

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I
(LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1º Semestre 03/04

12 de Janeiro de 2004, 9.00

Duração: 2 horas

I (2,5 val.)

1. Seja A o subconjunto de \mathbb{R} definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1 \text{ e } x \geq 0\} .$$

Mostre que $A = [0, \sqrt{2}]$ e determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}$ e $A \setminus \mathbb{Q}$.

2. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \text{ e } x_{n+1} = \frac{3}{4 - x_n} .$$

Mostre que $0 \leq x_n \leq 2$ e que (x_n) é monótona. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

II (2,5 val.)

1. Determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) das seguintes séries numéricas:

$$\sum \frac{\cos(n\pi)}{2n+1} \text{ e } \sum \frac{3^n + n^3}{2^{2n}} .$$

2. Seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 1$.

III (3,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) & , x \geq 0 \\ xe^{1/x} & , x < 0 . \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é diferenciável em \mathbb{R} e calcule a sua derivada.
- (b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
- (c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(e^x - 1)} .$$

IV (1,5 val.)

1. Dado um subconjunto $B \subset \mathbb{R}$, recorde que o seu fecho ou aderência \overline{B} é definido por

$$\overline{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \text{para qualquer } \varepsilon > 0 \text{ existe } b \in B \text{ com } |b - x| < \varepsilon\} .$$

Prove que $x \in \overline{B}$ se e só se existe uma sucessão real (b_n) com $b_n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $b_n \rightarrow x$.

2. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\phi(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?