Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

1º Semestre 2002/2003

15 de Janeiro de 2003, 9.00 Duração: 3 horas

I (6 val.)

1. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

$$\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \quad ; \qquad \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{2n^2+1} .$$

2. Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}} \ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n^3}{(2n)!} \ ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

3. Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x+1| < x+1\} \qquad B = [1,2] \ .$$

(a) Mostre que $A =]-2/3,\, 0[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B$.

II (6 val.)

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & , x = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades e inflexões da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

III (5 val.)

1. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + x_n} .$$

Mostre que $0 \leq x_n \leq 1$ e que (x_n) é monótona. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3 + 1}} (1 - x)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3. Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} x \log\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x}{x+1}\right) .$$

IV (3 val.)

1. Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e majorado, com supremo $s \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\underline{s \notin Y}$, existe uma sucessão (y_n) de termos em Y, <u>estritamente crescente</u> e convergente para s.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(\sin x) .$$

(a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.

(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?