

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI
1º Semestre 2002/2003

29 de Janeiro de 2003, 9.00

Duração: 3 horas

I (6 val.)

1. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

$$\left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{1/n} ; \quad \left(2 - \frac{n}{n+1}\right)^{2n-1} .$$

2. Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^{n+2}} ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

3. Sejam A e B os subconjuntos de \mathbb{R} definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < |x + 1|\} \quad B = [-1, 1] .$$

- (a) Mostre que $A =]0, 2[$.
- (b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

II (6 val.)

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0 .$$

- (a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.
- (b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
- (c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades e inflexões da função f .
- (d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

III (5 val.)

1. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2 - x_n^2}} .$$

Mostre que $0 \leq x_n \leq 1$ e que (x_n) é monótona. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \log(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\cos(1/x) - 1) .$$

IV (3 val.)

1. Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e majorado, com supremo $s \in \mathbb{R}$ e tal que $s \notin Y$. Mostre que, para qualquer $\varepsilon > 0$, o conjunto $V_\varepsilon(s) \cap Y$ tem um número infinito de elementos. ($V_\varepsilon(s) =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$)
2. Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões tais que a série $\sum(b_n - b_{n+1})$ é convergente e a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Mostre que a série $\sum a_n b_n$ é absolutamente convergente.
3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, i.e. diferenciável com derivada $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, que satisfaz a desigualdade

$$f(x) \geq x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Mostre que para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \lambda$.