pi) = 0 = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) \,, \ \forall\, k \in \mathbb{Z} \,.$$

Assim, e para que possamos definir as funções inversas destas funções trigonométricas, temos que restringir os seus domínios a intervalos onde sejam injectivas.

No caso da função seno, consideramos a sua restrição ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1,1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco seno*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1} = \arcsin : [-1,1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

O seu gráfico está representado na Figura 9.

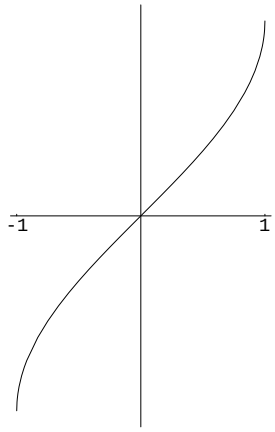

FIGURA 9. Gráfico da função trigonométrica inversa arco seno.

No caso da função coseno, consideramos a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$. A função coseno é estritamente decrescente neste intervalo, logo injectiva, e $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco coseno*:

$$\begin{aligned} \cos^{-1} = \arccos : [-1,1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

A representação do seu gráfico fica como exercício.

Exemplo 20.8. A funcão trigonométrica tangente, apresentada no Exemplo 19.5, também é periódica pelo que não é injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ é estritamente crescente, logo injectiva, e $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco tangente*:

$$\begin{aligned} \tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[\\ x &\longmapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

O seu gráfico está representado na Figura 10.

Exemplo 20.9. A função exponencial, apresentada no Exemplo 19.3, é estritamente crescente, e portanto injectiva, em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, com contradomínio $\mathbb{R}^+$. A sua inversa é a chamada

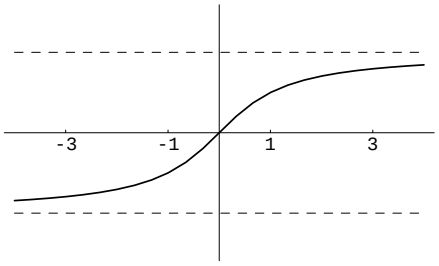

FIGURA 10. Gráfico da função trigonométrica inversa arco tangente.

função *logaritmo*:

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x) \end{aligned}$$

Os gráficos das funções exponencial e logaritmo estão representados na Figura 11.

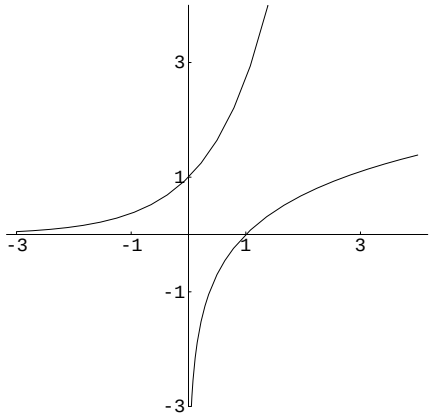

FIGURA 11. Gráfico da função exponencial e da sua inversa, a função logaritmo.

Propriedades fundamentais da função exponencial dão naturalmente origem a propriedades fundamentais da função logaritmo. Olhando por enquanto apenas para as propriedades de natureza algébrica, devem recordar as seguintes:

(i) $e^0 = 1 \Leftrightarrow \log(1) = 0$;
(ii) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}\,,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$;
(iii) $(e^x)^y = e^{x \cdot y}\,,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \log(a^b) = b \cdot \log(a)\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$.

Limite de uma Função num Ponto. Recordemos a definição de limite de uma sucessão:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = b \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} :\ n > N \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon\,.$$

Por analogia, é natural considerar a seguinte definição de limite de uma função num ponto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

Em que pontos $a \in \mathbb{R}$ faz sentido calcular o limite de uma função f? Esta questão será analisada no início da próxima aula.

21. Aula – 14 de Novembro de 2005

Última Aula. Por analogia com a definição de limite de uma sucessão, vimos ser natural considerar a seguinte definição de limite de uma função num ponto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon\,.$$

Limite de uma Função num Ponto Aderente ao Domínio. Em que pontos $a \in \mathbb{R}$ faz sentido calcular o limite de uma função f? Certamente em todos os pontos do seu domínio D, mas também nos chamados pontos aderentes a esse domínio.

Definição 21.1. Seja $D \subset \mathbb{R}$ não-vazio. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se *aderente* a D se para qualquer $\varepsilon > 0$ existem pontos de D na vizinhança de raio ε de a, i.e. se

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, x \in D\ :\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\,.$$

O *fecho* ou *aderência* de D, denotado por $\overline{D}$, é definido por

$$\overline{D} = \{a \in \mathbb{R}\ :\ a \text{ é aderente a } D\}\,.$$

Nota 21.2. Qualquer ponto $a \in D$ é aderente a D pelo que $D \subset \overline{D}$.

Exemplo 21.3. O fecho ou aderência de um intervalo aberto é naturalmente o correspondente intervalo fechado.

Exemplo 21.4. A densidade dos racionais e irracionais nos reais (Teoremas 5.7 e 5.14) é equivalente a dizer que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\,.$$

Definição 21.5. *(Limite à Cauchy)* Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in \overline{D}$ um ponto aderente ao seu domínio e $b \in \mathbb{R}$. Diremos que f tem *limite* b no ponto a, e escreveremos $\lim_{x\to a} f(x) = b$, se

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ (x \in D \text{ e } |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon\,.$$

Exercício 21.6. Usando apenas a definição anterior de limite, mostre que:

(i) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante, i.e. para a qual existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(x) = c\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identidade, i.e. $f(x) = x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

Limite de uma Função num Ponto e Sucessões.

Teorema 21.7. (Limite à Heine) *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in \overline{D}$ um ponto aderente ao seu domínio e $b \in \mathbb{R}$. Então, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ sse $f(x_n) \to b$ para qualquer sucessão real (x_n), com $x_n \in D\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e $x_n \to a$.*

Nota 21.8. Em particular, se existirem sucessões (x_n) e (y_n), com $x_n, y_n \in D\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$, $y_n \to a$ e $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$, então f não tem limite no ponto a.

Dem.
($\Rightarrow$) Hipóteses: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $x_n \in D$ e $x_n \to a$.
A provar: $f(x_n) \to b$, i.e.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ n > N \Rightarrow |f(x_n)-b| < \varepsilon\,.$$

Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário.

(i) Como $\lim_{x\to a} f(x) = b$ temos que

$$\exists\,\delta > 0\ :(x \in D \text{ e } |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon\,.$$

(ii) Como $x_n \to a$ sabemos também que

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \delta\,.$$

Então, com $N \in \mathbb{N}$ dado por (ii) e para $n > N$, temos que

$$(x_n \in D \text{ e } |x_n - a| < \delta) \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} |f(x_n) - b| < \varepsilon\,.$$

($\Leftarrow$) Hipótese: $(x_n \in D \text{ e } x_n \to a) \Rightarrow f(x_n) \to b$.
A provar: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, i.e.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : (x \in D \text{ e } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

Suponhamos por absurdo que isto não era verdade. Teríamos então que

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \forall\,\delta > 0\ \exists\,x \in D :\ |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - b| > \varepsilon\,.$$

Consideremos uma sucessão (δ_n) da forma $\delta_n = 1/n$. Para cada δ_n, existiria um $x_n \in D$ tal que

$$|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - b| > \varepsilon > 0\,.$$

Teríamos assim uma sucessão (x_n) com $x_n \in D$, $x_n \to a$ e $f(x_n) \nrightarrow b$. Isto é um absurdo, pois contraria a hipótese. □

Exercício 21.9. Use algumas das ideias apresentadas na demonstração anterior para provar a seguinte caracterização de ponto aderente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}$:

$$a \in \overline{D} \Leftrightarrow \exists \text{ sucessão } (x_n) \text{ com } x_n \in D,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \text{ e } x_n \to a.$$

Exemplos.

Exemplo 21.10. Sabemos que se $x_n \to a$ então $|x_n| \to |a|$ e $\sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{a}$. Usando o Teorema 21.7, temos então que

$$\lim_{x\to a} |x| = |a| \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{a}\,.$$

Exemplo 21.11. Consideremos a chamada *função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O seu gráfico está representado na Figura 12.

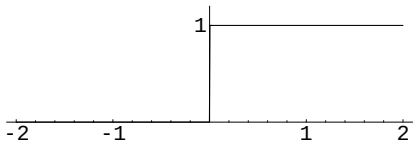

FIGURA 12. Gráfico da função de Heaviside.

Temos que

$$\lim_{x\to a} H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } a < 0; \\ 1\,, & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

Por outro lado, o $\lim_{x\to 0} H(x)$ não existe porque considerando sucessões (x_n) e (y_n) da forma $x_n = -1/n \to 0$ e $y_n = 1/n \to 0$, temos

$$\lim H(x_n) = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim H(y_n)\,.$$

Exemplo 21.12. Consideremos a chamada *função de Dirichlet* $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$D(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Temos que o $\lim_{x\to a} D(x)$ não existe para qualquer $a \in \mathbb{R}$. De facto, tendo em conta o Exemplo 21.4 e o Exercício 21.9, é possível encontrar, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, sucessões (x_n) e (y_n), com $x_n, y_n \to a$ e $x_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pelo que

$$\lim D(x_n) = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim D(y_n)\,.$$

Exemplo 21.13. Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

O seu gráfico está representado na Figura 13.

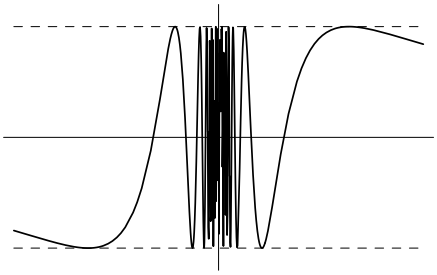

FIGURA 13. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

Temos que $0 \in \overline{D} = \mathbb{R}$ mas o $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe. De facto, considerando por exemplo sucessões (x_n) e (y_n) da forma

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0 \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \to 0 \,,$$

temos que

$$\lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim 1 = 1 \,,$$

enquanto que

$$\lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim \operatorname{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \lim \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim(-1) = -1 \,.$$

Propriedades do Limite de Funções num Ponto.

Teorema 21.14. (Limite e Operações Algébricas) *Sejam f e g funções tais que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = c \,,$$

onde $a \in \overline{D_f \cap D_g}$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c$.
(ii) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c$.
(iii) *se $c \neq 0$,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c} \,.$$

Dem. Usando o Teorema 21.7, estas propriedades algébricas do limite de funções num ponto são consequência imediata das correspondentes propriedades do limite de sucessões especificadas no Teorema 8.2. □

Teorema 21.15. (Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada) *Sejam f, g e h funções tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \,,$$

para qualquer $x \in D_f \cap D_g \cap D_h$. Então, se $a \in \overline{D_f \cap D_g \cap D_h}$, $b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$, também $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Dem. Usando o Teorema 21.7, este princípio do encaixe para o limite de funções num ponto é consequência imediata do correspondente princípio do encaixe para o limite de sucessões especificado no Teorema 8.5. □

22. Aula – 16 de Novembro de 2005

Última Aula. Teoremas 21.14 e 21.15 – propriedades do limite de uma função num ponto:

(i) Propriedades Algébricas – limite da soma, produto e quociente de funções;
(ii) Princípio do Encaixe: se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para qualquer x numa vizinhança de $a \in \mathbb{R}$, e $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$, então também $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Exemplos.

Exemplo 22.1. As propriedades algébricas do limite especificadas no Teorema 21.14, combinadas com os resultados do Exercício 21.6, implicam imediatamente que

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}\,,$$

para quaisquer polinómios p e q, com $q(a) \neq 0$.

Exemplo 22.2. Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

O seu gráfico está representado na Figura 14.

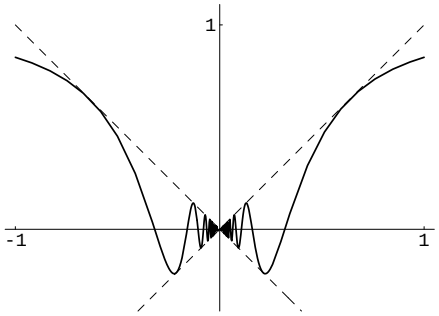

Figura 14. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

Temos que $0 \in \overline{D} = \mathbb{R}$ e pretendemos calcular o $\lim_{x\to 0} f(x)$. Tendo em conta que

$$|\operatorname{sen}(y)| \leq 1\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\,,$$

temos para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que

$$0 \leq \left|x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|\,.$$

Como $\lim_{x\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$, podemos concluir pelo Princípio do Encaixe do Teorema 21.15 que

$$\lim_{x\to 0} \left|x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,. \tag{37}$$

Limite de Funções na Recta Acabada. Tendo em conta que a vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ de um ponto $a \in \mathbb{R}$ é o conjunto

$$V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ ,$$

temos que a Definição 21.1 de ponto aderente a um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ pode ser escrita na forma

$$a \in \overline{D} \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ x \in D \cap V_\varepsilon(a)\,, \tag{38}$$

enquanto que a Definição 21.5 de limite à Cauchy pode ser escrita na forma

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ (x \in D \cap V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)\,. \tag{39}$$

Definindo vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ de $-\infty$ e $+\infty$ por

$$V_\varepsilon(-\infty) =]-\infty, -1/\varepsilon[\quad \text{e} \quad V_\varepsilon(+\infty) =]1/\varepsilon, +\infty[\,,$$

temos que as duas definições anteriores continuam a fazer sentido na recta acabada

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \,,$$

i.e. para $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, e passaremos assim a usá-las também neste contexto.

Nota 22.3. Estamos a usar o símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ para denotar tanto a recta acabada como o fecho ou aderência de $\mathbb{R}$. Esta aparente ambiguidade fica resolvida com a definição (38) anterior pois, como se pode verificar facilmente, na recta acabada o fecho ou aderência de $\mathbb{R}$ é de facto toda a recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercício 22.4. Usando as definições (38) e (39) para o fecho ou aderência e limite na recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, mostre que:

(i)
$$\overline{]a, b[} = [a, b] \,, \text{ para quaisquer } a, b \in \overline{\mathbb{R}};$$

(ii)
$$\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}} \,;$$

(iii)
$$\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty \,, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \,.$$

Limite de Funções Definidas por Séries de Potências.

Teorema 22.5. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por uma série de potências de x, i.e. para a qual existe uma sucessão (a_n) tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \text{ para todo o } x \in D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \sum a_n x^n \text{ é convergente} \right\} .$$

Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, a^n = f(a) \,, \ \forall \, a \in D \,.$$

Dem. Próxima aula. □

Exemplo 22.6. Tendo em conta as expressão em séries de potências para as funções exponencial, seno e coseno (cf. Exemplos 19.3 e 19.4), válidas em todo o $\mathbb{R}$, temos pelo Teorema 22.5 que

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a \,, \quad \lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a) \,, \ \forall \, a \in \mathbb{R} \,.$$

Limite de Funções Compostas.

Definição 22.7. Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real. A função *composta* $(f \circ g)$ é definida por

$$\begin{aligned} (f \circ g) : D_{f \circ g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)) \,, \end{aligned}$$

onde $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in D_g \ \text{ e } \ g(x) \in D_f\}$.

Temos assim que

$$\begin{array}{ccccccccc} D_g \supset D_{f \circ g} & \stackrel{g}{\longrightarrow} & g(D_{f \circ g}) & \subset & D_f & \stackrel{f}{\longrightarrow} & f(D_f) & \supset & (f \circ g)(D_{f \circ g}) \\ x & \longmapsto & g(x) & = & y & \longmapsto & f(y) & = & f(g(x)) \end{array}$$

Teorema 22.8. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real, e $(f \circ g) : D_{f\circ g} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sua função composta. Se*

$$a \in \overline{D_{f\circ g}} \subset \overline{\mathbb{R}}\,, \quad \lim_{x\to a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}} \quad e \quad \lim_{y\to b} f(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}\,,$$

então

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = c\,.$$

Dem. Exercício: usem a caracterização de limite à Heine dada no Teorema 21.7. □

Exemplo 22.9. Veremos na próxima aula que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1\,.$$

Usando este facto, pretende-se completar o gráfico da Figura 14 do Exemplo 22.2 calculando o limite

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Consideremos as funções $g, f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\,.$$

Temos então que $(f \circ g) : D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Como

$$+\infty \in \overline{D_{f\circ g}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \overline{\mathbb{R}}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1\,,$$

podemos concluir pelo Teorema 22.8 que

$$\lim_{x\to+\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1\,.$$

Na notação do Teorema 22.8, temos que neste exemplo

$$a = +\infty\,, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 1\,.$$

A análise anterior pode ser escrita abreviadamente da seguintes forma:

$$\text{considerando a mudança de variável } y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}\,, \text{ em que } x \to +\infty \Rightarrow y \to 0,$$

temos que

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \cdot \operatorname{sen}(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1\,.$$

A Figura 15 apresenta uma versão mais completa do gráfico da Figura 14, tendo já em conta o limite calculado neste exemplo.

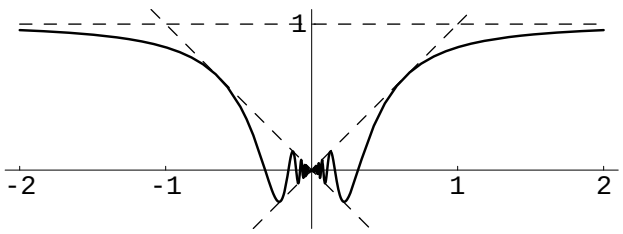

FIGURA 15. Versão mais completa do gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

23. Aula – 18 de Novembro de 2005

Última Aula. Limite de funções compostas e de funções definidas por séries de potências.

Demonstração do Teorema 22.5. Recordemos primeiro o seu enunciado: seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por uma série de potências de x, i.e. para a qual existe uma sucessão (a_n) tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \text{ para todo o } x \in D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \sum a_n x^n \text{ é convergente} \right\} .$$

Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, a^n = f(a)\,,\ \forall\, a \in D\,.$$

Dem. Provaremos o teorema apenas para valores $a \in \,]-R, R[$, onde R é o raio de convergência da série de potências. Usaremos o seguinte resultado, cuja demonstração fica como exercício: se a série de potências $\sum_n a_n\, x^n$ tem raio de convergência R, então a série de potências $\sum_n n a_n\, x^n$ também tem raio de convergência R.

Seja então $a \in \,]-R, R[$ arbitrário. Queremos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, o que é equivalente a mostrar que

$$\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0\,.$$

Temos que

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - a^n) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |x^n - a^n|\,.$$

Exercício 23.1. Mostre por indução que se $b \in \mathbb{R}^+$ é tal que $|x| < b$ e $|a| < b$, então

$$|x^n - a^n| \leq |x - a| n b^{n-1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Escolhamos um $b > 0$ tal que $|a| < b < R$, e seja $x \in \,]-R, R[$ tal que $|x| < b$. Temos então que

$$|f(x) - f(a)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |x^n - a^n| \leq |x - a| \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| b^{n-1}\,.$$

Pelo resultado mencionado no início desta demonstração, sabemos que a série da direita é convergente. Designando por $S \in \mathbb{R}^+$ a sua soma finita, temos então que

$$0 \leq |f(x) - f(a)| \leq S\, |x - a|\,.$$

Como $\lim_{x\to a} 0 = 0 = \lim_{x\to a} S\,|x - a|$, podemos concluir pelo Princípio do Encaixe do Teorema 21.15 que

$$\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0 \quad \text{e portanto} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

□

Limites Relativos e Laterais.

Definição 23.2. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $A \subset D$ um subconjunto do seu domínio, $a \in \overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ um ponto aderente a esse subconjunto e $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremos que f *tem limite* b *no ponto* a *relativo ao conjunto* A, e escreveremos

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = b\,,$$

se a *restrição de* f *ao conjunto* A, $f|_A : A \to \mathbb{R}$, tem limite b no ponto A, i.e. se $\lim_{x\to a} f|_A(x) = b$, o que por definição de limite significa

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ (x \in A \text{ e } x \in V_\delta(a)) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)\,.$$

Nota 23.3. Se $a \in \mathbb{R}$, há dois casos particularmente importantes desta definição de limite relativo, dando origem aos chamados *limites laterais*:

(i) quando $A = D \cap]a, +\infty[$ temos o chamado limite lateral à direita, ou simplesmente *limite à direita*, que será denotado por $\lim_{x\to a^+} f(x)$;
(ii) quando $A = D \cap]-\infty, a[$ temos o chamado limite lateral à esquerda, ou simplesmente *limite à esquerda*, que será denotado por $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Exemplo 23.4. A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0, \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

tem limites laterais no ponto zero dados por

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1\,.$$

Continuidade de Funções Reais de Variável Real.

Definição 23.5. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua num ponto* $a \in D$ se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$

e diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio D.

Teorema 23.6. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é contínua no ponto a;*
(ii) *continuidade à Cauchy:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (x \in D \text{ e } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,;$$

(iii) *continuidade à Heine:*

$$\forall \text{ sucessão } (x_n),\ (x_n \in D \text{ e } x_n \to a) \Rightarrow f(x_n) \to f(a)\,.$$

Dem. Consequência imediata do que já vimos sobre o limite de uma função num ponto. □

Naturalmente que as propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. O teorema seguinte ilustra este facto.

Teorema 23.7.

(i) *Se f e g são funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são contínuas em a.*
(ii) *Sejam f e g duas funções. Se $a \in D_{f\circ g}$, g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua em a.*

Dem. Consequência imediata da Definição 23.5 e dos Teoremas 21.14 e 22.8. □

A noção de limites laterais introduzida na Nota 23.3 dá naturalmente origem à seguinte definição de *continuidade lateral*.

Definição 23.8. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f é *contínua à direita* em a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;
(ii) f é *contínua à esquerda* em a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Teorema 23.9. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. f é contínua em a, i.e.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$

sse f é contínua à direita e à esquerda em a, i.e.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Dem. Exercício simples. □

Exemplo 23.10. A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0, \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

é contínua à direita no ponto zero, mas não é contínua à esquerda nesse ponto. De facto,

$$\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1 = H(0) \quad \text{mas} \quad \lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)\,.$$

Exemplos.

Exemplo 23.11. O que já sabemos sobre limites permite-nos concluir imediatamente que:

(a) qualquer função racional $f = p/q$, com p, q polinómios, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ onde $q(a) \neq 0$;
(b) a função raiz-p, $p \in \mathbb{N}$, apresentada no Exemplo 20.6, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}_0^+$ quando p é par, e em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ quando p é ímpar;
(c) a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$;
(d) a função de Heaviside, apresentada no Exemplo 21.11, é contínua em qualquer ponto $a \neq 0$ e descontínua no ponto zero.
(e) a função de Dirichlet, apresentada no Exemplo 21.12, é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 23.12. O Teorema 22.5 diz-nos que qualquer função definida por uma série de potências é contínua em todo o seu domínio de convergência. Assim, as funções exponencial, seno e coseno são contínuas em todo o $\mathbb{R}$.

Exemplo 23.13. A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,,\ \forall\, x \neq 0\,,$$

é contínua em todo o seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois é o quociente de duas funções contínuas e o denominador não se anula em D.

24. Aula – 21 de Novembro de 2005

Última Aula. Continuidade de funções reais de variável real.

Funções Prolongáveis por Continuidade.

Definição 24.1. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D_f} \setminus D_f \subset \mathbb{R}$. Diremos que f *é prolongável por continuidade ao ponto* a se existir em $\mathbb{R}$ o $\lim_{x \to a} f(x)$. Nesse caso, a função $F : D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{se } x \in D_f, \\ b\,, & \text{se } x = a, \end{cases}$$

com $b = \lim_{x \to a} f(x)$, é contínua em a e designa-se por *prolongamente por continuidade de* f *ao ponto* a.

Exemplo 24.2. Vamos mostrar que a função f do Exemplo 23.13 é prolongável por continuidade ao ponto $a = 0$, provando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1\,. \tag{40}$$

Tendo em conta a definição em série de potências da função seno dada por (31), temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \\ &= \text{ série de potências de } x \text{ com raio de convergência } R = +\infty.\end{aligned}$$

Seja então $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela série de potências

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Temos então que

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,,\ \forall\, x \neq 0$$

e pelo Teorema 22.5 sabemos também que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 1 - 0 + 0 - 0 + \cdots = 1\,.$$

Fica assim provado que, de facto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1\,.$$

A função anterior $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pode também ser definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,, & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 1\,, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

sendo portanto o prolongamento por continuidade da função f do Exemplo 23.13 ao ponto zero. O seu grafico está representado na Figura 16

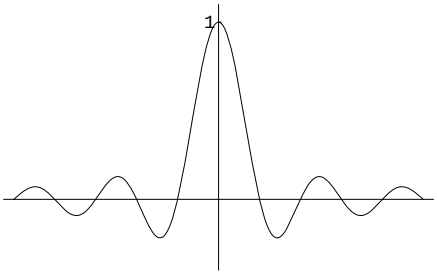

FIGURA 16. Gráfico da função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \operatorname{sen}(x)/x$, se $x \neq 0$, e $F(0) = 1$.

Exercício 24.3. Tendo em conta a definição em série de potências da função exponencial dada por (30) e usando um método análogo ao do exemplo anterior, mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \tag{41}$$

pelo que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}\,,\ \forall\, x \neq 0\,,$$

é prolongável por continuidade ao ponto zero.

Continuidade da Função Inversa.

Teorema 24.4. *Seja $f : D = [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente crescente. Sejam $c = f(a)$, $d = f(b)$ e $g = f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ a função inversa de f. Então, g é contínua e estritamente crescente no intervalo $[c, d]$.*

Dem. Consultem o primeiro volume do Apostol ou o livro do Professor Campos Ferreira. □

Nota 24.5. Existe naturalmente um teorema completamente análogo quando f é contínua e estritamente decrescente.

Exemplo 24.6. As funções logaritmo (Exemplo 20.9), arco seno e arco coseno (Exemplo 20.7), bem como a função arco tangente (Exemplo 20.8), são assim contínuas e estritamente monótonas.

Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas.

Teorema 24.7. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Se $f(a) > g(a)$ então*

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, (x \in D_f \cap D_g \text{ e } |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > g(x)\,.$$

Dem. Como f e g são por hipótese contínuas em $a \in D_f \cap D_g$, sabemos que

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \,:\, (x \in D_f \text{ e } |x - a| < \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \,:\, (x \in D_g \text{ e } |x - a| < \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon\,.$$

Escolhamos $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$0 < \varepsilon < \frac{f(a) - g(a)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}\,.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} x \in D_f \cap D_g \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{e} \quad g(x) < g(a) + \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > (f(a) - \varepsilon) - (g(a) + \varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > f(a) - g(a) - 2\varepsilon > 2\varepsilon - 2\varepsilon = 0\,, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da escolha feita para $\varepsilon > 0$. □

Corolário 24.8. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$ com $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Basta usar o Teorema 24.7 com $g =$ função identicamente zero. □

Teorema 24.9. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Exercício. □

Propriedades Globais das Funções Contínuas - Teorema de Bolzano.

Teorema 24.10. (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano) *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $I = [a, b] \subset D$, tal que $f(a) \neq f(b)$. Então, para qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Dem. Sem perca de generalidade, suponhamos que $f(a) < \alpha < f(b)$. Consideremos o conjunto

$$X = \{x \in [a, b] \,:\, f(x) < \alpha\}\,.$$

Temos então que:

(i) $a \in X$ e portanto $X \neq \emptyset$ (é aqui que a hipótese $f(a) < \alpha$ está a ser usada);
(ii) b é um majorante de X e portanto X é majorado.

Logo, pelo Axioma de Supremo, existe $c = \sup X$ e $c \in [a, b]$.

Queremos agora mostrar que $f(c) = \alpha$, o que será feito por exclusão de partes, i.e. usando a Tricotomia.

(i) Se $f(c) < \alpha$, teríamos que $c < b$ (é aqui que a hipótese $f(b) > \alpha$ está a ser usada). A continuidade de f, combinada com o Teorema 24.7, implicaria então a existência de um $\delta > 0$ tal que $f(x) < \alpha$ para qualquer $x \in [c, c + \delta[$. Isto significaria em particular que $(c + \delta/2) \in X$, o que contraria o facto de $c = \sup X$.

(ii) Se $f(c) > \alpha$ é possível chegar a uma contradição usando um raciocínio completamente análogo ao anterior (exercício).

Assim, temos de facto que $f(c) = \alpha$. □

25. Aula – 23 de Novembro de 2005

Última Aula. Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano: se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num intervalo $[a, b] \subset D$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \alpha$.

Corolário 25.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $[a, b] \subset D$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 25.2. O Corolário 25.1 do Teorema de Bolzano pode ser usado para mostrar que qualquer polinómio do terceiro grau, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \,, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \,, \text{com } a_3 \neq 0,$$

tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$, i.e. existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

De facto, supondo sem perca de generalidade que $a_3 > 0$, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot a_3 = -\infty \,,$$

enquanto que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot a_3 = +\infty \,.$$

Logo, existem $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}^+$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, pelo que o Corolário 25.1 do Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que $p(c) = 0$.

Nota 25.3. O resultado do Exemplo 25.2 generaliza-se facilmente para qualquer polinómio de grau ímpar, mas não para qualquer polinómio de grau par. Por exemplo, qualquer função constante diferente de zero é um polinómio de grau zero sem qualquer zero em $\mathbb{R}$. Outro possível exemplo é o polinómio de segundo grau $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $p(x) = x^2 + 1$, que também não tem zeros em $\mathbb{R}$. Foi a necessidade de encontrar zeros para este polinómio, i.e. soluções para a equação $x^2 + 1 = 0$, que originou a introdução e construção do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ (cf. capítulo 9 do primeiro volume do Apostol).

Propriedades Globais das Funções Contínuas – Teorema de Weierstrass.

Definição 25.4. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f tem *máximo* (resp. *mínimo*) no conjunto D se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(x) \leq f(c)$, $\forall\, x \in D$ (resp. $f(x) \geq f(c)$, $\forall\, x \in D$). Neste caso, c diz-se *ponto de máximo* (resp. *ponto de mínimo*) de f em D, e $f(c)$ diz-se o *máximo* (resp. *mínimo*) de f em D.

Teorema 25.5. (Teorema de Weierstrass) *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$, então f tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

Corolário 25.6. *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então f é limitada nesse intervalo, i.e. o contradomínio $f([a, b])$ é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para qualquer $x \in [a, b]$.*

Exemplo 25.7. A função f, definida no intervalo limitado mas não-fechado $]0,1]$ por $f(x) = 1/x$, não tem máximo nem é limitada neste intervalo. De facto, o seu contradomínio é dado por $f(]0,1]) = [1, +\infty[$.

Este exemplo mostra a necessidade de, no Teorema de Weierstrass e respectivo corolário, a função f ter que ser contínua num intervalo não apenas limitado, mas também fechado.

Dem. (Teorema de Weierstrass) Vamos mostrar que a função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tem máximo. A prova da existência de mínimo é inteiramente análoga.

Designemos por Y o contradomínio de f, i.e.

$$Y = f([a,b]) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y = f(x) \text{ para algum } x \in [a,b]\} \,.$$

Como $Y \neq \emptyset$, temos que Y tem supremo em $\overline{\mathbb{R}}$, i.e. existe $\sup Y = M \in \overline{\mathbb{R}}$. (Nota: se Y for majorado então $M \in \mathbb{R}$, se Y não for majorado então $M = +\infty$. Veremos nesta demonstração que Y é majorado...)

O resultado do exercício 1 do grupo V da Ficha 2, que pode ser facilmente generalizado de $\mathbb{R}$ para $\overline{\mathbb{R}}$, diz-nos que existe uma sucessão (y_n) tal que $y_n \in Y$ e $y_n \to M$. Como

$$y_n \in Y \Leftrightarrow y_n = f(x_n) \text{ para algum } x_n \in [a,b],$$

obtemos desta forma uma sucessão limitada (x_n). Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 10.10), esta sucessão tem subsucessões convergentes. Seja $(u_n = x_{k_n})$ uma dessas subsucessões e designemos por $c \in \mathbb{R}$ o seu limite, i.e. $u_n \to c$.

Temos naturalmente que

$$a \leq u_n \leq b \Rightarrow a \leq \lim u_n \leq b \Rightarrow a \leq c \leq b \,.$$

Como f é contínua em $c \in [a,b]$, sabemos pela caracterização de continuidade à Heine (Teorem 23.6) que

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim u_n) = f(c) \,.$$

Por outro lado,

$$(f(u_n)) = (f(x_{k_n})) = (y_{k_n}) = \text{ subsucessão de } (y_n).$$

Como $y_n \to M$ temos também que qualquer das suas subsucessões converge para M, pelo que em particular $f(u_n) \to M$. Logo,

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = M \Rightarrow (M < +\infty \quad \text{e} \quad f \text{ tem máximo}) \,.$$

□

Exemplo de Aplicação: existência de pontos fixos. (Ficha 5, II 2.)

Pretende-se mostrar que se f é uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0,1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0,1]$, então f tem um ponto fixo, i.e. existe um ponto $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$. Sugere-se a aplicação do Teorema de Bolzano à função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$.

Esta função g é também contínua no intervalo $[0,1]$ e os seus valores nos extremos deste intervalo são

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \quad \text{e} \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \,.$$

Se $g(0) = 0$, então $f(0) = 0$ e $c = 0$ é ponto fixo de f. Se $g(1) = 0$, então $f(1) = 1$ e $c = 1$ é ponto fixo de f. Finalmente, e no caso mais interessante em que $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$, podemos aplicar o Corolário 25.1 do Teorema de Bolzano para concluir que

$$\exists\, c \in]0,1[\,:\, g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c \Leftrightarrow c \text{ é um ponto fixo de } f.$$

26. Aula – 25 de Novembro de 2005

Derivada de Uma Função num Ponto. A noção de derivada de uma função pode ser motivada das mais variadas formas. A que escolhemos aqui tem origem no seguinte problema geométrico: dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que num ponto $a \in D$ tem o valor $f(a) \in \mathbb{R}$, qual a recta do plano $\mathbb{R}^2$ que melhor aproxima o gráfico de f num vizinhança do ponto $(a, f(a))$?

A resposta a este problema é, naturalmente, a recta *tangente* ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Surge então a questão de como calcular a equação dessa recta tangente.

Denotando por (x, y) as coordenadas de um ponto arbitrário do plano $\mathbb{R}^2$, a equação de qualquer recta não vertical que passe no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$(y - f(a)) = m \cdot (x - a)\,,$$

onde $m \in \mathbb{R}$ é arbitrário e representa o *declive* da recta determinada pela equação. A resolução do problema geométrico inicial passa então por calcular *o declive da recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a))$*.

Esse cálculo pode ser feito com base na noção de limite. De facto, a recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a)$ pode ser obtida como o "limite" de rectas secantes ao mesmo gráfico, como ilustra a Figura 17.

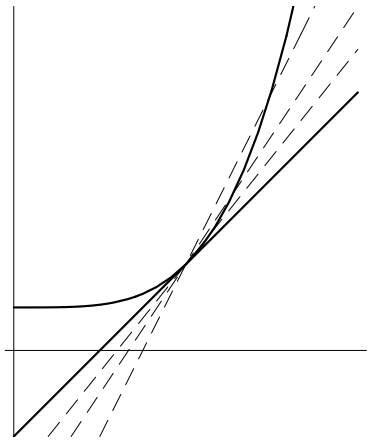

Figura 17. A recta tangente como limite de rectas secantes.

Para cada $h \in \mathbb{R}$ suficientemente perto de zero, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$. É uma recta secante ao gráfico de f e o seu declive é dado por

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,.$$

Quando $h \to 0$, as correspondentes rectas secantes "tendem" para a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$.

Definição 26.1. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que *f é diferenciável no ponto $a \in D$ com derivada $f'(a)$* se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a Definição 26.1 de derivada de uma função, podemos agora usar esta segunda noção para dar uma definição precisa da primeira.

Definição 26.2. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A *recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$* é a recta definida no plano pela equação

$$(y - f(a)) = f'(a) \cdot (x - a)\,. \tag{42}$$

Exemplos.

Exemplo 26.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes. Temos então que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha x + \beta) - (\alpha a + \beta)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha\,. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{43}$$

Exemplo 26.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Usando o resultado da alínea (g) do exercício 6 do grupo I da Ficha 5, que nos diz que

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{2}\right) \cos\left(\frac{a + b}{2}\right)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,$$

temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= \cos(x)\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável (40) e o facto do coseno ser uma função contínua.

Concluimos assim que

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \cos(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{44}$$

Exercício 26.5. Mostre que

$$f(x) = \cos(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{45}$$

Exemplo 26.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável (41).

Concluimos assim que

$$f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{46}$$

Exercício 26.7. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$f(x) = x^n\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = n\, x^{n-1}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

e

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Exemplo 26.8. Usando os resultados do Exercício 26.7, é possível mostrar que, para qualquer expoente $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f(x) = x^\alpha\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,. \tag{47}$$

Derivadas Laterais.

Definição 26.9. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f tem *derivada lateral à direita* em a se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,;$$

(ii) f tem *derivada lateral à esquerda* em a se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'_e(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,;$$

Teorema 26.10. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. f é diferenciável no ponto a sse f tem derivadas laterais iguais nesse ponto. Nesse caso, tem-se naturalmente que $f'_e(a) = f'(a) = f'_d(a)$.*

Dem. Exercício simples. □

Exemplo 26.11. A função módulo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x < 0, \\ x\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 18, tem derivadas laterais no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

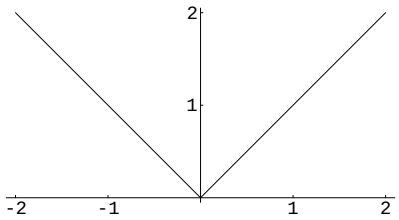

FIGURA 18. Gráfico da função módulo.

De facto,

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \quad \text{e}$$
$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1\,.$$

Logo, $f'_e(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$ pelo que a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

Diferenciabilidade e Continuidade.

Teorema 26.12. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $a \in D$ então f é contínua nesse ponto.*

Dem. Considermos a função $\rho : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,, \ \forall\, x \in D \setminus \{a\} \ .$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto $a \in D$, sabemos que

$$\lim_{x \to a} \rho(x) = f'(a) \in \mathbb{R} \,.$$

Por outro lado,

$$\rho(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \rho(x) \,, \ \forall\, x \in D \setminus \{a\} \ .$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= f(a) + \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \rho(x) \\ &= f(a) + 0 \cdot f'(a) \\ &= f(a) \,, \end{aligned}$$

pelo que f é contínua em $a \in D$. □

Nota 26.13. O Teorema 26.12 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável em } a \Rightarrow f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ contínua em } a \not\Rightarrow f \text{ diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função módulo do Exemplo 26.11 é contínua no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Por outro lado, o Teorema 26.12 é equivalente a afirmar que

$$f \text{ descontínua em } a \Rightarrow f \text{ não diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função de Heaviside não é contínua no ponto zero (Exemplo 23.10) pelo que não é também diferenciável nesse ponto.

27. Aula – 28 de Novembro de 2005

Última Aula. Definimos derivada de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ num ponto $a \in D$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,.$$

Provámos o Teorema 26.12:

$$f \text{ diferenciável em } a \Rightarrow f \text{ contínua em } a.$$

Regras Algébricas de Derivação.

Teorema 27.1. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Seja ainda $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, as funções $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são diferenciáveis no ponto a, sendo as suas derivadas dadas por:*

$$\begin{aligned} (c \cdot f)'(a) &= c \cdot f'(a) \\ (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \qquad \text{(Regra de Leibniz)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} \end{aligned}$$

Nota 27.2. As duas primeiras regras algébricas de derivação enunciadas neste teorema, dizem-nos que a derivação é uma operação *linear*.

Dem. Provaremos apenas a Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a+h)+f(a)\cdot g(a+h)-f(a)\cdot g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(g(a+h)\cdot\frac{(f(a+h)-f(a)}{h}+f(a)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)\\ &= \left(\lim_{h\to 0}g(a+h)\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(f(a+h)-f(a)}{h}+f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= g(a)\cdot f'(a)+f(a)\cdot g'(a)\,,\end{aligned}$$

onde na última igualdade se usou naturalmente o facto de f e g serem diferenciáveis em a, bem como o facto de g ser também contínua em a (Teorema 26.12). □

Exemplo 27.3. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico são definidas por

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\text{e}\quad\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\quad\text{(cf. Exemplo 19.6)}.$$

Usando a derivada da função exponencial determinada na última aula (Exemplo 26.6) e a fórmula do Teorema 27.1 para a derivada do quociente, temos que

$$\left(e^{-x}\right)'=\left(\frac{1}{e^x}\right)'=\frac{(1)'\cdot e^x-1\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{-e^x}{e^{2x}}=-e^{-x}\,.$$

Usando também a linearidade da derivação, especificada pelas duas primeiras regras algébricas do Teorema 27.1, obtemos o seguinte resultado para as derivadas das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico:

$$(\operatorname{senh})'(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x)\,; \tag{48}$$

$$(\cosh)'(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{senh}(x)\,. \tag{49}$$

Exemplo 27.4. Seja $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função tangente, i.e. definida por

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,,\ \forall\, x\in D=D_{\tan}\ \text{(cf. Exemplo 19.5)}.$$

Usando a fórmula do Teorema 27.1 para a derivada do quociente, podemos calcular a derivada desta função tangente num qualquer ponto $x\in D_{\tan}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\tan)'(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}}{\cos}\right)'(x) &= \frac{(\operatorname{sen})'(x)\cdot\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\cdot(\cos)'(x)}{(\cos)^2(x)}\\ &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\cdot(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}\,,\end{aligned}$$

onde se usaram as derivadas das funções seno e coseno determinadas na última aula (Exemplo 26.4 e Exercício 26.5), bem como a relação fundamental (32) entre o seno e o coseno.

Concluimos assim que

$$f(x)=\tan(x)\,,\ \forall\, x\in D_{\tan}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}\,,\ \forall\, x\in D_{\tan}\,. \tag{50}$$

Derivada de Funções Compostas.

Teorema 27.5. *Sejam $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D_g$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in D_f$. Então, a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f\circ g}$ e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

Dem. Vamos assumir que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $h \in]-\delta, \delta[$ com $(a+h) \in D_g$, tem-se $g(a+h) \neq g(a)$. Caso contrário, prova-se facilmente que $g'(a) = 0 = (f \circ g)'(a)$ (exercício), o que confirma a validade do teorema.

Usando a definição de derivada, temos então que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(g(a+h)) - f(g(a))) \cdot (g(a+h) - g(a))}{h \cdot (g(a+h) - g(a))} \qquad (g(a+h) \neq g(a)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\,.
\end{aligned}$$

Como g é por hipótese diferenciável em a, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)\,.$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a+h)$, em que $h \to 0 \Rightarrow y \to g(a) = b$ (porque, pelo Teorema 26.12, g é contínua em a), e usando o Teorema 22.8 referente ao limite de uma função composta, temos também que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)\,,$$

onde se usou, na última igualdade, o facto de f ser por hipótese diferenciável no ponto $b = g(a)$.

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 27.6. Seja $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função positiva e, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos a função $g^\alpha : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $(g^\alpha)(x) = g(x)^\alpha\,,\ \forall\, x \in D$. Observando que $g^\alpha = (f \circ g)$, com $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(y) = y^\alpha\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^+$, podemos usar o Teorema 27.5 e o resultado (47) do Exercício 26.8 para concluir que, se g é diferenciável num ponto $a \in D$, então g^α também é diferenciável nesse ponto a e

$$\begin{aligned}
(g^\alpha)'(a) &= (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \\
&= \left(\alpha y^{\alpha-1}\right)|_{y=g(a)} \cdot g'(a) \\
&= \alpha\, g(a)^{\alpha-1} \cdot g'(a)\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 27.7. Quando o expoente α do exemplo anterior é um número inteiro, não é necessário que a função g seja positiva para a validade do resultado. Na realidade, para qualquer $m \in \mathbb{Z}$ e qualquer função $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável num ponto $a \in D$, temos que a função $g^m : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é diferenciável nesse ponto $a \in D$ e

$$(g^m)'(a) = m\, g(a)^{m-1} \cdot g'(a)\,. \tag{51}$$

Derivada de Funções Inversas.

Teorema 27.8. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua no intervalo I, e seja $f^{-1} : f(I) \to I$ a sua inversa. Se f é diferenciável num ponto $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Dem. Assumiremos que f é diferenciável em todo o intervalo I. Provaremos apenas que se f^{-1} é diferenciável em $f(I)$, o valor da sua derivada é, de facto, o especificado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa e o Teorema 27.5, temos que

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f)(x) = x &\Rightarrow (f^{-1}\circ f)'(x) = (x)'\\ &\Rightarrow (f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1\\ &\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,,\ \forall\, x \in I\,.\end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e $b = f(a)$, obtemos assim o resultado pretendido. □

Exemplo 27.9. Consideremos a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. A sua inversa é a função logaritmo:

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ definida por } f^{-1}(x) = \log(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{(cf. Exemplo 20.9)}.$$

Como

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

temos pelo Teorema 27.8 que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e

$$f^{-1}(x) = \log(x) \Rightarrow (\log)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Como a derivada da função exponencial f é a própria função exponencial f, temos então que

$$(\log)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,. \tag{52}$$

28. Aula – 30 de Novembro de 2005

Última Aula. Foram dadas duas regras de derivação importantes:

(i) Teorema 27.5 – derivada de funções compostas

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)\,;$$

(ii) Teorema 27.8 – derivada de funções inversas

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Mais Exemplos de Derivadas de Funções Inversas.

Exemplo 28.1. Consideremos a restrição da função seno ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, i.e.

$$f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

A sua inversa neste intervalo é a função arco seno:

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \text{ definida por } f^{-1}(x) = \arcsin(x)\,,\ \forall\, x \in [-1, 1] \quad \text{(cf. Exemplo 20.7)}.$$

Como

$$f'(x) = (\operatorname{sen})'(x) = \cos(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\,,$$

temos pelo Teorema 27.8 que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto $x \in \left]-1, 1\right[$ e

$$(\arcsin)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\,,\ \forall\, x \in \left]-1, 1\right[\,.$$

Como

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}\,,\ \forall\, x \in [-1, 1] \quad \text{(exercício)},$$

temos então que

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall\, x \in]-1,1[\,. \tag{53}$$

Exercício 28.2. Mostre que

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall\, x \in]-1,1[\,. \tag{54}$$

Exemplo 28.3. Consideremos a restrição da função tangente ao intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$, i.e.

$$f :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \tan(x)\,,\ \forall\, x \in]-\pi/2,\pi/2[\,.$$

A sua inversa neste intervalo é a função arco tangente:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]-\pi/2,\pi/2[\text{ definida por } f^{-1}(x) = \arctan(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{(cf. Exemplo 20.8)}.$$

Pela fórmula (50) para a derivada da tangente determinada no Exemplo 27.4 da última aula, temos que

$$f'(x) = (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0\,,\ \forall\, x \in]-\pi/2,\pi/2[\,.$$

Podemos então aplicar o Teorema 27.8 para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ e

$$(\arctan)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan(x))\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Como

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{(exercício)},$$

temos então que

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{55}$$

Diferenciabilidade e Extremos Locais.

Definição 28.4. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que f tem um *máximo local em c* (resp. um *mínimo local em c*) se existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)\,,\ \forall\, x \in V_\delta(c) \cap D$ (resp. $f(x) \geq f(c)\,,\ \forall\, x \in V_\delta(c) \cap D$). Diremos que f tem um *extremo local em c* se f tiver um máximo ou mínimo locais em $c \in D$.

Teorema 28.5. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I =]a,b[$, tal que f tem um extremo local num ponto $c \in I$. Então, se f é diferenciável no ponto c, tem-se que $f'(c) = 0$.*

Dem. Suponhamos que f tem um máximo local no ponto $c \in I =]a,b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local). Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0\,,\ \forall\, x \in V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[\,.$$

Usando este facto, temos então que

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0\,,$$

enquanto que

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^+} \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0\,.$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto c, podemos concluir que

$$0 \leq f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

□

Nota 28.6. O Teorema 28.5 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Por exemplo, a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na Figura 19, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero, mas não tem um extremo local nesse ponto.

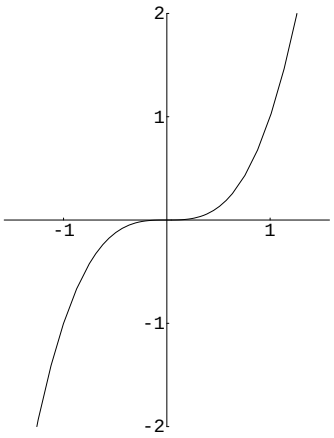

FIGURA 19. Gráfico da função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

Nota 28.7. Uma função pode ter um extremo local num ponto sem que seja diferenciável nesse ponto. Por exemplo, a função módulo do Exemplo 26.11 tem um mínimo no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Teorema de Rolle.

Teorema 28.8. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a, b[\;:\; f'(c) = 0\,.$$

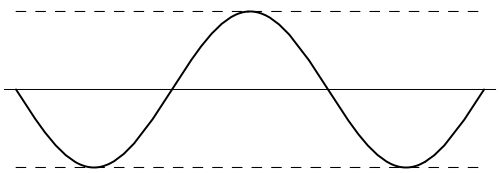

FIGURA 20. Versão geométrica do Teorema de Rolle.

Dem. Como f está nas condições do Teorema 25.5 - Weierstrass, sabemos que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$:

$$M = \max_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f\,.$$

Se $M = m$, então f é uma função constante em $[a, b]$ pelo que

$$f'(c) = 0\,,\ \forall\, c \in]a, b[\,.$$

Se $M > m$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ implica que pelo menos um dos valores M ou m seja assumido por f num ponto $c \in]a, b[$. Temos então que f tem um extremo nesse ponto c. Como f é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema 28.5 para concluir que então $f'(c) = 0$. □

Corolário 28.9. *Entre dois zeros de uma função diferenciável, existe sempre pelo menos um zero da sua derivada*

Dem. Basta aplicar o Teorema 28.8 a uma função f, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = 0 = f(b)$. □

Corolário 28.10. *Entre dois zeros* consecutivos *da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

Dem. Redução ao absurdo + Corolário 28.9. Exercício. □

29. Aula – 02 de Dezembro de 2005

Última Aula. Teorema de Rolle: se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, então

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a, b[\ : \ f'(c) = 0\,.$$

Teorema de Lagrange.

Teorema 29.1. (Teorema de Lagrange) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Nota 29.2. O Teorema de Rolle é o caso particular do Teorema de Lagrange que se obtém quando $f(a) = f(b)$.

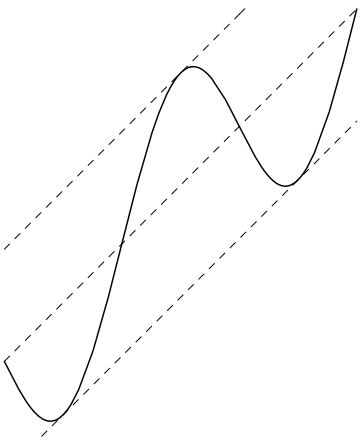

Figura 21. Versão geométrica do Teorema de Lagrange.

Dem. Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \mathbb{R}\,.$$

Temos assim que

$$f(b) - f(a) = \lambda(b - a) \Rightarrow f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a\,.$$

Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \lambda x\,,\ \forall\, x \in [a, b]\ .$$

Como

$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a \Rightarrow g(b) = g(a)$$

e g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

□

Corolário 29.3. *Se f é uma função nas condições do Teorema de Lagrange, então:*

(i) $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ *é constante em* $[a, b]$*;*
(ii) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente crescente em* $[a, b]$*;*
(iii) $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente decrescente em* $[a, b]$*.*

Dem. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$. Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } f'(c) = 0; \\ > 0\,, & \text{se } f'(c) > 0; \\ < 0\,, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\text{a função } f \text{ é } \begin{cases} \text{constante}, & \text{se } f'(c) = 0; \\ \text{crescente}, & \text{se } f'(c) > 0; \\ \text{decrescente}, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$

□

Corolário 29.4. *Seja f uma função nas condições do Teorema de Lagrange. Então, se existir o $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_d(a)$ e*

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)\,.$$

Analogamente, se existir o $\lim_{x \to b^-} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_e(b)$ e

$$f'_e(b) = \lim_{x \to b^-} f'(x)\,.$$

Dem. Para cada $x \in]a, b[$, sabemos pelo Teorema de Lagrange que existe um $\xi = \xi(x) \in]a, x[$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Como

$$a < \xi = \xi(x) < x \Rightarrow \lim_{x \to a+} \xi(x) = a^+\,,$$

podemos usar o Teorema 22.8, relativo ao limite de funções compostas, para concluir que

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi \to a^+} f'(\xi)\,.$$

□

Exemplos de Aplicação do Corolário 29.4 do Teorema de Lagrange.

Exemplo 29.5. (Ficha 5, V 3.(b)) Pretende-se determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x|\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

é diferenciável, bem como calcular a sua derivada nesses pontos.

Para $x > 0$ a função f é definida por $f(x) = x\, e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, pelo que é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(x\, e^{-x^2/2}\right)' = 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot ((-x)\, e^{-x^2/2}) = (1 - x^2)\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Para $x < 0$ a função f é definida por $f(x) = -x\, e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$, pelo que também é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(-x\, e^{-x^2/2}\right)' = (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot ((-x)\, e^{-x^2/2}) = (-1 + x^2)\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^-\,.$$

Para $x = 0$, podemos usar o Corolário 29.4 do Teorema de Lagrange para calcular as derivadas laterais de f:

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x^2)\, e^{-x^2/2} = 1 \quad \text{e}$$
$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1 + x^2)\, e^{-x^2/2} = -1\,.$$

Como $f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_e(0)$, concluimos que f não é diferenciável no ponto zero.

Exemplo 29.6. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$f'(x) = (x^2 \cos(1/x))' = 2x \cdot \cos(1/x) + x^2 \cdot ((-1/x^2)(-\operatorname{sen}(1/x))) = 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,,\ \forall\, x \neq 0\,.$$

Tendo em conta que

$$\lim_{x \to 0} x\, \cos(1/x) = (\text{infinitésimo}) \times (\text{função limitada}) = 0\,,$$

(onde se usou o Princípio do Encaixe do Teorema 21.15 como já tinha sido feito no Exemplo 22.2), temos que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x) = \text{ não existe (cf. Exemplo 21.13)},$$

pelo que o Corolário 29.4 do Teorema de Lagrange nada nos diz sobre a existência ou não de derivada de f no ponto zero.

De facto, a função f é diferenciável no ponto zero com derivada $f'(0) = 0$, como se pode verificar usando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x\, \cos(1/x) = 0\,.$$

Temos assim que f é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Teorema de Cauchy.

Teorema 29.7. (Teorema de Cauchy) *Sejam f e g funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciáveis em $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Nota 29.8. O Teorema de Lagrange é o caso particular do Teorema de Cauchy que se obtém quando $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x\,,\ \forall\, x \in [a,b]$.

Dem. Sabemos pelo Teorema de Rolle que

$$g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[\Rightarrow g(a) \neq g(b)\,.$$

Seja então

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \mathbb{R}\,,$$

e consideremos a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)\,,\ \forall\, x \in [a,b]\ .$$

Temos então que $\varphi(a) = \varphi(b)$ (verifiquem que de facto assim é), e φ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Podemos portanto aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

□

30. Aula – 05 de Dezembro de 2005

Última Aula. Teorema de Cauchy: se f e g são contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$, com $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Regra de Cauchy ou de L'Hôpital.

Teorema 30.1. (Regra de Cauchy – primeira versão) *Sejam f e g funções definidas e diferenciáveis num intervalo berto $]a,b[$. Suponhamos também que:*

(i) $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[$;

(ii)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a^+} g(x)\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \textit{existe em } \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \ \textit{existe em } \overline{\mathbb{R}}$$

e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Nota 30.2. As versões análogas deste teorema para os limites

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } a = -\infty), \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } b = +\infty),$$

também são válidas e serão usadas na sequência.

Dem. Faremos apenas o caso em que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$. Podemos então prolongar f e g por continuidade ao ponto $a \in \mathbb{R}$, fazendo $f(a) = 0 = g(a)$, e usar o Teorema de Cauchy para mostrar que, para cada $x \in]a, b[$, existe um $\xi = \xi(x) \in]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Como $x \to a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$, podemos então concluir que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

□

Corolário 30.3. (Regra de Cauchy – segunda versão) *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ um ponto desse intevalo (ou $a = -\infty$ se $I =]-\infty, c[$, ou $a = +\infty$ se $I =]c, +\infty[$, com $c \in \mathbb{R}$), f e g funções definidas e diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$, com $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in I \setminus \{a\}$. Suponhamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite da direita existir em $\overline{\mathbb{R}}$.

Temos assim que a Regra de Cauchy é um método para

resolver indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ em limites de funções diferenciáveis.

Exemplos de Aplicação da Regra de Cauchy.

Exemplo 30.4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1\,.$$

Exemplo 30.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\,.$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{56}$$

Exemplo 30.6.

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log(x) = 0^+ \cdot (-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0\,.$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log(x) = 0\,. \tag{57}$$

Exemplo 30.7. O cálculo seguinte ilustra mais uma aplicação simples da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0\,.$$

De facto, combinando este tipo de cálculo com o Método de Indução Matemática, obtém-se facilmente que:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{58}$$

Exemplo 30.8. (Ficha 5, IV 7.(h)) Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\,.$$

Uma primeira tentativa poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{0}{0} = \cdots$$

Uma segunda abordagem, com melhores resultados, poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

De facto, e tendo em conta o resultado (58) do Exemplo 30.7, a melhor abordagem seria neste caso a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0\,,$$

onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to +\infty$.

Exemplo 30.9. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = 0^0 = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que

$$x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\log(x^{\operatorname{sen}(x)})} = e^{\operatorname{sen}(x)\cdot\log(x)}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}(x)\cdot\log(x)}\,,$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar (Ficha 5, IV 7.(p)):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\cdot\log(x) = 0\cdot(-\infty) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\cdot\cos(x)} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -1\cdot\frac{0}{1} = 0\,.\end{aligned}$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}(x)\cdot\log(x)} = e^0 = 1\,.$$

Nota 30.10. O método do exemplo anterior, que permitiu resolver uma indeterminação do tipo 0^0, também pode ser usado para resolver indeterminações do tipo ∞^0 e 1^∞.

Exemplo 30.11. (5ºMini-Teste Tipo, 2.) Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/x^2} = 1^\infty = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que, para qualquer $x \in\,]-\pi/2, \pi/2[$,

$$(\cos(x))^{1/x^2} = e^{\log((\cos(x))^{1/x^2})} = e^{\frac{\log(\cos(x))}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2}}\,,$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{1}{2\cos(x)} = -1\cdot\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

31. Aula – 07 de Dezembro de 2005

Derivadas de Ordem Superior à Primeira.

Definição 31.1. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo $I =]a, b[$. Se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for diferenciável, a sua derivada $(f')'$ é designada por *segunda derivada de* f e representa-se por

$$f'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f^{(2)} .$$

Mais geralmente, a *n-ésima derivada de f* define-se, por recorrência, como a derivada da $(n-1)$-ésima derivada de f, quando esta existir. I.e.,

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) .$$

Definição 31.2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I =]a, b[$. Se existir a n-ésima derivada de f em todo o intervalo I, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que f *é uma função de classe* $C^n(I)$, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que f é uma função de classe $C^0(I)$ se f for contínua em I, e que f é uma função de classe $C^\infty(I)$ se $f \in C^n(I)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 31.3. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 \cdot H(x) = \begin{cases} 0 , & \text{se } x < 0; \\ x^2 , & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \qquad (H \text{ representa a função de Heaviside – Exemplo 21.11.})$$

Esta função é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = 2x \cdot H(x) = \begin{cases} 0 , & \text{se } x < 0; \\ 2x , & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta derivada f' é por sua vez contínua em todo o $\mathbb{R}$, mas diferenciável apenas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 0 , & \text{se } x < 0; \\ 2 , & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $f''_e(0) = 0 \neq 2 = f''_d(0)$, não existe de facto segunda derivada de f no ponto zero.

Assim, temos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ mas $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 31.4. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) , & \text{se } x \neq 0; \\ 0 , & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como vimos no Exemplo 29.6, f é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x) , & \text{se } x \neq 0; \\ 0 , & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Vimos também no Exemplo 29.6 que o $\lim_{x \to 0} f'(x)$ não existe, pelo que esta função f' não é contínua no ponto zero.

Temos então que $f \in C^0(\mathbb{R})$, existe $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas $f' \notin C^0(\mathbb{R})$ pelo que $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Exemplo 31.5. A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada de f existe e é contínua em todo o $\mathbb{R}$:

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \text{ dada por } f^{(n)}(x) = e^x , \ \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

Segunda Derivada e Extremos Locais.

Definição 31.6. Seja f uma definida e diferenciável no intervalo aberto $]a,b[$. Um ponto $c \in]a,b[$ designa-se por *ponto crítico de* f se $f'(c) = 0$.

Tendo em conta o Teorema 28.5, sabemos que pontos críticos são candidatos naturais a extremos locais.

Teorema 31.7. *Seja f uma função de classe $C^2(]a,b[)$ e $c \in]a,b[$ um ponto crítico de f. Então,*

(i) $f''(c) > 0 \Rightarrow$ *f tem um mínimo local em c;*
(ii) $f''(c) < 0 \Rightarrow$ *f tem um máximo local em c.*

Nota 31.8. Quando $f''(c) = 0$, e tendo apenas essa informação, nada se pode concluir sobre a natureza do ponto crítico c.

Dem.
(i) Temos por hipótese que f'' é uma função contínua, com $f''(c) > 0$. Pelo Corolário 24.8, sabemos então que

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } f''(x) > 0 \text{ para todo o } x \in]c-\delta, c+\delta[.$$

Podemos agora usar o Corolário 29.3 do Teorema de Lagrange para concluir que

$$\text{a função } f' \text{ é estritamente crescente no intervalo }]c-\delta, c+\delta[.$$

Como por hipótese c é um ponto crítico de f, sabemos que $f'(c) = 0$ pelo que

$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in]c-\delta, \delta[\quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \text{ para } x \in]c, c+\delta[\,.$$

Usando novamente o Corolário 29.3 do Teorema de Lagrange, podemos finalmente concluir que

$$f \text{ é decrescente em }]c-\delta, \delta[\quad \text{e} \quad f \text{ é crescente em }]c, c+\delta[,$$

pelo que f tem, de facto, um mínimo local no ponto $c \in]a,b[$.
(ii) Exactamento análogo a (i). □

Exemplo 31.9. (Ficha 5, IV 11.) Considere-se uma função $f \in C^2(\mathbb{R})$, tal que $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Considere-se também uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\text{sen}(x))\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
(a) Pretende-se determinar e classificar os extremos locais da função φ.

Pela continuidade e diferenciabilidade da função composta, sabemos que $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ com

$$\varphi'(x) = f'(\text{sen}(x)) \cdot \cos(x) \quad \text{e}$$
$$\varphi''(x) = f''(\text{sen}(x)) \cdot \cos^2(x) - f'(\text{sen}(x)) \cdot \text{sen}(x)\,.$$

Como $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, temos que a função f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, pelo que o seu único zero é o dado pela hipótese $f'(0) = 0$ e

$$f'(x) < 0 \text{ para } x < 0\,, \text{ enquanto que } f'(x) > 0 \text{ para } x > 0\,.$$

Estes factos serão implicitamente usados no parágrafo seguinte.

Como φ é diferenciável em $\mathbb{R}$, os seus extremos locais ocorrem necessariamente em pontos críticos. Estes podem ser determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) = 0 &\Leftrightarrow f'(\text{sen}(x)) = 0 \ \vee \ \cos(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{sen}(x) = 0 \ \vee \ x = n\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ n \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = n\pi \ \vee \ x = n\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ n \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{2}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Nestes pontos críticos, a segunda derivada φ'' é dada por

$$\varphi''(n\pi/2) = \begin{cases} f''(0)\,, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -f'((-1)^k) \cdot (-1)^k\,, & \text{se } n = 2k+1 \text{ é ímpar;} \end{cases} = \begin{cases} > 0\,, & \text{se } n \text{ é par;} \\ < 0\,, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Concluimos assim que a função φ tem

$$\text{mínimos locais nos pontos críticos da forma } x = n\pi \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

e

$$\text{máximos locais nos pontos críticos da forma } x = n\pi + \pi/2 \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Pretende-se algora determinar o número de soluções da equação

$$\varphi''(x) = 0\,.$$

Sabemos de (a) que a função φ' tem um número infinito de zeros. Pelo Corolário 28.9 do Teorema de Rolle, sabemos que entre cada dois desses zeros de φ' há pelo menos um da sua derivada $(\varphi')' = \varphi''$. Concluimos assim que a equação $\varphi''(x) = 0$ tem um número infinito de soluções.

32. Aula – 09 de Dezembro de 2005

Última Aula. Teorema 31.7: $f \in C^2(]a,b[)$, $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$ (i.e. c é um ponto crítico de f). Então:

(i) $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ tem um mínimo local em c;
(ii) $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ tem um máximo local em c.

Concavidades e Inflexões.

Definição 32.1. Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $c \in]a,b[$. Diremos que f é *convexa* em c (resp. *côncava* em c), ou que f tem a *concavidade voltada para cima* em c (resp. *concavidade voltada para baixo* em c), se o gráfico de f estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de c) por *cima* (resp. *baixo*) da *recta tangente* ao gráfico de f no ponto c. Ou seja, f é *convexa* em c (resp. *côncava* em c) se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - f(c) \geq f'(c)\cdot(x-c)\,, \text{ para todo o } x \in]c-\delta, c+\delta[$$
$$(\text{resp. } f(x) - f(c) \leq f'(c)\cdot(x-c)\,, \text{ para todo o } x \in]c-\delta, c+\delta[).$$

Diremos que f tem um *ponto de inflexão* em c se existir $\delta > 0$ tal que, f é convexa num dos intervalos $]c-\delta, c[$ ou $]c, c+\delta[$ e côncava no outro.

Teorema 32.2. *Sejam $f \in C^2(]a,b[)$ e $c \in]a,b[$. Então:*

(i) *$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ é convexa em c;*
(ii) *$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ é côncava em c;*
(iii) *($f''(c) = 0$ e f'' muda de sinal em c) $\Rightarrow f$ tem um ponto de inflexão em c.*

Dem. Consideremos a função auxiliar $g :]a,b[\to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = (f(x) - f(c)) - f'(c)\cdot(x-c)\,,\ \forall\, x \in]a,b[\,.$$

Tendo em conta a Definição 32.1, temos que estudar o sinal desta função auxiliar g numa vizinhança de $c \in]a,b[$.

Observemos primeiro que:

$$g(c) = 0\,; \quad g'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow g'(c) = 0\,; \quad g''(x) = f''(x) \Rightarrow g''(c) = g''(c)\,.$$

Tendo em conta o Teorema 31.7, podemos então concluir que:

(i) $(f''(c) > 0) \Rightarrow (g''(c) > 0) \Rightarrow$ (g tem um mínimo local em c) $\Rightarrow (g(x) \geq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c) \Rightarrow$ (f é convexa em c);
(ii) $(f''(c) < 0) \Rightarrow (g''(c) < 0) \Rightarrow$ (g tem um máximo local em c) $\Rightarrow (g(x) \leq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c) \Rightarrow$ (f é côncava em c);
(iii) (f'' muda de sinal em c) $\Rightarrow$ (f muda de convexidade em c).

□

Assímptotas ao Gráfico de Uma Função.

Definição 32.3. (Assímptotas Verticais) Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \overline{D} \subset \mathbb{R}$ um ponto aderente ao seu domínio. Diremos que a recta vertical de equação $x = a$ é uma *assímptota vertical* ao gráfico de f se

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \text{(qualquer uma das 4 combinações de sinais serve).}$$

Definição 32.4. (Assímptotas Oblíquas) Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. Diremos que a recta de equação

$$y = m \cdot x + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}\,,$$

é uma *assímptota à esquerda* ao gráfico de f (resp. *assímptota à direita* ao gráfico de f) se

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$$
$$(\text{resp. } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0)\,.$$

No caso particular em que $m = 0$, diremos que o gráfico de f tem uma *assímptota horizontal à esquerda* (resp. *assímptota horizontal à direita*).

Teorema 32.5. *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de f tem uma assímptota à esquerda (resp. direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$(a) \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (b) \quad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x)$$
$$(\text{resp. } (a) \quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (b) \quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x))\,.$$

Nesse caso, a assímptota à esquerda (resp. direita) é única e tem equação

$$y = m \cdot x + p\,.$$

Dem. Faremos apenas o caso da assímptota à esquerda, sendo o da assímptota à direita completamente análogo.
($\Rightarrow$) Suponhamos que a recta de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$, é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. Então

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a função auxiliar φ, definida por

$$\varphi(x) = (f(x) - (m \cdot x + p))\ ,\ \text{satisfaz } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\,.$$

Temos então que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{mx + p + \varphi(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(m + \frac{p}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \right) = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} (p + \varphi(x)) = p \in \mathbb{R}\,,$$

pelo que os dois limites em causa existem e são finitos.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existem e são finitos os limites referidos em (a) e (b), com valores $m, p \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a recta de equação $y = mx + p$ é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. □

33. Aula – 12 de Dezembro de 2005

Exemplo 33.1. (Ficha 5, V 1.(a))

Exemplo 33.2. (Ficha 5, V 1.(g)) Pretende-se determinar intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x \cdot e^{1/x} \,, \ \forall\, x \neq 0 \,,$$

bem como esboçar o seu gráfico.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \,, \ \forall\, x \neq 0 \,.$$

Temos então que

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \,, & \text{se } x \in \,]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[; \\ = 0 \,, & \text{se } x = 1; \\ < 0 \,, & \text{se } x \in \,]0, 1[; \end{cases} \Rightarrow f \text{ é } \begin{cases} \text{crescente} \,, & \text{em }]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[; \\ \\ \text{decrescente} \,, & \text{em }]0, 1[. \end{cases}$$

Podemos também já concluir que f tem um mínimo local em $x = 1$.

A derivada f' é também diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com derivada $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3} \,, \ \forall\, x \neq 0 \,.$$

Temos então que

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 \,, & \text{se } x \in \,]-\infty, 0[; \\ > 0 \,, & \text{se } x \in \,]0, +\infty[; \end{cases} \Rightarrow f \text{ é } \begin{cases} \text{côncava} \,, & \text{em }]-\infty, 0[; \\ \text{convexa} \,, & \text{em }]0, +\infty[. \end{cases}$$

Podemos também já concluir que f não tem pontos de inflexão (notem que f não está sequer definida no ponto zero).

O único ponto onde f pode ter uma assímptota vertical é o ponto zero. Temos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \cdot e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \,,$$

enquanto que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty \,.$$

O resultado deste segundo limite diz-nos que a recta vertical de equação $x = 0$ é de facto uma assímptota vertical ao gráfico de f.

Como

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1 = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} (x \cdot e^{1/x} - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{y \to 0^\pm} \frac{e^y - 1}{y} = 1 = p \in \mathbb{R}$$

(onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x \to \pm\infty \Leftrightarrow y \to 0^\pm$, e se usou o limite notável (41)), temos que a recta de equação $y = x + 1$ é uma assímptota ao gráfico de f, tanto à direita como à esquerda.

A Figura 22 apresenta o esboço do gráfico de f.

34. Aula – 14 de Dezembro de 2005

Exemplo 34.1. (Ficha 5, V 2.)

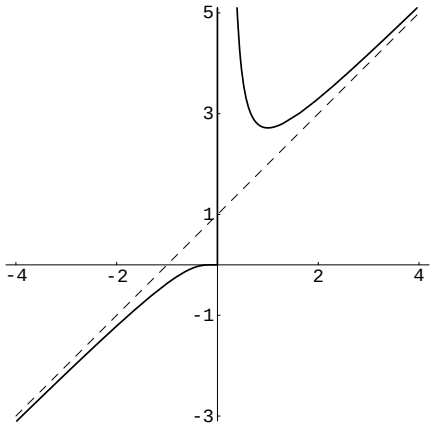

FIGURA 22. Esboço do gráfico da função f do Exemplo 33.2.

Resolução do Exame Tipo.

I 1. Seja A o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x(x-2)| \leq 1 \quad \text{e} \quad x \geq 0\} \ .$$

Mostre que $A = \left[0, 1+\sqrt{2}\right]$ e determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}$ e $A \setminus \mathbb{Q}$.

Resolução.

$$\begin{aligned}
x \in A \quad &\Leftrightarrow \quad |x(x-2)| \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -1 \leq x(x-2) \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -1 \leq x(x-2) \quad \wedge \quad x(x-2) \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 2x - 1 \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0 \quad \wedge \quad (x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2})) \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \left(x \in \left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]\right) \quad \wedge \quad x \in [0, +\infty[\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right] \ .
\end{aligned}$$

Como $1 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, temos que

$$\inf(A \cap \mathbb{Q}) = \min(A \cap \mathbb{Q}) = 0 \, , \quad \sup(A \cap \mathbb{Q}) = 1+\sqrt{2} \quad \text{e} \quad A \cap \mathbb{Q} \text{ não tem máximo,}$$

enquanto que

$$\sup(A \setminus \mathbb{Q}) = \max(A \setminus \mathbb{Q}) = 1+\sqrt{2} \, , \quad \inf(A \setminus \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{e} \quad A \setminus \mathbb{Q} \text{ não tem mínimo.}$$

□

35. AULA – 16 DE DEZEMBRO DE 2005

Resolução do Exame Tipo (cont.)

I 2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} \ .$$

Mostre que $0 < x_n < 1$ e que (x_n) é monótona. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

Resolução. Observemos primeiro que

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} = 2\left(1 - \frac{1}{1+x_n^2}\right).$$

Vamos agora mostrar pelo método de indução que a proposição

$$P(n) = \text{“}0 < x_n < 1\text{”}$$

é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$[P(1)]$. Temos que verificar que $0 < x_1 < 1$. Isto é de facto verdade, pois $x_1 = 1/2$.
$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$0 < x_n < 1\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$0 < x_{n+1} < 1\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
0 < x_n < 1 &\Rightarrow 0 < x_n^2 < 1 \\
&\Rightarrow 1 < 1 + x_n^2 < 2 \\
&\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+x_n^2} > \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow -1 < -\frac{1}{1+x_n^2} < -\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{1+x_n^2} < \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow 0 < 2\left(1 - \frac{1}{1+x_n^2}\right) < 1 \\
&\Rightarrow 0 < x_{n+1} < 1\,.
\end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2(1/2)^2}{1+(1/2)^2} = \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}\,,$$

vamos mostrar pelo método de indução que a sucessão (x_n) é estritamente decrescente, i.e. que a proposição

$$P(n) = \text{“}x_n > x_{n+1}\text{”}$$

é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$[P(1)]$. Temos que verificar que $x_1 > x_2$, o que já foi feito.
$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$x_n > x_{n+1}\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$x_{n+1} > x_{n+2}\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_n > x_{n+1} &\Rightarrow x_n^2 > x_{n+1}^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_n^2 > 1 + x_{n+1}^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+x_n^2} < \frac{1}{1+x_{n+1}^2} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{1+x_n^2} > -\frac{1}{1+x_{n+1}^2} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x_n^2} > 1 - \frac{1}{1+x_{n+1}^2} \\ &\Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{1+x_n^2}\right) > 2\left(1 - \frac{1}{1+x_{n+1}^2}\right) \\ &\Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}\,, \end{aligned}$$

onde se usou, na primeira e terceira implicações, o facto de $x_n > 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$, provado anteriormente.

Temos então que a sucessão (x_n) é monótona e limitada, pelo que o Teorema 9.6 garante a sua convergência. Designemos por $L \in \mathbb{R}$ o seu limite. Temos assim que $\lim x_n = L$ e também $\lim x_{n+1} = L$ (cf. Teorema 10.5). Usando a definição por recorrência de (x_n), podemos então calcular L da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} &\Rightarrow \lim x_{n+1} = \lim \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} \\ &\Rightarrow L = \frac{2L^2}{1+L^2} \Rightarrow L + L^3 = 2L^2 \\ &\Rightarrow L^3 - 2L^2 + L = 0 \Rightarrow L(L^2 - 2L + 1) = 0 \\ &\Rightarrow L(L-1)^2 = 0 \Rightarrow L = 0 \ \vee \ L = 1\,. \end{aligned}$$

Como $0 < x_n < 1$ e (x_n) é decrescente, o seu limite não pode ser 1. Concluimos assim que

$$\lim x_n = 0\,.$$

□

II 1. Determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) das seguintes séries numéricas:

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{(2n)!}{n^{2n}}\,.$$

Resolução. A série $\sum (-1)^n \operatorname{sen}(1/n)$ é uma série alternada com

$$a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{notem que } 0 < 1/n \leq 1 \Rightarrow a_n = \operatorname{sen}(1/n) > 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}).$$

Como o seno é uma função estritamente crescente no intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, com $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$, temos que

$$\frac{1}{n} \searrow 0 \Rightarrow a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \searrow 0\,.$$

Logo, o Critério de Leibniz garante a convergência desta série alternada.

Estudemos agora a série dos módulos

$$\sum_n \left|(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Tendo em conta o Teorema 21.7, e usando o limite notável (40) do Exemplo 24.2, temos que

$$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = 1\,.$$

Como $0 < 1 < +\infty$, podemos concluir por comparação que a série dos módulos tem a mesma natureza da série $\sum 1/n$. Sendo esta uma série de Dirichlet com $\alpha = 1 \leq 1$, logo divergente (cf. (28)), concluimos que a série dos módulos é divergente.

Podemos finalmente concluir que

$$\text{a série} \quad \sum_n (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{é simplesmente convergente.}$$

Queremos agora determinar a natureza da série

$$\sum_n \frac{(2n)!}{n^{2n}}\,.$$

Fazendo $a_n = (2n)!/n^{2n}$, temos então que

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\
&= \lim \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \\
&= \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\
&= 4 \cdot \lim \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{2n/(n+1)} \\
&= 4 \cdot \left(e^{-1}\right)^2 = \frac{4}{e^2} = R\,.
\end{aligned}$$

Como $R = 4/e^2 < 1$, concluimos pelo Critério da Razão (Teorema 15.3) que a série dada é convergente. Sendo uma STNN, é também absolutamente convergente. □

II 2. Seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(3x-2)^n\,,$$

no conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 1$. [Sugestão: a série numérica obtida neste ponto é uma série de Mengoli.]

Resolução. O domínio da função g coincide naturalmente com o domínio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(3x-2)^n\,,$$

que é uma série de potências de $(3x-2)$ com $a_n = (2n+1)/(n^2(n+1)^2)$. Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula do Corolário 18.2:

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2n+3} = \lim \frac{(2n+1)(n+2)^2}{n^2(2n+3)} = 1\,.$$

Temos então que a série de potências é absolutamente convergente para

$$|3x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < 3x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < 3x < 3 \Leftrightarrow 1/3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in \,]1/3, 1[\,,$$

e é divergente para

$$|3x-2| > 1 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, 1/3[\cup]1, +\infty[\,.$$

Analisemos agora a natureza da série de potências quando $|3x-2| = 1$, i.e. quando $x = 1/3$ ou $x = 1$.

Quando $x = 1/3$ temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(3x-2)^n\right)_{x=1/3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(-1)^n\,,$$

que é uma série alternada. A correspondente série de módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

é da mesma natureza que a série $\sum 1/n^3$, pois

$$\lim \frac{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{(2n+1)n^3}{n^2(n+1)^2} = 2 \quad \text{e} \quad 0 < 2 < +\infty\,.$$

Como a série $\sum 1/n^3$ é convergente (Dirichlet com $\alpha = 3 > 1$, cf. (28)), podemos concluir que a série de potências é absolutamente convergente quando $x = 1/3$.

Quando $x = 1$ temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}(3x-2)^n\right)_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,,$$

que já sabemos ser uma série convergente.

Temos assim que o domínio da função g é $D = [1/3, 1]$. O cálculo do seu valor no ponto $x = 1$ pode ser feito da seguinte forma:

$$g(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{1^2} - 1 \cdot \lim \frac{1}{n^2} = 1\,,$$

onde se usou a fórmula (22) para a soma dos termos de uma série de Mengoli, com $u_n = 1/n^2$ e $p = 1$. □

36. Aula – 19 de Dezembro de 2005

Resolução do Exame Tipo (cont.)

III 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)\,, & \text{se } x \geq 0; \\ x^2 e^x\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.

Resolução. De acordo com a Definição 23.5, mostrar que f é contínua no ponto zero é mostrar que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \arcsin\left(\frac{0}{1+0}\right) = \arcsin(0) = 0\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right) = \arcsin(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 e^x = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0\,,$$

podemos usar o Teorema 23.9 para concluir que f é de facto contínua no ponto zero.

Para estudar a diferenciabilidade de f no ponto zero, vamos calcular as suas derivadas laterais nesse ponto. A derivada lateral esquerda pode ser calculada usando a Definição 26.9:

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x e^x = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0\,.$$

Usaremos agora o Corolário 29.4 do Teorema de Lagrange para calcular a derivada lateral direita. Tendo em conta que, para $x > 0$,

$$f'(x) = \left(\arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}} = \frac{\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{1+2x}}{1+x}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}\,,$$

temos então que

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{1}} = 1\,.$$

Como

$$f'_e(0) = 0 \neq 1 = f'_d(0)\,,$$

concluimos, pelo Teorema 26.10, que f não é de facto diferenciável no ponto zero. □

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

Resolução. Tendo em conta a derivada calculada na alínea (a), temos que

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}} > 0\,,\ \forall\, x > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente no intervalo }]0,+\infty[.$$

Por outro lado, para $x < 0$ a derivada de f é dada por

$$f'(x) = \left(x^2e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x\,.$$

Analisando o sinal desta expressão, obtemos

$$f'(x) = \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x \in\,]-\infty,-2[;\\ = 0\,, & \text{se } x = -2;\\ < 0\,, & \text{se} \in\,]-2,0[; \end{cases} \Rightarrow f \text{ é } \begin{cases} \text{crescente} & \text{em }]-\infty,-2[;\\ & \\ \text{decrescente} & \text{em }]-2,0[. \end{cases}$$

Concluimos também que f tem um máximo local em $x = -2$ e um mínimo local em $x = 0$ (apesar de f não ser diferenciável neste último ponto).

Para $x > 0$, a segunda derivada de f é dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}\right)' = \left((1+x)^{-1}(1+2x)^{-1/2}\right)'\\ &= -(1+x)^{-2}(1+2x)^{-1/2} - (1+x)^{-1}(1+2x)^{-3/2}\\ &= -\left(\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{1+2x}} + \frac{1}{(1+x)(1+2x)^{3/2}}\right)\\ &= -\frac{(1+2x)+(1+x)}{(1+x)^2(1+2x)^{3/2}} = -\frac{2+3x}{(1+x)^2(1+2x)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Temos assim que

$$f''(x) < 0\,,\ \forall\, x > 0 \Rightarrow f \text{ é côncava no intervalo }]0,+\infty[.$$

Por outro lado, para $x < 0$ a segunda derivada de f é dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x(2+x)e^x)' = (2+x)e^x + xe^x + x(2+x)e^x\\ &= (x^2+4x+2)e^x = (x-(-2-\sqrt{2}))(x-(-2+\sqrt{2}))e^x\,. \end{aligned}$$

Temos assim que

$$f''(x) = \begin{cases} > 0\,, & \text{se } x \in\,]-\infty,-2-\sqrt{2}[\,\cup\,]-2+\sqrt{2},0[;\\ = 0\,, & \text{se } x = -2-\sqrt{2} \text{ ou } x = -2+\sqrt{2};\\ < 0\,, & \text{se} \in\,]-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}[; \end{cases}$$

pelo que

$$f \text{ é } \begin{cases} \text{convexa} & \text{em }]-\infty, -2-\sqrt{2}[\cup]-2+\sqrt{2}, 0[; \\ \text{côncava} & \text{em }]-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}[. \end{cases}$$

Podemos também concluir que f tem pontos de inflexão em $x = -2-\sqrt{2}$ e $x = -2+\sqrt{2}$. Nota: o ponto $x = 0$ não é de inflexão porque a função f não é diferenciável neste ponto.

A função f não tem qualquer assímptota vertical, pois é contínua em todo o $\mathbb{R}$. Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin\left(x/(1+x)\right)}{x} = \frac{\arcsin(1)}{+\infty} = \frac{\pi/2}{+\infty} = 0 = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(x/(1+x)\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = p \in \mathbb{R}\,,$$

temos que

$$\text{a recta horizontal } y = \frac{\pi}{2} \text{ é assímptota à direita ao gráfico de } f.$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^x = (-\infty)\cdot 0 = \text{indet.} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{indet.} \\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0 = m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x\to-\infty} x^2e^x = (+\infty)\cdot 0 = \text{indet.} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{indet.} \\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = (-2) \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0 = p \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

temos que

$$\text{a recta horizontal } y = 0 \text{ é assímptota à esquerda ao gráfico de } f.$$

□

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

Resolução. A Figura 23 apresenta o esboço do gráfico de f. O seu contradomínio é

$$f(\mathbb{R}) = [0, \pi/2[\ .$$

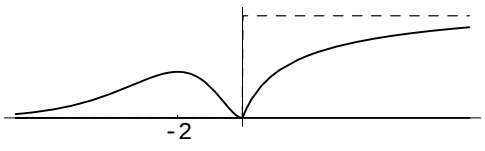

FIGURA 23. Esboço do gráfico da função f do Exame Tipo.

□

III 2. Calcule $\lim_{x\to1^+} (\log x)^{x-1}$.

Resolução. Temos que

$$\lim_{x\to 1^+}(\log x)^{x-1} = 0^0 = \text{indeterminação.}$$

Tendo em conta que, para qualquer $x \in]1,+\infty[$,

$$(\log x)^{x-1} = e^{\log((\log x)^{x-1})} = e^{(x-1)\log(\log(x))} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(\log x)^{x-1} = e^{\lim_{x\to 1^+}(x-1)\log(\log(x))}\,,$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}(x-1)\log(\log(x)) &= 0\cdot\log(\log(1^+)) = 0\cdot\log(0^+) = 0\cdot(-\infty) = \text{indet.}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\log(\log(x))}{1/(x-1)} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{indet.}\\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1/x}{\log(x)}}{-1/(x-1)^2} = -\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{x\log(x)}\\ &= -\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{\log(x)} = -\frac{0}{0} = \text{indet.}\\ &\overset{\text{RC}}{=} -\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{1/x} = -\frac{2\cdot 0}{1} = 0\,.\end{aligned}$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 1^+}(\log x)^{x-1} = e^{\lim_{x\to 1^+}(x-1)\log(\log(x))} = e^0 = 1\,.$$

□

37. Aula – 21 de Dezembro de 2005

Resolução do Exame Tipo (cont.)

IV 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja p_n o polinómio de grau $2n-1$ definido por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\,.$$

Mostre que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-p_n(x)}{x^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}\,.$$

Resolução. Mostraremos por indução que a proposição

$$P(n) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-p_n(x)}{x^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,,\ \text{com } p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
[$P(1)$]. Tendo em conta que

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{1-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!}x^{2\cdot 0+1} = x\,,$$

mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-p_1(x)}{x^{2\cdot 1+1}} = \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1+1)!} \quad \text{é equivalente a mostrar que} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^3} = \frac{-1}{3!}\,.$$

Esta última igualdade pode ser provada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^3} &= \frac{\operatorname{sen}(0)-0}{0^3} = \frac{0}{0} = \text{indet.}\\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2} = -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-1}{3!}\,,\end{aligned}$$

onde se usou o limite notável (56).

$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - p_n(x)}{x^{2n+1}} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - p_{n+1}(x)}{x^{2n+3}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

Tendo em conta que

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \Rightarrow p'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\,,$$

temos que $p'_{n+1}(0) = 1$ e

$$\begin{aligned} p''_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2k)x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)-1)!}x^{2(k+1)-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ &= -p_n(x)\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - p_{n+1}(x)}{x^{2n+3}} &= \frac{\operatorname{sen}(0) - p_{n+1}(0)}{0^{2n+3}} = \frac{0}{0} = \text{indet.} \\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - p'_{n+1}(x)}{(2n+3)x^{2n+2}} = \frac{1-1}{(2n+3)\cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{indet.} \\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) - p''_{n+1}(x)}{(2n+3)(2n+2)x^{2n+1}} = \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - p_n(x)}{x^{2n+1}} \\ &= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}\,, \end{aligned}$$

onde a hipótese de indução foi usada na penúltima igualdade. □

IV 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
(a) Mostre que $\lim_{x\to+\infty}[f(x+2) - f(x)] = 0$.

Resolução. Dado $x \in \mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema de Lagrange 29.1 à função f restrita ao intervalo $[x, x+2]$, obtendo

$$\frac{f(x+2) - f(x)}{(x+2) - x} = \frac{f(x+2) - f(x)}{2} = f'(\xi)\,, \text{ com } \xi \in]x, x+2[.$$

Temos então que $x \to +\infty \Rightarrow \xi \to +\infty$, pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+2) - f(x)}{2} = \lim_{\xi\to+\infty} f'(\xi) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x+2) - f(x)) = 2 \cdot 0 = 0\,.$$

□

(b) Será que se pode garantir que $\lim_{x\to+\infty}[f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.

Resolução. Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável, tal que

$$f(x) = \log(x)\,,\ \forall\, x \in [1, +\infty[\,.$$

Temos então que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (\log(x))' = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,,$$

mas

$$\lim_{x\to+\infty} (f(2x) - f(x)) = \lim_{x\to+\infty} (\log(2x) - \log(x)) = \lim_{x\to+\infty} \log(2) = \log(2) \neq 0\,.$$

Assim, a resposta à pergunta do enunciado desta alínea é *não*. □

Secção de Álgebra e Análise, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico
E-mail address: mabreu@math.ist.utl.pt